

А.И.ЛУРЬЕ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ



А. И. ЛУРЬЕ

Теория упругости



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
часть I	
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ	13
Глава I. Тензор напряжений	13
§ 1. Поле напряжений в сплошной среде	13
1.1. Координатные системы в механике сплошной среды (13). 1.2. Внешние силы (15). 1.3. Внутренние силы в сплошной среде (17). 1.4. Равновесие элементарного тетраэдра (19). 1.5. Необходимые условия равновесия сплошной среды (21). 1.6. Тензор функций напряжений (25).	
§ 2. Свойства тензора напряжений	27
2.1. Преобразование компонент. Главные напряжения. Главные инварианты (27). 2.2. Круги Мора (30). 2.3. Разбиение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор (32). 2.4. Примеры напряженных состояний (33).	
§ 3. Материальные координаты	37
3.1. Представление тензора напряжений (37). 3.2. Зависимости Коши (37). 3.3. Необходимые условия равновесия (38). 3.4. Другое определение тензора напряжений (39). 3.5. Элементарная работа внешних сил (40). 3.6. Энергетический тензор напряжений (43). 3.7. Инварианты тензора напряжений (44).	
§ 4. Интегральные оценки напряженного состояния	45
4.1. Моменты функции (45). 4.2. Моменты компонент тензора напряжений (45). 4.3. Случай $p=0$, $p=1$ (46). 4.4. Моменты напряжений первого порядка (46). 4.5. Пример. Сосуд под внешним и внутренним давлением (47). 4.6. Пример. Главный вектор и главный момент напряжений в плоском сечении тела (48). 4.7. Оценка среднего значения квадратичной формы компонент тензора напряжений (49). 4.8. Оценка удельной потенциальной энергии деформированного линейно-упругого тела (51). 4.9. Оценка удельной интенсивности касательных напряжений (51). 4.10. Моменты напряжений второго и более высокого порядка (52). 4.11. Оценка снизу максимума компонент напряжений (52). 4.12. Уточненная оценка (54).	
Глава II. Деформация сплошной среды	57
§ 1. Линейный тензор деформации	57
1.1. Обзор содержания главы (57). 1.2. Определение линейного тензора деформации (58).	
§ 2. Определение вектора перемещения по линейному тензору деформации	60
2.1. Совместимость деформаций (зависимости Сен-Венана) (60). 2.2. Вектор перемещения. Формула Чезаро (63). 2.3. Пример. Температурное поле (64). 2.4. Дисторсии Вольтерра (66).	

§ 3. Первая мера и первый тензор конечной деформации	68
3.1. Векторные базисы σ - и V -объемов (68). 3.2. Тензоры-градиенты ∇R , $\tilde{\nabla} r$ (71). 3.3. Первая мера деформации (Коши — Грин) (71). 3.4. Геометрическое значение компонент первой меры деформации (73). 3.5. Изменение ориентированной площади (74). 3.6. Первый тензор конечной деформации (75). 3.7. Главные деформации, главные оси деформации (77). 3.8. Конечный поворот среды как твердого тела (78). 3.9. Выражение тензора конечной деформации через линейный тензор деформации и линейный вектор поворота (78).	
§ 4. Вторая мера и второй тензор конечной деформации	79
4.1. Вторая мера конечной деформации (79). 4.2. Геометрическое значение компонент второй меры деформации (80). 4.3. Второй тензор конечной деформации (Адманзи — Гамель) (81).	
§ 5. Связь между мерами деформации	82
5.1. Сопоставление мер деформации и обратных им тензоров (82). 5.2. Связь между инвариантами (82). 5.3. Представление мер деформации в главных осях (83). 5.4. Инварианты тензоров конечной деформации (85). 5.5. Объемное расширение (86). 5.6. Преобразование подобия начального состояния (87). 5.7. Определение вектора перемещения по мерам деформации (87).	
§ 6. Примеры деформированных состояний	89
6.1. Аффинное преобразование (89). 6.2. Плоское поле перемещений (90). 6.3. Простой сдвиг (92). 6.4. Кручение круглого цилиндра (94). 6.5. Цилиндрический изгиб прямоугольной плиты (95). 6.6. Радиально-симметричная деформация полой сферы (97). 6.7. Осесимметричная деформация полого цилиндра (98).	

ЧАСТЬ II

УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ 100

Глава III. Закон состояния линейной теории упругости 100

§ 1. Изотропная сплошная среда 100

1.1. Постановка задачи линейной теории упругости (100). 1.2. Элементарная работа (102). 1.3. Изотропная однородная среда Генки (103).

§ 2. Потенциальная энергия деформации 106

2.1. Внутренняя энергия линейно-деформируемого тела (106). 2.2. Изотермический процесс деформирования (107). 2.3. Адиабатический процесс (108). 2.4. Удельная потенциальная энергия деформации. Среда Генки (109).

§ 3. Обобщенный закон Гука 111

3.1. Модули упругости (111). 3.2. Удельная потенциальная энергия деформации линейно-упругого тела (114). 3.3. Формула Клапейрона. Область значений модулей упругости (116). 3.4. Учет температурных слагаемых. Свободная энергия (118). 3.5. Термодинамический потенциал Гиббса (120). 3.6. Уравнение теплопроводности (121).

Глава IV. Основные соотношения линейной теории упругости 124

§ 1. Дифференциальные уравнения линейной теории упругости 124

1.1. Перечень исходных соотношений (124). 1.2. Краевые условия (124). 1.3. Дифференциальные уравнения теории упругости в перемещениях (126). 1.4. Представление решения в форме Папковича — Нейбера (128). 1.5. Решение в напряжениях. Зависимости Бельтрами (131). 1.6. Преобразование Ю. А. Круткова (133). 1.7. Решение Буссинеска — Галеркина (135). 1.8. Криволинейные координаты (136). 1.9. Ортогональные координаты (138). 1.10. Аксиально-симметричные задачи. Решение Лява (139). 1.11. Кручение тела вращения (141). 1.12. Деформация тела вращения (141). 1.13. Решение Папковича — Нейбера для тела вращения (144). 1.14. Учет температурных слагаемых (146).

§ 2. Вариационные принципы статики линейно-упругого тела 148

2.1. Стационарность потенциальной энергии системы (148). 2.2. Принцип минимума потенциальной энергии системы (150). 2.3. Метод Ритца (153). 2.4. Способ Галеркина (154). 2.5. Принцип минимума дополнительной работы (156). 2.6. Смешанный

принцип стационарности (Е. Рейсснер, 1961) (159). 2.7. Вариационные принципы при учете температурных слагаемых (161). 2.8. Принцип Сен-Венана. Энергетическое рассмотрение (163).

§ 3. Теорема взаимности. Потенциалы теории упругости 167

3.1. Формулировка и доказательство теоремы взаимности (Бетти, 1872) (167). 3.2. Тензор влияния. Теорема Максвелла (168). 3.3. Применение теоремы взаимности (169). 3.4. Теорема взаимности при учете температурных слагаемых (172). 3.5. Тензор влияния в неограниченной упругой среде (173). 3.6. Потенциалы теории упругости (176). 3.7. Определение поля перемещений по заданию внешних сил и вектора перемещения на поверхности тела (179). 3.8. О поведении потенциалов теории упругости на бесконечности (181).

§ 4. Теоремы единственности и существования решений 182

4.1. Теорема Кирхгоффа (182). 4.2. Интегральные уравнения первой краевой задачи (185). 4.3. Интегральные уравнения второй краевой задачи (187). 4.4. Сопоставление интегральных уравнений первой и второй краевых задач (190). 4.5. Теорема существования решения второй внешней и первой внутренней задачи (191). 4.6. Вторая внутренняя краевая задача $II^{(i)}$ (192). 4.7. Эластостатическая задача Робена (193). 4.8. Первая внешняя краевая задача $I^{(e)}$ (196).

§ 5. Напряженное состояние в двусвязном объеме 197

5.1. Обзор содержания (197). 5.2. Определение напряженного состояния по постоянным барьера (198). 5.3. Теорема взаимности (200). 5.4. Потенциальная энергия дисторсии (201). 5.5. Случай тела вращения (202). 5.6. Краевая задача для двусвязного тела вращения (205).

часть III

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ . . . 207

Глава V. Пространственные задачи 207

§ 1. Неограниченная упругая среда 207

1.1. Силовые точечные особенности (207). 1.2. Система сил, распределенных в малом объеме. Формулы Лауричелла (209). 1.3. Интерпретация второго потенциала теории упругости (215). 1.4. Потенциалы Буссиника (215). 1.5. Термоупругие перемещения (217). 1.6. Напряженное состояние, создаваемое включением (219).

§ 2. Упругое полупространство 223

2.1. Задача Буссиника и Черрути (223). 2.2. Частная задача Буссиника (224). 2.3. Распределенная нормальная нагрузка (225). 2.4. Применение функций Папковича — Нейбера к решению задачи Буссиника — Черрути (227). 2.5. Тензор влияния в упругом полупространстве (230). 2.6. Температурные напряжения в упругом полупространстве (232). 2.7. Случай установившейся температуры (234). 2.8. О вычислении потенциала простого слоя по плоской области (236). 2.9. Задача Дирихле для полупространства (237). 2.10. Первая краевая задача для полупространства (240). 2.11. Смешанные задачи для полупространства (241). 2.12. О принципе Сен-Венана. Формулировка Мизеса (242). 2.13. Сверхстатическая система сил (244). 2.14. Теоремы Стериберга (1954) (246).

§ 3. Равновесие упругой сферы 247

3.1. Постановка задачи (247). 3.2. Первая краевая задача (248). 3.3. Эластостатическая задача Робена для шара (250). 3.4. Тепловые напряжения в шаре (251). 3.5. Вторая краевая задача для сферы (254). 3.6. Вычисление вектора перемещения (257). 3.7. Напряженное состояние в центре шара (259). 3.8. Тепловые напряжения (259). 3.9. Напряженное состояние в окрестности сферической полости (261). 3.10. Напряженное состояние в окрестности малой сферической полости в скрученном цилиндрическом стержне (263). 3.11. Действие массовых сил (264). 3.12. Гравитирующий шар (266). 3.13. Вращающийся шар (266). 3.14. Действие сосредоточенных сил (268). 3.15. Случай распределенной нагрузки (271).

§ 4. Тела вращения 272

4.1. Интегральное уравнение равновесия (272). 4.2. Растяжение однополюго гиперболоида вращения (276). 4.3. Кручение гиперболоида (279). 4.4. Изгиб гиперболоида (280). 4.5. Вращающийся эллипсоид вращения (281).

§ 5. Эллипсоид	284
5.1. Эластостатическая задача Робена для трехосного эллипсоида (284). 5.2. Поступательное перемещение (285). 5.3. Распределение напряжений по поверхности эллипсоида (286). 5.4. Перемещение поворота (289). 5.5. Распределение напряжений по поверхности эллипсоида (290). 5.6. Эллипсоидальная полость в неограниченной упругой среде (292). 5.7. Краевые условия (295). 5.8. Выражения постоянных через три параметра (297). 5.9. Сфероидальная полость в упругой среде (299). 5.10. Круговая щель в упругой среде (300). 5.11. Эллиптическая щель в упругой среде (303).	
§ 6. Контактные задачи	306
6.1. Задача о жестком штампе. Краевое условие. (306). 6.2. Способ решения задачи о жестком штампе (310). 6.2а. Представление сил и моментов, прикладываемых к неплоскому штампу (313). 6.3. Плоский, эллиптический в плане штамп (315). 6.4. Перемещения и напряжения (317). 6.5. Неплоский штамп (319). 6.5а. Определение сил и моментов, действующих на неплоский, эллиптический в плане штамп (321). 6.6. Перемещения и напряжения (323). 6.7. Соприкасание поверхностей (324). 6.8. Задача Герца о сжатии упругих тел (329).	
§ 7. Равновесие упругого кругового цилиндра	331
7.1. Дифференциальные уравнения равновесия кругового цилиндра (331). 7.2. Задача Ляме для полого цилиндра (335). 7.3. Дисторсии в полом цилиндре (337). 7.4. Полиномные решения задачи о равновесии цилиндра (339). 7.5. Кручение полого цилиндра силами, распределенными по торцу (343). 7.6. Решения в бесселевых функциях (346). 7.7. Задача Файлона (350). 7.8. Однородные решения (353). 7.9. Краевые условия на торцах (356). 7.10. Обобщенная ортогональность (360).	
Глава VI. Задача Сен-Венана	366
§ 1. Напряженное состояние	366
1.1. Постановка задачи Сен-Венана (366). 1.2. Интегральные уравнения равновесия (367). 1.3. Основные предположения (368). 1.4. Нормальное напряжение σ_z в задаче Сен-Венана (369). 1.5. Касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} (370).	
§ 2. Приведение к краевым задачам для уравнений Лапласа и Пуассона 372	
2.1. Введение функций напряжений (372). 2.2. Перемещения в задаче Сен-Венана (374). 2.3. Упругая линия (377). 2.4. Классификация задач Сен-Венана (379). 2.5. Определение постоянной α (381). 2.6. Центр жесткости (384). 2.7. Элементарные решения (385).	
§ 3. Задача о кручении	388
3.1. Постановка задачи (388). 3.2. Перемещения (390). 3.3. Теорема о циркуляции касательных напряжений (392). 3.4. Жесткость при кручении (394). 3.5. Мембранная аналогия Прандтля (1904) (395). 3.6. Кручение стержня эллиптического сечения (397). 3.7. Неравенства для жесткости при кручении (399). 3.8. Кручение стержня прямоугольного сечения (401). 3.9. Решения в конечном виде (403). 3.10. Двусвязная область (405). 3.11. Эллиптическое кольцо (407). 3.12. Эксцентрическое кольцо (409). 3.13. Вариационное определение функции напряжений (412). 3.14. Приближенное решение задачи кручения (416). 3.15. Удлиненные профили (420). 3.16. Кручение тонкостенной трубы (424). 3.17. Многосвязные области (427).	
§ 4. Изгиб силой	430
4.1. Напряжения (430). 4.2. Изгиб стержня эллиптического поперечного сечения (432). 4.3. Функция напряжений С. П. Тимошенко (433). 4.4. Прямоугольное поперечное сечение (434). 4.5. Вариационная формулировка задачи изгиба (437). 4.6. Центр жесткости (439). 4.7. Приближенные решения (441). 4.8. Авиационный профиль (443).	
§ 5. Задача Мичелла	445
5.1. Постановка задачи (445). 5.2. Распределение нормальных напряжений (447). 5.3. Растяжение стержня (449). 5.3а. Растяжение стержня силами постоянной интенсивности (451). 5.4. Касательные напряжения τ_{zx}^1, τ_{yz}^1 (453). 5.5. Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (454). 5.6. Определение σ_z^0 (456). 5.7. Изгиб тяжелого стержня (457). 5.8. Средние значения напряжений (459). 5.9. О задаче Альмаизи (461).	

Глава VII. Плоская задача теории упругости 462

§ 1. Постановка плоских задач теории упругости 462

1.1. Плоская деформация (462). 1.2. Функция напряжений Эри (465). 1.3. Дифференциальное уравнение для функции напряжений (466). 1.4. Плоское напряженное состояние (467). 1.5. Обобщенное плоское напряженное состояние (469). 1.6. Плоская задача (470). 1.7. Перемещения в плоской задаче (471). 1.8. Главный вектор и главный момент (473). 1.9. Ортогональные криволинейные координаты (474). 1.10. Полярные координаты на плоскости (475). 1.11. Представление бигармонической функции (475). 1.12. Введение комплексного переменного (476). 1.13. Преобразование формул плоской задачи (477). 1.14. Формула Гурса (479). 1.15. Перенос начала координат (481).

§ 2. Балка и брус с круговой осью 482

2.1. Постановка плоской задачи о балке и плите (482). 2.2. Плоская задача Сен-Венана (484). 2.3. Операторное представление решений (486). 2.4. Функция напряжений в задаче о полосе (487). 2.5. Элементарная теория балки (491). 2.6. Полномышленное нагружение (Менаже, 1901) (492). 2.7. Синусоидальное нагружение (решения Рибьера (1898) и Файлона (1903)) (494). 2.8. Сосредоточенная сила (Карман и Зеевальд, 1927) (497). 2.9. Брус с круговой осью, нагруженный по торцам (Головин, 1881) (502). 2.10. Нагружение кругового бруса по поверхности (506). 2.11. Косинусоидальное нагружение (509). 2.12. Однородные решения (511).

§ 3. Упругая плоскость и полуплоскость 513

3.1. Сосредоточенная сила и сосредоточенный момент в упругой плоскости (513). 3.2. Задача Фламанна (1892) (516). 3.3. Общий случай нормального нагружения (518). 3.4. Нагружение силой, направленной вдоль границы (520). 3.5. Плоская контактная задача (522). 3.6. Построение потенциала ϕ (524). 3.7. Плоский штамп (528). 3.8. Штамп параболического очертания (528). 3.9. Сосредоточенная сила в упругой полуплоскости (529).

§ 4. Упругий клин 531

4.1. Сосредоточенная сила в вершине клина (531). 4.2. Интегральное преобразование Меллина в задаче о клине (533). 4.3. Сосредоточенный момент в вершине клина (537). 4.4. Нагружение боковых граней (540).

§ 5. Краевые задачи плоской теории упругости 544

5.1. Классификация областей (544). 5.2. Краевые задачи для односвязной конечной области (545). 5.3. Степень определенности функций Н. И. Мусхелишвили (547). 5.4. Бесконечная область с отверстием (548). 5.5. Двусвязная область. Дисторсия (552). 5.6. Представление функции напряжений в двусвязной области (Мичелл) (553). 5.7. Тепловые напряжения. Плоская деформация (555). 5.8. Плоское напряженное состояние (557). 5.9. Стационарное распределение температуры (559). 5.10. Теорема Коши, интеграл Коши (562). 5.11. Интегралы типа Коши. Формулы Сохоцкого — Племеля (564).

§ 6. Области с круговой границей 566

6.1. Круглый диск, нагруженный сосредоточенными силами (566). 6.2. Общий случай нагружения круглого диска (569). 6.3. Способ интегралов Коши (571). 6.4. Нормальное напряжение σ_θ на окружности (572). 6.5. Напряжения в центре диска (574). 6.6. Статически неуравновешенный вращающийся диск (575). 6.7. Первая краевая задача для круга (578). 6.8. Напряженное состояние (581). 6.9. Тепловые напряжения в диске, заключенном в жесткую обойму (584). 6.10. Круговое отверстие в бесконечной плоскости (586). 6.11. Равномерное нагружение края отверстия (589). 6.12. Растяжение плоскости, ослабленной круговым отверстием (589). 6.13. Продолжение $\Phi(z)$ (590). 6.14. Решение краевых задач пп. 6.2, 6.10 способом продолжения (592).

§ 7. Круговое кольцо 595

7.1. Напряженное состояние, вызываемое дисторсией (595). 7.2. Вторая краевая задача для кругового кольца (596). 7.3. Определение функций $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ (597). 7.4. Труба под равномерным внешним и внутренним давлением (задача Ламе) (599). 7.5. Температурные напряжения в кольце (599). 7.6. Растяжение кольца сосредоточенными силами (601). 7.7. Способ продолжения (602).

§ 8. Применение конформного преобразования 606

8.1. Бесконечная плоскость с отверстием (606). 8.2. Способ интегралов Коши (608). 8.3. Эллиптическое отверстие (611). 8.4. Гипотроходное отверстие (613). 8.5. Односвязная конечная область (615). 8.6. Пример (618). 8.7. Первая краевая задача (619). 8.8. Эллиптическое отверстие (622). 8.9. Двусвязная область (623). 8.10. Неконцентрическое кольцо (626).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ IV

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ 628

Глава VIII. Законы состояния нелинейно-упругого тела 628

§ 1. Потенциальная энергия деформации 628

1.1. Идеально-упругое тело (628). 1.2. Потенциалы деформаций (629). 1.3. Однородное изотропное идеально-упругое тело (632).

§ 2. Закон состояния изотропного идеально-упругого тела 633

2.1. Общая форма закона состояния (633). 2.2. Начальное и натуральное состояния (635). 2.3. Связь между обобщенными модулями при различных начальных состояниях (635). 2.4. Представление тензора напряжений (637). 2.5. Выражение закона состояния через тензоры деформации (638). 2.6. Главные напряжения (640). 2.7. Выражение тензора напряжений (642). 2.8. Тензор напряжений Пьола (1836) — Кирхгоффа (1850) (644). 2.9. О задании удельной потенциальной энергии деформации (645).

§ 3. Представление закона состояния квадратичным трехчленом 647

3.1. Квадратичная зависимость между двумя соосными тензорами (647). 3.2. Представление энергетического тензора напряжений (648). 3.3. Представление тензора напряжений (649). 3.4. Разбиение тензора напряжений на шаровой тензор и девiator (650). 3.5. Применение логарифмической меры деформации (654).

§ 4. Аппроксимации законов состояния 657

4.1. Квадратичный закон состояния Сийоррии (657). 4.2. Зависимость коэффициентов квадратичного закона от начального состояния (660). 4.3. Знак удельной потенциальной энергии деформации (662). 4.4. Применение к задачам об одноосном растяжении (664). 4.5. Простой сдвиг (665). 4.6. Закон состояния Мурнага (666). 4.7. Поведение материала при сверхвысоких давлениях (667). 4.8. Одноосное растяжение (669). 4.9. Несжимаемый материал (670). 4.10. Материалы с углом подобия девиаторов, равным нулю (672).

§ 5. Вариационные теоремы статики нелинейно-упругого тела 674

5.1. Принцип виртуальных перемещений (674). 5.2. Стационарность потенциальной энергии системы (675). 5.3. Дополнительная работа деформации (679). 5.4. Стационарность дополнительной работы (680). 5.5. Удельная дополнительная работа деформации для полунелинейного материала (682).

Глава IX. Задачи и методы нелинейной теории упругости 686

§ 1. Напряженное состояние при аффинном преобразовании 686

1.1. Тензор напряжений при аффинном преобразовании (686). 1.2. Всестороннее сжатие (688). 1.3. Одноосное растяжение (689). 1.4. Простой сдвиг (690).

§ 2. Упругий слой 692

2.1. Цилиндрический изгиб прямоугольной плиты (692). 2.2. Сжатие и растяжение упругой полосы (695). 2.3. Уравнения статики (697). 2.4. Сжатие слоя (700). 2.5. Растяжение слоя (700).

§ 3. Упругий цилиндр, упругая сфера 701

3.1. Цилиндрическая труба под давлением (задача Ляме для нелинейно-упругого несжимаемого материала) (701). 3.2. Напряжения (703). 3.3. Определение постоянных (704). 3.4. Материал Муни (706). 3.5. Цилиндр, «вывернутый наизнанку» (707). 3.6. Кручение круглого цилиндра (708). 3.7. Напряжения, крутящий момент, осевая сила (711). 3.8. Симметричная деформация полого шара (задача Ляме для шара) (714). 3.9. Несжимаемый материал (716). 3.10. Применение принципа стационарности потенциальной энергии (717).

§ 4. Малая деформация при наличии начального нагружения 719

4.1. Малая деформация деформированного объема (719). 4.2. Тензор напряжений (722). 4.3. Необходимые условия равновесия (723). 4.4. Представление тензора $\bar{\theta}$ (726). 4.5. Трехосное напряженное состояние (728). 4.6. Гидростатическое напряженное состояние (730). 4.7. Одноосное растяжение (732). 4.8. Деформация кручения сжатого стержня (734).

§ 5. Эффекты второго порядка 736

5.1. Выделение линейных слагаемых в законе состояния (736). 5.2. Уравнения равновесия (739). 5.3. Эффекты второго порядка (741). 5.3а. Изменение объема тела, подвергнутого дисторсии (745). 5.4. Выбор исходного приближения (746). 5.5. Эффекты второго порядка в задаче о кручении стержня (748). 5.6. Несжимаемая среда (750). 5.7. Уравнения равновесия (751).

§ 6. Плоская задача 753

6.1. Геометрические соотношения (753). 6.2. Уравнение состояния (755). 6.3. Уравнения статики (756). 6.4. Функция напряжений (756). 6.5. Плоское напряженное состояние (759). 6.6. Уравнения равновесия (761). 6.7. Уравнение состояния (763). 6.8. Система уравнений задачи о плоском напряженном состоянии (764). 6.9. Применение логарифмической меры деформации в задаче о плоской деформации (765). 6.10. Плоская деформация несжимаемого материала с равной нулю фазой подобия девиаторов (767). 6.11. Пример. Радиально-симметричная деформация (769).

§ 7. Полулинейный материал 771

7.1. Уравнения равновесия полулинейного материала (771). 7.2. Сохранение главных направлений (772). 7.3. Примеры (цилиндр и сфера) (772). 7.4. Плоская деформация (774). 7.5. Напряженное состояние при плоском аффинном преобразовании (778). 7.6. Изгибание полосы в цилиндрическую панель (779). 7.7. Наложение малой деформации (782). 7.8. Случай сохранения главных направлений (786). 7.9. Уравнения нейтрального равновесия Саусвелла (1913) (787). 7.10. Представление решений уравнений Саусвелла (789). 7.11. Бифуркация равновесия сжатого стержня (791). 7.12. Стержень круглого поперечного сечения (794). 7.13. Бифуркация равновесия полой сферы, сжатой равномерно распределенным давлением (795).

Приложение I. Основы тензорной алгебры 799

I.1. Скаляр и вектор (799). I.2. Символы Леви-Чивита (801). I.3. Тензор второго ранга (802). I.4. Простейшие операции с тензорами (806). I.5. Диада векторов, диадное представление тензора второго ранга (809). I.6. Тензоры высших рангов. Свертывание индексов (811). I.7. Обратный тензор (814). I.8. Тензор поворота (815). I.9. Главные оси и главные значения симметричного тензора (817). I.10. Выражение компонент тензора через главные значения. Инварианты. Теорема Кейли — Гамильтона (821). I.10а. Главные оси и главные значения несимметричного тензора (824). I.11. Разбиение симметричного тензора второго ранга на девиатор и шаровой тензор (828). I.12. Функции тензоров (830). I.13. Выделение шаровой и девиаторной частей (834). I.14. Линейная связь между тензорами (838).

Приложение II. Основные операции тензорного анализа 839

II.1. Набл.-оператор (839). II.2. Дифференциальные операции в векторном поле (840). II.3. Дифференциальные операции над тензорами (842). II.4. Двукратное дифференцирование (843). II.5. Преобразование объемного интеграла в поверхностный (846). II.6. Преобразование Стокса (847).

Приложение III. Ортогональные криволинейные координаты 850

III.1. Определения (850). III.2. Квадрат линейного элемента (851). III.3. Ортогональная криволинейная система координат. Базисные векторы (852). III.4. Дифференцирование базисных векторов (854). III.5. Дифференциальные операции в ортогональных криволинейных координатах (856). III.6. Зависимости Ляме (858). III.7. Цилиндрические координаты (860). III.8. Сферические координаты (861). III.9. Тела вращения (861). III.10. Вырожденные эллиптические координаты (863). III.11. Эллиптические координаты (общий случай) (865).

Приложение IV. Тензорная алгебра в косоугольном базисе 870

IV.1. Основной и взаимный базисы (870). IV.2. Вектор в косоугольном базисе (870). IV.3. Метрический тензор (872). IV.4. Тензор Леви-Чивита (873). IV.5. Тензоры в косоугольном базисе (874). IV.6. Преобразование базиса (875). IV.7. Главные оси симметричного тензора. Главные инварианты (876).

Приложение V. Операции тензорного анализа в криволинейных координатах 878

V.1. Введение базисов (878). V.2. Производные базисных векторов (879). V.3. Ковариантное дифференцирование (880). V.4. Дифференциальные операции в криволинейных координатах (883). V.5. Переход к ортогональным криволинейным координатам (885). V.6. Тензор Римана — Кристоффеля (886). V.7. Тензор $\text{Ink } \hat{P}$ (890). V.8. Преобразование поверхностного интеграла в объемный (891).

Приложение VI. Сведения по теории сферических и эллипсоидальных функций 892

VI.1. Разделение переменных в уравнении Лапласа (892). VI.2. Сферические функции Лапласа (894). VI.3. Решения $Q_n(\mu)$, $q_n(s)$ (897). VI.4. Решение внешней и внутренней задач для шара (900). VI.5. Внешняя и внутренняя задача Дирихле для сжатого эллипсоида (сфероида) (901). VI.6. Представление гармонических полиномов произведениями Ляме (902). VI.7. Функции $S_i^{(k)}(\rho)$ (904). VI.8. Потенциалы простого слоя на эллипсоиде (905).

Литературные указания 909

Именной указатель 930

Предметный указатель 933

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классическая теория упругости сохраняет свое почетное место в науке о поведении деформируемого твердого тела. Ее исходные определения являются общими для всех разделов этой науки, а методы постановки и решения задач служат для нее образцами. Успехи и завоевания теорий пластичности, ползучести, упруго-вязкой среды, разрушения твердых тел не заслоняют значения методов теории упругости для обоснования приемов расчета напряженного состояния в строительных сооружениях и машинах, составляющих существенную часть наук о сопротивлении материалов и строительной механики.

Первые две главы (ч. I) посвящены основным определениям механики сплошной среды — тензорам напряжений (гл. I) и деформаций (гл. II). Необходимость различения в нелинейной теории начального и конечного состояний среды не позволяет довольствоваться рассмотрением одной лишь меры (или тензора) деформации, а в связи с этим и в описание напряженного состояния оказывается целесообразным ввести отличные друг от друга тензоры. Эти вопросы рассмотрены в § 3 гл. I, изучению которого должно предшествовать изучение §§ 3—5 гл. II. Усвоение содержания этих параграфов может быть без ущерба отложено до изучения нелинейной теории (в гл. VIII, IX).

Получение замкнутых систем уравнений линейной теории упругости и описание приемов решений составляет содержание ч. II (гл. III — закон состояния, гл. IV — основные соотношения). Решение специальных задач отнесено к ч. III (гл. V—VII). Содержание гл. V только по направленности тематики соответствует монографии автора «Пространственные задачи теории упругости» (Гостехиздат, 1955); изложение рассмотренных в ней задач целиком переработано, и включены отсутствующие в этой монографии разделы (напряжения, создаваемые инородным включением; обоснование принципа Сен-Венана; некоторые задачи о концентрации напряжений (Нейбер); эластостатическая задача Робена и т. д.).

Естественные затруднения возникли при отборе материала гл. VI (задача Сен-Венана) и VII (плоская задача). В гл. VI

сравнительно подробно трактованы постановка задачи Сен-Венана, теорема о циркуляции, вопрос о центре жесткости, вариационные способы решения, тогда как рассмотрение решений для профилей частного вида сведено к минимуму. В гл. VII применение теории функций комплексного переменного ограничено рассмотрением простейших краевых задач, уделено место применениям других средств решения (преобразование Меллина в задаче о клине, операторные решения задач о полосе и брус с круговой осью).

Часть IV (гл. VIII, IX) посвящена основам нелинейной теории упругости: формулировкам закона состояния нелинейно-упругого тела, рассмотрению простейших задач, постановкам задач об эффектах второго порядка и бифуркации состояния равновесия. В содержание Приложений включены используемые в тексте книги способы тензорного исчисления и некоторые сведения по теории сферических и эллипсоидальных функций.

В книге рассмотрены «строгие» постановки задач — решения, не только статически допустимые, но и удовлетворяющие условиям совместности. От первоначального намерения включить в содержание также «технические» теории тонких стержней, пластин и оболочек пришлось отказаться, так как это привело бы к непомерному увеличению объема книги. Существенным пробелом является также ограничение по той же причине лишь статическими задачами.

Литературные указания, вынесенные из текста книги, не соответствуют необозримой литературе, относящейся к принципиальным исследованиям и решениям специальных задач теории упругости. Этот недостаток в некоторой мере компенсируется указаниями на обзорные статьи и монографии, содержащие исчерпывающие библиографии по специальным вопросам.

Книга адресована подготовленному читателю, заинтересованному в углублении знаний по теории упругости и приобретении навыков решения ее задач. Она предназначается также служить пособием в преподавании курса теории упругости.

Первыми читателями этой книги были Л. М. Зубов, проверивший формулы и вычисления, и В. А. Пальмов, предложивший внести ряд исправлений и разъяснений. Приятным долгом автора является выразить им искреннюю благодарность за большой труд, ценные советы и критические указания.

Автор благодарит также за плодотворную и дружескую критику профессора И. И. Воровича и руководимый им коллектив кафедры теории упругости Ростовского государственного университета, взявших на себя труд рецензирования рукописи.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ГЛАВА I

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1. Поле напряжений в сплошной среде

1.1. Координатные системы в механике сплошной среды. Сплошная среда характеризуется наличием в любом ее элементарном объеме $d\tau$ массы $dm = \rho d\tau$; коэффициент пропорциональности ρ , плотность, считается непрерывной функцией координат точек среды.

Принимается, что под влиянием внешних воздействий ранее находившаяся в равновесии сплошная среда в объеме v , ограниченной поверхностью o , пришла в новое состояние равновесия, в котором объем станет равным V ; ограничивающую этот объем поверхность назовем O . Первое состояние среды назовем начальным (v -объем), второе — конечным (V -объем). В дальнейшем будет иметь значение рассмотрение также натурального состояния среды. Это — то состояние, в котором среда не напряжена; оно, пока не оговорено противное, не отождествляется с начальным состоянием.

Вводится декартова система осей $OX_1X_2X_3$; положение точки среды M в начальном состоянии задается в этой системе ее декартовыми координатами a_1, a_2, a_3 или вектор-радиусом*)

$$\mathbf{r} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3 = a_s\mathbf{i}_s, \quad (1.1.1)$$

где \mathbf{i}_s — единичные векторы координатных осей. В конечном состоянии эта точка занимает положение M' , определяемое в той же системе осей координатами x_1, x_2, x_3 или вектор-радиусом

$$\mathbf{R} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 = x_s\mathbf{i}_s. \quad (1.1.2)$$

*) Знак суммирования по немоу индексу опускается, как принято в Приложениях I—III. Ссылки на Приложения отмечаются римской цифрой, указывающей номер Приложения, номером пункта и формулы. Три числа в формулах текста обозначают: первое — номер параграфа, второе — пункта, третье — формулы. Они указываются при ссылке на формулу данной главы и дополняются указанием номера главы при ссылке на формулу другой главы.

Геометрическая разность $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ определяет вектор перемещения точки M , обозначаемый \mathbf{u} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u} = i_s(a_s + u_s), \quad x_s = a_s + u_s. \quad (1.1.3)$$

Проекции u_s вектора перемещения, называемые перемещениями, рассматриваются как функции координат точек среды a_1, a_2, a_3 в ее начальном состоянии, непрерывные вместе с их производными по этим переменным до требующихся в проводимом исследовании порядков. Предполагается также, что уравнения (1.1.3) разрешимы, и единственным образом, относительно переменных a_s :

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{u}, \quad a_s = x_s - u_s, \quad (1.1.4)$$

причем здесь u_s рассматриваются уже как функции координат x_k конечного состояния. Условием однозначной разрешимости системы уравнений (1.1.3) является необращение в нуль якобиана

$$J(a_1, a_2, a_3) = \left| \frac{\partial x_s}{\partial a_k} \right| = \left| \delta_{sk} + \frac{\partial u_s}{\partial a_k} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial a_1} & \frac{\partial u_1}{\partial a_2} & \frac{\partial u_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial a_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial a_2} & \frac{\partial u_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial a_1} & \frac{\partial u_3}{\partial a_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} \quad (1.1.5)$$

в замкнутой области $v + o$. Принимается, что $J > 0$, — в противном случае можно было бы изменить нумерацию переменных. Якобиан представляет, как известно, отношение элементов объема среды в конечном и начальном состояниях*):

$$d\tau = J d\tau_0. \quad (1.1.6)$$

По закону сохранения массы

$$dm = \rho d\tau = \rho_0 d\tau_0, \quad (1.1.7)$$

так что

$$J = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (1.1.8)$$

Декартовы координаты a_s точки среды в ее начальном состоянии можно рассматривать как переменные, сопоставляемые этой точке и поэтому сохраняемые за нею в конечном состоянии среды; в этом состоянии им приписывается роль криволинейных координат; например, точки среды, располагавшиеся в v -объеме

*) См. также п. 5.5 гл. II.

на прямой $a_2 = a_2^0$, $a_3 = a_3^0$, параллельной оси OX_1 , в V -объеме расположатся на кривой

$$x_s = x_s(a_1, a_2^0, a_3^0).$$

По установившейся терминологии a_s называют лагранжевыми, x_s — эйлеровыми координатами. Лучше сказать, что a_s — материальные координаты, индивидуализирующие точку и отличающую ее от других точек, а x_s — координаты ее места в V -объеме.

Квадрат линейного элемента — расстояния между двумя бесконечно близкими точками M и N , — в v -объеме равен

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2, \quad (1.1.9)$$

в V -объеме, когда точки займут положения M' , N' , станет равным

$$dS^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (1.1.10)$$

В дальнейшем для сокращения речи применяются термины v -метрика и V -метрика в зависимости от того, какое определение квадрата линейного элемента — (1.1.9) или (1.1.10) — принято в данном рассмотрении. Конечно, обе метрики евклидовы (E_3).

З а м е ч а н и я. 1. Строгое различие начального и конечного состояний необходимо при рассмотрении конечных деформаций сплошной среды. В линейной теории упругости эта необходимость, как правило, отпадает.

2. Не обязательно за материальные координаты точек среды принимать их декартовы координаты a_s в начальном состоянии. Изложение основ механики сплошной среды приобретает большую стройность, если в качестве материальных координат точки принять любые криволинейные координаты q^1, q^2, q^3 — тройку чисел, сопоставляемых этой точке по некоторому закону. Тогда

$$a_s = a_s(q^1, q^2, q^3), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3), \quad (1.1.11)$$

равно как и

$$x_s = x_s(q^1, q^2, q^3), \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(q^1, q^2, q^3), \quad (1.1.12)$$

следует рассматривать как координаты места и вектор-радиус в v - и соответственно в V -объеме.

1.2. Внешние силы. В этой главе сплошная среда рассматривается в ее конечном состоянии. Действующие на нее силы подразделяются на внешние и внутренние. Внешние силы представляют воздействия на точки среды тел, не включенных в рассматриваемый объем V . Они могут быть массовыми или поверхностными.

Массовыми называют силы, действующие на каждую частицу среды. Вектор массовой силы, отнесенной к единице массы

среды, обозначается K ; тогда $\rho K d\tau$ будет силой, действующей на элементарную массу $\rho d\tau$ в объеме $d\tau$, а ρK — силой, действующей на единицу объема, объемной силой. Главный вектор и главный момент относительно начала координат массовых сил равны

$$\int \int \int_V \rho K d\tau, \quad \int \int \int_V R \times \rho K d\tau. \quad (1.2.1)$$

Простейшим примером массовой силы служит сила тяжести

$$K = -kg; \quad (1.2.2)$$

здесь k — единичный вектор восходящей вертикали, g — ускорение силы тяжести. При рассмотрении равновесия сплошной среды по отношению к движущимся осям в число массовых сил включается сила инерции переносного движения

$$K = -w_e = -[\dot{w}_0 + \dot{\omega} \times R + \omega \times (\omega \times R)], \quad (1.2.3)$$

где w_e — вектор переносного ускорения, равный геометрической сумме ускорения w_0 начала системы осей, вращательного $\dot{\omega} \times R$ и центростремительного $\omega \times (\omega \times R)$ ускорений (ω — вектор угловой скорости, $\dot{\omega}$ — углового ускорения). Ускорение Кориолиса не включено в правую часть (1.2.3), так как среда покоится относительно движущихся осей. В частном случае равномерного вращения среды вокруг неподвижной оси массовой является «центробежная сила»

$$K = -\omega \times (\omega \times R) = \omega^2 h e, \quad (1.2.4)$$

где h — радиус окружности, по которой вращается рассматриваемая частица среды, e — единичный вектор из центра этой окружности по ее радиусу. Начало вектора R взято на оси вращения.

В случае потенциальных массовых сил

$$K = -\text{grad } \Pi, \quad (1.2.5)$$

где Π — потенциальная энергия поля массовых сил. Например, для поля силы тяжести и поля центробежной силы

$$\Pi = gk \cdot R, \quad \Pi = \frac{1}{2} [(\omega \cdot R)^2 - \omega^2 R^2] = -\frac{1}{2} |\omega \times R|^2. \quad (1.2.6)$$

Внешние поверхностные силы — силы, распределенные по поверхности O объема V . Поверхностная сила, отнесенная к единице площади этой поверхности, обозначается F ; главный вектор и главный момент поверхностных сил равны

$$\int_O F dO, \quad \int_O R \times F dO. \quad (1.2.7)$$

Через dO обозначается элемент площади поверхности O в отличие от элемента площади do поверхности o , ограничивающей объем v среды в начальном состоянии. Единичный вектор нормали к площадке dO , направленный вовне V -объема, обозначается N (в отличие от n — единичного вектора нормали к do вовне v -объема); NdO называется вектором ориентированной площадки на O (ndo — на o). Нормальная компонента силы F и ее составляющая в плоскости, касательной к O , равны

$$N \cdot F, \quad F - NN \cdot F = (N \times F) \times N. \quad (1.2.8)$$

Примером поверхностной силы может служить гидростатическое давление жидкости, в которую погружено тело:

$$F = -pN. \quad (1.2.9)$$

Другой пример — распределенные по поверхности контакта реакции основания, на котором покоится тело.

Потенциальными являются поверхностные силы, сохраняющие неизменную величину и неизменное направление при деформировании тела из начального состояния в конечное. Тогда

$$\Pi = -F \cdot R = -F \cdot (r + u) = \Pi_0 - F \cdot u. \quad (1.2.10)$$

1.3. Внутренние силы в сплошной среде. Рассмотрение равновесия сплошной среды основано на двух положениях: 1) при равновесии среды в равновесии находится любая по произволу выделенная ее часть (способ сечений), 2) условия равновесия абсолютно твердого тела являются необходимыми условиями равновесия рассматриваемой части среды (принцип затвердевания).

Мысленно разделим объем V на два объема V_1 и V_2 ; поверхность раздела назовем O' , а часть O , ограничивающую V_1 , — O_1 . В число внешних сил, действующих на среду в объеме V_1 , теперь надо включить реакции на него среды в объеме V_2 . В противном случае необходимые условия равновесия внешних сил — массовых в V_1 и поверхностных сил на O_1 — не были бы, вообще говоря, соблюдены. Эти силы должны компенсироваться силами и моментами реактивных воздействий, создаваемых прилегающей к V_1 средой в V_2 -объеме и распределенных по поверхности раздела O' . Принимается, что распределение этих сил на площадке dO поверхности O' статически эквивалентно силе $t_N dO$, причем ориентация площадки задается единичным вектором нормали к ней N , направленной вовне V_1 (рис. 1).

Из сказанного следует, что, задавшись в любом месте среды ориентированной площадкой NdO , мы должны сопоставить этому вектору вектор силы $t_N dO$, с которой часть среды «над» площадкой действует на ту ее часть, откуда направлен вектор N . По принципу равенства действия и противодействия сила $t_{-N} dO$,

равной величины и противоположно направленная, будет действовать со стороны второй из упомянутых частей среды (расположенной «под» площадкой) на первую:

$$t_{-N}dO = -t_NdO. \quad (1.3.1)$$

Эти воздействия частей среды друг на друга определяют поле внутренних сил — поле напряжений в сплошной среде. Его количественные характеристики изменяются не только от точки к точке, как в скалярных полях, но и в данной точке ему нельзя сопоставить определенного направления, как в случае векторных полей. Величина, задающая поле напряжений, должна определять

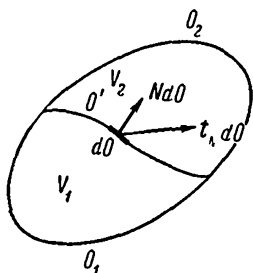


Рис. 1.

вектор t_NdO в каждой точке поля и для каждой ориентированной площадки NdO в этой точке (или вектор t_N по вектору N). Это значит, что физическое состояние, названное полем напряжений, определяется величиной, сопоставляющей одному вектору N другой t_N . Если принять, что связь между этими векторами линейна (этот вопрос рассмотрен в следующем п. 1.4), то такой величиной служит тензор второго ранга*), в данном случае тензор напряжения. Он обозначается \hat{T} , а его компоненты в декартовой системе осей $Ox_1x_2x_3$ — через t_{ik} . Вектор t_N определяется произведением \hat{T} на N слева:

$$t_N = N \cdot \hat{T}. \quad (1.3.2)$$

Запись в форме произведения на N справа изменила бы только обозначения компонент тензора \hat{T} .

З а м е ч а н и я. 1. Было предположено, что распределение сил на элементарной площадке NdO статически эквивалентно одной силе t_NdO — его главный момент относительно точки на линии действия этой силы принят равным нулю. Это предположение отброшено в разработанной в начале этого века братьями Коссеро системе механики сплошной среды. Основанием для такого, казалось бы, парадоксального представления, что моменту можно приписать такой же порядок малости (порядок dO), что и главному вектору, является, по-видимому, условность самого понятия малости в механике сплошной среды. То, что называется бесконечно малым объемом, представляет само по себе сложный объект, содержащий весьма большое число элементарных частиц, а передаваемое через площадку усилие следует трактовать как интегральный эффект взаимодействия этих частиц. Нет

*) См. определение в п. 1.3 (пункт 3 Приложения I).

ничего логически недопустимого в том, что по крайней мере в местах резкой изменчивости напряженного состояния влияние моментов может оказаться сравнимым с влиянием сил. В последние годы идеи Коссера развиваются в большом числе работ по «моментной» или «несимметричной» теории упругости.

2. Принятое предположение, что реактивное воздействие объема V_2 на V_1 может быть заменено только системой сил, распределенных по поверхности O' , обусловлено физическим представлением, что взаимодействия частиц являются силами близкодействия. В нелокальной теории упругости учитываются массовые силы взаимодействия отброшенной части тела с оставшейся.

1.4. Равновесие элементарного тетраэдра. Предположение о линейной связи векторов силы $t_N dO$ и ориентированной площадки $N dO$ заменим предположением, что эта связь задается более общим соотношением

$$t_N dO = f(N dO). \quad (1.4.1)$$

Надо доказать, что f — линейная операция над вектором $N dO$. С этой целью рассматривается равновесие выделенного из среды элементарного тетраэдра с вершиной в точке O и ребрами \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , задаваемыми векторами λe_1 , λe_2 , λe_3 , где λ — масштабный малый параметр. Направленные вовне тетраэдра векторы ориентированных площадок OAB , OBC и OCA (рис. 2) равны

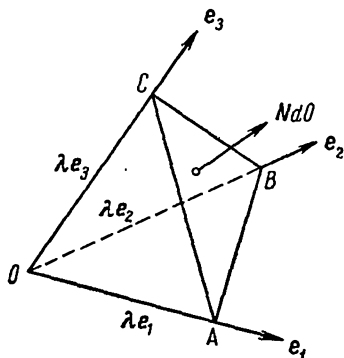


Рис. 2.

$$N_3 d\vec{O} = \frac{1}{2} \lambda^2 e_2 \times e_1, \quad N_1 d\vec{O} = \frac{1}{2} \lambda^2 e_3 \times e_2, \quad N_2 d\vec{O} = \frac{1}{2} \lambda^2 e_1 \times e_3.$$

Правая часть легко проверяемого тождества

$$e_3 \times e_2 + e_1 \times e_3 + e_2 \times e_1 = (e_3 - e_1) \times (e_2 - e_1)$$

пропорциональна и направлена противоположно вектору $N dO$ вовне тетраэдра ориентированной площадки ABC :

$$N dO = \frac{1}{2} \lambda^2 (e_2 - e_1) \times (e_3 - e_1).$$

Итак,

$$N_1 d\vec{O} + N_2 d\vec{O} + N_3 d\vec{O} = -N dO. \quad (1.4.2)$$

Выражая теперь, что главный вектор приложенных к тетраэдру поверхностных и массовых сил равен нулю, имеем

$$t_{N_1} d\vec{O}^1 + t_{N_2} d\vec{O}^2 + t_{N_3} d\vec{O}^3 + t_N d\vec{O} + \rho K d\tau = 0.$$

Последнее слагаемое пропорционально элементарному объему:

$$d\tau = \frac{1}{6} \lambda^3 \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3),$$

и оно должно быть отброшено, так как при $\lambda \rightarrow 0$ прочие слагаемые пропорциональны λ^2 . Итак,

$$-t_N d\vec{O} = t_{N_1} d\vec{O}^1 + t_{N_2} d\vec{O}^2 + t_{N_3} d\vec{O}^3. \quad (1.4.3)$$

Учитывая (1.4.2), (1.4.3), а также соотношение (1.3.1), перепишем в виде

$$f(-N d\vec{O}) = -f(N d\vec{O}), \quad (1.4.4)$$

можно равенству (1.4.1) придать теперь вид

$$f(N_1 d\vec{O}^1 + N_2 d\vec{O}^2 + N_3 d\vec{O}^3) = f(N_1 d\vec{O}^1) + f(N_2 d\vec{O}^2) + f(N_3 d\vec{O}^3),$$

чем и доказывается линейность функциональной зависимости (1.4.1). Пришли к основному для всего построения механики сплошной среды соотношению (1.3.2), дающему определение тензора напряжений \hat{T} .

В координатном представлении согласно (I.3.2) и (I.4.2) оно записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} t_{N_1} &= t_{11}N_1 + t_{21}N_2 + t_{31}N_3, \\ t_{N_2} &= t_{12}N_1 + t_{22}N_2 + t_{32}N_3, \\ t_{N_3} &= t_{13}N_1 + t_{32}N_2 + t_{33}N_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.5)$$

Полагая $N = i_1$, так что $N_1 = 1$, $N_2 = N_3 = 0$, получим вектор силы, действующей на площадку с внешней нормалью i_1 и отнесенной к единице площади. Назовем его вектором напряжения t_1 ; его проекции на оси системы $OX_1X_2X_3$, равные t_{11} , t_{12} , t_{13} , называются напряжениями: t_{11} — нормальным; t_{12} , t_{13} — касательными. Аналогично вводятся векторы напряжения t_2 , t_3 на площадках, нормальными которых служат единичные векторы координатных осей i_2 , i_3 . В матрице компонент тензора \hat{T}

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} \quad (1.4.6)$$

диагональные элементы представляют нормальные, а недиагональные — касательные напряжения. На рис. 3 изображен вы-

деленный из среды элементарный параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям, и показаны напряжения на его гранях с нормальными, сонаправленными с этими осями.

Замечания. 1. Соотношения (1.4.5), полученные рассмотрением равновесия элементарного тетраэдра (с ребрами, направленными параллельно координатным осям), впервые сформулировал Коши в 1827 г.

2. Можно лишь условно в выбранной координатной системе называть напряжения t_{sh} проекциями «вектора» t_s , так как эти величины при повороте координатной системы преобразуются как компоненты тензора, а отнюдь не компоненты вектора.

Квазивекторы i_s [см. (1.5.12)] могут быть введены в диадное представление тензора напряжений:

$$\hat{T} = i_s i_h t_{sh} = i_s t_s. \quad (1.4.7)$$

3. На рис. 3 были показаны напряжения t_{sh} на гранях с внешними нормальными, сонаправленными с координатными осями, в предположении, что $t_{sh} > 0$. Поскольку $t_{-s} = -t_s$, то на грани с нормалью $(-i_s)$ положительные t_{sh} ориентируются по направлениям $(-i_h)$. Отсюда следует, что положительные нормальные напряжения — растягивающие, а отрицательные — сжимающие; моменты положительных касательных напряжений t_{sh} на гранях i_s и $(-i_s)$ относительно оси i_r имеют знак символа Леви-Чивита e_{shr} (см. I.1.2).

4. В технической литературе по теории упругости теперь общеприняты обозначения нормальных и касательных напряжений буквами σ и τ с соответствующими индексами, так что матрица тензора \hat{T} представляется в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_x = \sigma_1 & \tau_{xy} = \tau_{12} & \tau_{xz} = \tau_{13} \\ \tau_{yx} = \tau_{21} & \sigma_y = \sigma_2 & \tau_{yz} = \tau_{23} \\ \tau_{zx} = \tau_{31} & \tau_{zy} = \tau_{32} & \sigma_z = \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (1.4.8)$$

Эти обозначения мы будем применять наряду с обозначениями (1.4.6). Существует ряд других систем обозначений, например: $\sigma_x = X_x$, $\tau_{yx} = X_y$ и т. д.

1.5. Необходимые условия равновесия сплошной среды. Выделим из среды целиком расположенный внутри нее, а в остальном произвольный объем V_* , ограниченный поверхностью O_* , не

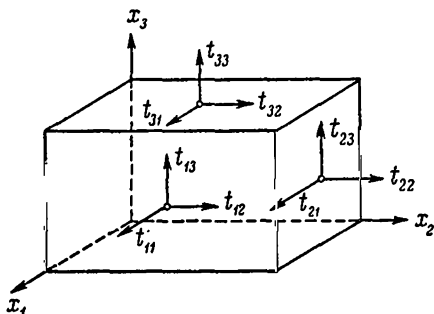


Рис. 3.

имеющей общих точек с поверхностью O объема V , равновесие которого рассматривается. Распределенные по O_* поверхностные силы, внутренние для V (внешние для V_*), обусловлены существованием в V напряженного состояния, задаваемого тензором \hat{T} . Они определяются основным соотношением (1.3.2), в котором N — единичный вектор внешней нормали к O_* .

Имеются две группы необходимых условий равновесия — уравнения равновесия в объеме V и уравнения равновесия на его поверхности O .

Уравнения равновесия в объеме выражают условия обращения в нуль главного вектора и главного момента массовых и поверхностных сил, действующих на произвольно выделенный из V объем V_* . Сославшись на (1.2.1), (1.2.7), имеем

$$\int_{V_*} \int \int \rho K d\tau + \int_{O_*} \int t_N dO = 0, \quad \int_{V_*} \int \int R \times \rho K d\tau + \int_{O_*} \int R \times t_N dO = 0$$

и после замены t_N по формуле (1.3.2)

$$\left. \begin{aligned} \int_{V_*} \int \int \rho K d\tau + \int_{O_*} \int N \cdot \hat{T} dO &= 0, \\ \int_{V_*} \int \int R \times \rho K d\tau + \int_{O_*} \int R \times N \cdot \hat{T} dO &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.1)$$

Преобразуя поверхностные интегралы в объемные [см. (II. 5.5), (II. 5.6)], получим

$$\left. \begin{aligned} \int_{O_*} \int N \cdot \hat{T} dO &= \int_{V_*} \int \int \operatorname{div} \hat{T} d\tau, \\ \int_{O_*} \int R \times N \cdot \hat{T} dO &= \int_{V_*} \int \int (R \times \operatorname{div} \hat{T} - 2\omega) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (1.5.2)$$

где ω — сопутствующий тензору \hat{T} вектор, определяемый кососимметричной частью этого тензора. Приходим к равенствам

$$\int_{V_*} \int \int (\rho K + \operatorname{div} \hat{T}) d\tau = 0, \quad \int_{V_*} \int \int [R \times (\rho K + \operatorname{div} \hat{T}) - 2\omega] d\tau = 0. \quad (1.5.3)$$

Из равенства

$$\int_{V_*} \int \int f(x_1, x_2, x_3) d\tau = 0,$$

когда V_* — произвольный объем, а f — непрерывная функция координат, следует, что $f \equiv 0$, так как, если предположить, что $f \neq 0$ в некоторой точке V_* -объема, то она сохранит по непрерывности знак в окрестности этой точки. Такую окрестность мо-

жно принять за объем V_* , а интеграл от знакопостоянной функции не может быть нулем.

Отсюда и из формулы (1.5.3)₁ следует, что

$$\operatorname{div} \hat{T} + \rho K = 0. \quad (1.5.4)$$

Это — первое уравнение равновесия сплошной среды; из него и (1.5.3)₂ следует теперь, что $\omega = 0$, а этим доказано, что тензор \hat{T} симметричный:

$$\hat{T} = \hat{T}^*. \quad (1.5.5)$$

Уравнения равновесия сплошной среды (1.5.4), (1.5.5) записаны здесь в инвариантной форме. Их запись в декартовых координатах V -объема имеет вид трех дифференциальных уравнений статики сплошной среды

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{31}}{\partial x_3} + \rho K_1 &= 0, \\ \frac{\partial t_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{32}}{\partial x_3} + \rho K_2 &= 0, \\ \frac{\partial t_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{33}}{\partial x_3} + \rho K_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5.6)$$

и трех уравнений, выражающих симметричность тензора напряжений,

$$t_{23} = t_{32}, \quad t_{31} = t_{13}, \quad t_{12} = t_{21}. \quad (1.5.7)$$

Более общее предложение, выражающее это свойство, можно, основываясь на (1.5.5) и (1.4.3), записать в виде (n_1, n_2 — произвольно ориентированные единичные векторы)

$$n_1 \cdot \hat{T} \cdot n_2 = n_2 \cdot \hat{T} \cdot n_1 \quad (1.5.8)$$

— проекция на направление n_2 вектора напряжения на площадке с нормалью n_1 равна проекции на n_1 вектора напряжения на площадке с нормалью n_2 .

Уравнения равновесия (1.5.6), (1.5.7) легко получить из наглядных представлений, выражая, что главный вектор и главный момент действующих на выделенный из среды элементарный параллелепипед поверхностных и объемных сил равен нулю.

Поверхностные силы на гранях (передней и задней), перпендикулярных оси i_1 , равны

$$\begin{aligned} t_1 \left(x_1 + \frac{1}{2} dx_1, x_2, x_3 \right) dx_2 dx_3 &= \left(t_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial t_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \\ t_{-1} \left(x_1 - \frac{1}{2} dx_1, x_2, x_3 \right) dx_2 dx_3 &= \left(t_{-1} - \frac{1}{2} \frac{\partial t_{-1}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3, \end{aligned}$$

где $t_1 = t_1(x_1, x_2, x_3)$ — значение t_1 в центре параллелепипеда. Вектор-радиусы точек приложения этих сил, взяв начало в вершине параллелепипеда, можно считать равными

$$i_1 dx_1 + \frac{1}{2} (i_2 dx_2 + i_3 dx_3) = \frac{1}{2} i_1 dx_1 + \frac{1}{2} i_2 dx_2 + \frac{1}{2} i_3 dx_3,$$

причем

$$\frac{1}{2} i_s dx_s = \frac{1}{2} (i_1 dx_1 + i_2 dx_2 + i_3 dx_3)$$

— вектор-радиус центра параллелепипеда. Подобным же образом составляются выражения сил и вектор-радиусов их точек приложения для правой и левой граней, перпендикулярных i_2 :

$$\begin{aligned} & \left(t_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial t_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1, \quad \left(t_{-2} - \frac{1}{2} \frac{\partial t_{-2}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1, \\ & \frac{1}{2} i_2 dx_2 + \frac{1}{2} i_s dx_s, \quad -\frac{1}{2} i_2 dx_2 + \frac{1}{2} i_s dx_s, \end{aligned}$$

и для верхней и нижней граней, перпендикулярных i_3 :

$$\begin{aligned} & \left(t_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial t_3}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2, \quad \left(t_{-3} - \frac{1}{2} \frac{\partial t_{-3}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2, \\ & \frac{1}{2} i_3 dx_3 + \frac{1}{2} i_s dx_s, \quad -\frac{1}{2} i_3 dx_3 + \frac{1}{2} i_s dx_s. \end{aligned}$$

Объемная сила $\rho K dx_1 dx_2 dx_3$ считается приложенной в центре параллелепипеда. Приравнивая теперь нулю главный вектор всех перечисленных сил и их главный момент относительно точки O и учитывая (1.3.1), после сокращения на $dx_1 dx_2 dx_3$ приходим к двум векторным уравнениям:

$$\frac{\partial t_1}{\partial x_1} + \frac{\partial t_2}{\partial x_2} + \frac{\partial t_3}{\partial x_3} + \rho K = 0 \quad (1.5.9)$$

$$i_1 \times t_1 + i_2 \times t_2 + i_3 \times t_3 + \frac{1}{2} i_s dx_s \times \left(\frac{\partial t_1}{\partial x_1} + \frac{\partial t_2}{\partial x_2} + \frac{\partial t_3}{\partial x_3} + \rho K \right) = 0, \quad (1.5.10)$$

причем последняя группа слагаемых в (1.5.10) отпадает по (1.5.9). Получили соотношения, представляющие иную запись уравнений (1.5.6), (1.5.7):

$$\frac{\partial t_s}{\partial x_s} + \rho K = \left(\frac{\partial t_{st}}{\partial x_s} + \rho K_t \right) i_t = 0, \quad \frac{\partial t_{st}}{\partial x_s} + \rho K_t = 0, \quad (1.5.11)$$

$$i_s \times t_s = i_s \times t_{st} i_t = e_{rst} t_{st} i_r = 0. \quad (1.5.12)$$

Три уравнения равновесия (1.5.6) содержат шесть компонент симметричного тензора напряжения. Это, конечно, только необходимые условия равновесия; получение также и достаточных условий неизбежно требует рассмотрения физической модели

среды (упругое тело, вязкая жидкость). Задача о равновесии сплошной среды статически неопределима.

Уравнения равновесия на поверхности O , ограничивающей объем V , представляют запись основного соотношения (1.3.2), в котором t_N заменено распределенной по O поверхностной силой F :

$$N \cdot \hat{T} = F. \quad (1.5.13)$$

Другие формы записи этого равенства имеют вид

$$N_1 t_1 + N_2 t_2 + N_3 t_3 = F \quad (1.5.14)$$

или же

$$\left. \begin{aligned} N_1 t_{11} + N_2 t_{21} + N_3 t_{31} &= F_1, \\ N_1 t_{12} + N_2 t_{22} + N_3 t_{32} &= F_2, \\ N_1 t_{13} + N_2 t_{23} + N_3 t_{33} &= F_3, \end{aligned} \right\} \quad (1.5.15)$$

где N_s — проекции единичного вектора N на координатные оси.

Условимся говорить, что любое частное решение уравнений равновесия в объеме и на поверхности определяет статически возможное состояние среды. Многообразие таких состояний — многообразие удовлетворяющих трем краевым условиям (1.5.15) частных решений системы трех дифференциальных уравнений в частных производных (1.5.6), содержащих шесть неизвестных. Задача статики сплошной среды состоит в определении в этом многообразии состояния, реализуемого в принятой физической модели.

1.6. Тензор функций напряжений. Уравнения равновесия сплошной среды (1.5.4) линейны относительно компонент тензора напряжений, и их решение представляется суммой какого-либо частного решения уравнения

$$\operatorname{div} \hat{T}^{(1)} + \rho K = 0 \quad (1.6.1)$$

и решения однородного уравнения

$$\operatorname{div} \hat{T}^{(2)} = 0. \quad (1.6.2)$$

Частное решение предполагается известным; оно для практически встречающихся заданий массовых сил (сила тяжести, центробежная сила) без труда находится (в линейной теории упругости при $\rho = \text{const}$). Поэтому речь будет идти об общем представлении тензора с равной нулю дивергенцией; чтобы не усложнять записей, назовем его \hat{T} , вместо $\hat{T}^{(2)}$. Такой тензор следует искать в виде (см. (II.4.16))

$$\hat{T} = \operatorname{rot} \hat{P}, \quad (1.6.3)$$

где \hat{P} — тензор второго ранга, который надо в соответствии с (1.5.5) подчинить условию

$$\operatorname{rot} \hat{P} = (\operatorname{rot} \hat{P})^*. \quad (1.6.4)$$

Сославшись на (II.4.13), можно удовлетворить этому условию, принимая

$$\hat{P} = (\operatorname{rot} \hat{\Phi})^*, \quad (1.6.5)$$

где $\hat{\Phi}$ — любой симметричный тензор второго ранга. Итак, тензор

$$\hat{T} = \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \hat{\Phi})^* = \operatorname{Ink} \hat{\Phi} \quad (1.6.6)$$

удовлетворяет поставленным условиям: он симметричен, а его дивергенция равна нулю. Симметричный тензор $\hat{\Phi}$ называется тензором функций напряжений.

Взяв тензор $\hat{\Phi}$ в диагональной форме

$$\hat{\Phi} = i_1 i_1 \Phi_{11} + i_2 i_2 \Phi_{22} + i_3 i_3 \Phi_{33}, \quad (1.6.7)$$

придем по (II.4.15) к представлению напряжений через три функции напряжений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_2^2}, & t_{12} &= t_{21} = -\frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ t_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_3^2}, & t_{23} &= t_{32} = -\frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ t_{33} &= \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_1^2}, & t_{31} &= t_{13} = -\frac{\partial^2 \Phi_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.8)$$

Представление тензора напряжений через функции напряжений Морера получим, полагая нулями диагональные компоненты

$$\hat{\Phi} = (i_1 i_2 + i_2 i_1) \Phi_{12} + (i_2 i_3 + i_3 i_2) \Phi_{23} + (i_3 i_1 + i_1 i_3) \Phi_{31}.$$

Оно имеет вид

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, & t_{23} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_1} \right), \\ t_{22} &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, & t_{31} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} \right), \\ t_{33} &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, & t_{12} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.6.9)$$

Представление напряжений через функции Максвелла неинвариантно, так как при преобразовании координат тензор, ранее диагональный, уже не останется таковым. Неинвариантно и представление Морера. Инвариантное представление тензора

напряжений (1.6.6) было независимо друг от друга дано Б. Финци (B. Finzi), Ю. А. Крутковым, и В. И. Блохом.

В плоской задаче теории упругости напряжения не зависят от координаты x_3 , а компоненты t_{23} , t_{31} тензора напряжений отсутствуют. Инвариантное относительно поворота вокруг оси OX_3 выражение тензора функций напряжений можно взять в виде

$$\hat{\Phi} = (\nu \hat{E}_2 + i_3 i_3) U(x_1, x_2), \quad \hat{E}_2 = i_1 i_1 + i_2 i_2 = \hat{E} - i_3 i_3, \quad (1.6.10)$$

где ν — постоянная. Тогда по (1.6.8)

$$t_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \quad t_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad t_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad t_{33} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right). \quad (1.6.11)$$

Функция $U(x_1, x_2)$ представляет функцию напряжений Эри (Airy); сразу легко видеть, что выражения (1.6.11) тождественно удовлетворяют однородным уравнениям равновесия плоской задачи

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial t_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} = 0.$$

Из представления (1.6.6) видно, что по заданному тензору напряжения \hat{T} тензор функции напряжений определен с точностью до слагаемого $\hat{\Phi}^{(1)}$ — симметричного тензора, операция Ink над которым равна нулю. Таким тензором, как увидим ниже, в п. 2.1 гл. II, и что легко проверить, является линейный тензор деформации над любым вектором \mathbf{a} :

$$\hat{\Phi}^{(1)} = \text{def } \mathbf{a}, \quad \text{Ink } \hat{\Phi}^{(1)} = \text{Ink def } \mathbf{a} \equiv 0. \quad (1.6.12)$$

Итак, полагая

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_* + \text{def } \mathbf{a}, \quad (1.6.13)$$

имеем

$$\hat{T} = \text{Ink } \hat{\Phi} = \text{Ink } \hat{\Phi}_*. \quad (1.6.14)$$

Следовательно, в задание $\hat{\Phi}$ входят три произвольно назначаемые функции \mathbf{a}_s ; это позволяет понять, почему шесть функций t_{sk} , связанных тремя дифференциальными уравнениями (1.5.6), оказались выраженными через шесть, а не три, функций напряжений Φ_{rk} .

§ 2. Свойства тензора напряжений

2.1. Преобразование компонент. Главные напряжения. Главные инварианты. Можно повторить применительно к тензору напряжений сказанное в Приложении I о свойствах симметричного тензора.

Закон преобразования компонент тензора напряжений при повороте декартовой системы осей дается формулами (I. 3.6). Их можно получить также, исходя из зависимости Коши (1.4.5). Совместим N с единичным вектором i'_k ; тогда $\alpha_{ks} = i'_k \cdot i_s = N_s$ и проекции на старые оси «квазивектора» t'_k — напряжения на площадке с нормалью i'_k — по (1.4.5) будут

$$t'_k \cdot i_r = t_{mr} N_m = t_{mr} \alpha_{km},$$

а на новые оси

$$t'_{ks} = \alpha_{sr} t'_k \cdot i_r = \alpha_{km} \alpha_{sr} t_{mr}. \quad (2.1.1)$$

Например,

$$t'_{11} = \alpha_{11}^2 t_{11} + \alpha_{12}^2 t_{22} + \alpha_{13}^2 t_{33} + 2(\alpha_{11} \alpha_{12} t_{12} + \alpha_{12} \alpha_{13} t_{23} + \alpha_{13} \alpha_{11} t_{31}), \quad (2.1.2)$$

$$t'_{12} = \alpha_{11} \alpha_{21} t_{11} + \alpha_{12} \alpha_{22} t_{22} + \alpha_{13} \alpha_{23} t_{33} + (\alpha_{11} \alpha_{22} + \alpha_{12} \alpha_{21}) t_{12} + \\ + (\alpha_{12} \alpha_{23} + \alpha_{13} \alpha_{22}) t_{23} + (\alpha_{13} \alpha_{21} + \alpha_{11} \alpha_{23}) t_{31}. \quad (2.1.3)$$

Легко также получить эти формулы, записав тождество

$$\hat{T} = \hat{E} \cdot \hat{T} \cdot \hat{E}$$

и представив в нем единичный тензор \hat{E} в виде

$$\hat{E} = i'_s i'_s = i'_k i'_k.$$

Снова получаем (2.1.1):

$$\hat{T} = t'_{ks} i'_k i'_s = i'_k i'_s \cdot t_{mr} i_m i_r \cdot i'_s i'_s = \alpha_{km} \alpha_{sr} t_{mr} i'_k i'_s. \quad (2.1.4)$$

Главные значения тензора напряжений, называемые главными напряжениями, равны корням t_1, t_2, t_3 его характеристического уравнения

$$P_3(t) = |t_{sk} - \delta_{sk} t| = \begin{vmatrix} t_{11} - t & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} - t & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} - t \end{vmatrix} = 0. \quad (2.1.5)$$

Главные направления — главные оси напряжений — образуют ортогональный триэдр единичных векторов e_1, e_2, e_3 ; косинусы их углов с осями координат $e_k^s = e^s \cdot i_k$ определяются системой уравнений ($r = 1, 2, 3; s = 1, 2, 3$)

$$(t_{rm} - t_s \delta_{rm}) e_m^s = 0, \quad e_1^s + e_2^s + e_3^s = 1 \quad \left(\sum_s \right)^*. \quad (2.1.6)$$

*) Не суммировать по s !

Диагональное представление тензора напряжений в главных осях записывается в виде

$$\hat{T} = t_1 \overset{11}{e}e + t_2 \overset{22}{e}e + t_3 \overset{33}{e}e, \quad (2.1.7)$$

и главные напряжения t_s на площадках с нормальными $\overset{s}{e}$ являются нормальными, а касательные напряжения на них отсутствуют. Выражения компонент тензора в системе осей i_1, i_2, i_3 через главные напряжения записываются в виде

$$t_{sk} = \alpha_{s1} \alpha_{k1} t_1 + \alpha_{s2} \alpha_{k2} t_2 + \alpha_{s3} \alpha_{k3} t_3. \quad (2.1.8)$$

Здесь $\alpha_{sm} = i_s \cdot \overset{m}{e}$, так как главные оси играют роль «старых» осей. Упрощается также запись зависимостей Коши (1.4.5):

$$t_{N1} = t_1 N_1, \quad t_{N2} = t_2 N_2, \quad t_{N3} = t_3 N_3 \\ (N_k = N \cdot \overset{k}{e}). \quad (2.1.9)$$

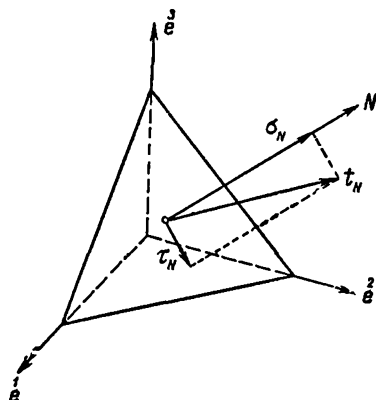


Рис. 4.

Нормальное напряжение на площадке с нормалью N по (2.1.8) выражается через главные напряжения по формуле

$$\sigma_N = N \cdot \hat{T} \cdot N = t_1 N_1^2 + t_2 N_2^2 + t_3 N_3^2, \quad (2.1.10)$$

легко получаемой по (2.1.7) или (2.1.9). Вместе с тем по (2.1.9)

$$t_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = t_1^2 N_1^2 + t_2^2 N_2^2 + t_3^2 N_3^2, \quad (2.1.11)$$

и этим определяется квадрат модуля квазивектора t_N — полного напряжения на площадке с нормалью N ; через τ_N обозначено полное касательное напряжение на этой площадке (рис. 4).

Величина σ_N представляет NN компонент тензора \hat{T} , а t_N^2 — квадрат величины вектора $N \cdot \hat{T}$. Поэтому в системе осей i_s , не являющихся главными,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_N &= N \cdot \hat{T} \cdot N = t_{st} N_s N_t, \\ t_N^2 &= N \cdot \hat{T} \cdot \hat{T} \cdot N = N \cdot \hat{T}^2 \cdot N = t_{sk} t_{kt} N_s N_t, \\ \tau_N^2 &= t_N^2 - \sigma_N^2 = N_s N_t (t_{sk} t_{kt} - N_k N_r t_{st} t_{rt}), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.12)$$

причем теперь $N_s = N \cdot i_s$.

В плоской задаче теории упругости ось OX_3 является одной из главных осей, так как $t_{23} = t_{31} = 0$; называя через φ , $\frac{\pi}{2} - \varphi$ угол оси i_1 с главными осями e_1, e_2 , имеем по (2.1.8)

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= t_1 \cos^2 \varphi + t_2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (t_1 + t_2) - \frac{1}{2} (t_2 - t_1) \cos 2\varphi, \\ t_{22} &= t_1 \sin^2 \varphi + t_2 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} (t_2 - t_1) \cos 2\varphi, \\ t_{12} &= (t_2 - t_1) \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (t_2 - t_1) \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.13)$$

Здесь повторены формулы (I.3.14). Сославшись на (1.6.11), легко теперь получить исходные соотношения плоской задачи

$$\left. \begin{aligned} t_1 + t_2 &= t_{11} + t_{22} = \nabla^2 U, \\ (t_2 - t_1) e^{2i\varphi} &= t_{22} - t_{11} + 2it_{12} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 U. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.14)$$

Формулы для главных инвариантов тензора \hat{T} , сославшись на (I.10.4) (I.10.10), (I.10.11), можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} I_1(\hat{T}) &= t_1 + t_2 + t_3 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = t_{ss}, \\ I_2(\hat{T}) &= \frac{1}{2} [(t_{ss})^2 - t_{sk} t_{ks}] = \frac{1}{2} [I_1^2(\hat{T}) - I_1(\hat{T}^2)], \\ I_3(\hat{T}) &= t_1 t_2 t_3 = |t_{sk}| = \frac{1}{6} [I_1^3(\hat{T}) - 3I_1(\hat{T}) I_1(\hat{T}^2) + 2I_1(\hat{T}^3)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.15)$$

2.2. Круги Мора. Разыскиваются площадки, на которых нормальное и полное касательное напряжения имеют заданные наперед значения σ_N и τ_N . Задача сводится к разысканию трех неизвестных N_1^2, N_2^2, N_3^2 из уравнений (2.1.10), (2.1.11), к которым добавляется уравнение

$$N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = 1.$$

Искомое решение записывается в виде

$$N_1^2 = \frac{f_1(\sigma_N, \tau_N)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}, \quad N_2^2 = \frac{f_2(\sigma_N, \tau_N)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}, \quad N_3^2 = \frac{f_3(\sigma_N, \tau_N)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}, \quad (2.2.1)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\sigma_N, \tau_N) &= \tau_N^2 + \left(\sigma_N - \frac{t_2 + t_3}{2} \right)^2 - \left(\frac{t_2 - t_3}{2} \right)^2, \\ f_2(\sigma_N, \tau_N) &= \tau_N^2 + \left(\sigma_N - \frac{t_3 + t_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{t_3 - t_1}{2} \right)^2, \\ f_3(\sigma_N, \tau_N) &= \tau_N^2 + \left(\sigma_N - \frac{t_1 + t_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{t_1 - t_2}{2} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

Условимся, что нумерация главных напряжений идет в порядке их убывания ($t_1 > t_2 > t_3$). Осуществимы, конечно, только такие σ_N , τ_N , для которых $N_s^2 > 0$. Поэтому должны иметь место неравенства

$$f_1 > 0, f_2 < 0, f_3 > 0. \quad (2.2.3)$$

Кривые C_k , на которых $f_k = 0$, в полуплоскости $\tau_N > 0$ представляют полуокружности:

$$\left. \begin{aligned} C_1 & \text{ с центром в точке } O_1 \left(\frac{t_2 + t_3}{2}, 0 \right) \text{ радиуса } \frac{t_2 - t_3}{2}, \\ C_2 & \text{ с центром в точке } O_2 \left(\frac{t_3 + t_1}{2}, 0 \right) \text{ радиуса } \frac{t_1 - t_3}{2}, \\ C_3 & \text{ с центром в точке } O_3 \left(\frac{t_1 + t_2}{2}, 0 \right) \text{ радиуса } \frac{t_1 - t_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

В центрах этих окружностей $f_k < 0$ ($k = 1, 2, 3$); поэтому $f_k > 0$ в частях полуплоскости, расположенных вне C_k , а из неравенств (2.2.3) следует, что область осуществимых σ_N , τ_N расположена вне C_3 и C_1 и внутри C_2 . Она заштрихована на рис. 5.

Вершина S_2 полуокружности C_2 соответствует максимальное полное касательное напряжение

$$\begin{aligned} (\tau_N)_{\max} &= \tau_2 = \frac{t_1 - t_3}{2} = \\ &= (\tau_N)_{S_2}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Оно реализуется на площадках с нормалью $N^{(S_2)}$:

$$N_1^{(S_2)} = \epsilon \sqrt{\frac{f_1 \left(\frac{t_1 + t_3}{2}, \tau_2 \right)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}} = \epsilon \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad N_2^{(S_2)} = 0, \quad N_3^{(S_2)} = \epsilon \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (\epsilon = \pm 1).$$

Для полных касательных напряжений, соответствующих вершинам S_3 , S_1 полуокружностей C_3 и C_1 , вводятся обозначения

$$\tau_3 = \frac{t_1 - t_2}{2} = (\tau_N)_{S_3}, \quad \tau_1 = \frac{t_2 - t_3}{2} = (\tau_N)_{S_1}. \quad (2.2.6)$$

Ориентация соответствующих им площадок определяется нормалью

$$N_1^{(S_3)} = \epsilon \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad N_2^{(S_3)} = \epsilon \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad N_3^{(S_3)} = 0.$$

$$N_1^{(S_1)} = 0, \quad N_2^{(S_1)} = \epsilon \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad N_3^{(S_1)} = \epsilon \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

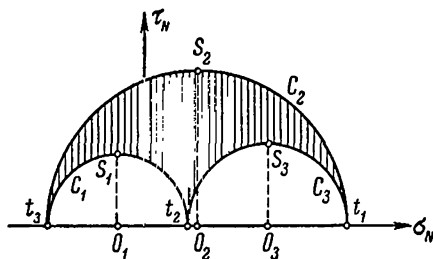


Рис. 5.

Как видно из этих формул, касательные напряжения τ_k осуществляются на площадках, проходящих через главное направление e и делящих пополам прямой угол между главными координатными плоскостями, пересекающимися по этому направлению; τ_k называются главными касательными напряжениями.

При обозначениях (2.2.5), (2.2.6) из формул (2.1.10), (2.1.11) легко находится

$$\tau_N^2 = 4(\tau_1^2 N_2^2 N_3^2 + \tau_2^2 N_3^2 N_1^2 + \tau_3^2 N_1^2 N_2^2). \quad (2.2.7)$$

В частности, на октаэдрической площадке — площадке, одинаково наклоненной к главным осям, когда $N_1^2 = N_2^2 = N_3^2 = 1/3$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_N &= \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) = \frac{1}{3} I_1(\hat{T}), \\ t_N^2 &= \frac{1}{3}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) = \frac{1}{3} I_1(\hat{T}^2), \\ \tau_N^2 &= \frac{4}{9}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.8)$$

Вместе с тем по (I. 11.6) и (I. 10.10)

$$\tau_N^2 = t_N^2 - \sigma_N^2 = \frac{1}{3} \left[I_1(\hat{T}^2) - \frac{1}{3} I_1^2(\hat{T}) \right] = -\frac{2}{3} I_2(\text{Dev } \hat{T}), \quad (2.2.9)$$

так что

$$I_2(\text{Dev } \hat{T}) = -\frac{2}{3}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2). \quad (2.2.10)$$

Впрочем, это же следует и из формулы (I. 11.8). Величина

$$\tau = \sqrt{-I_2(\text{Dev } \hat{T})} = \sqrt{\frac{2}{3}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)} \quad (2.2.11)$$

называется интенсивностью касательных напряжений. Приведенные формулы содержат истолкование механического значения инвариантов тензора напряжения.

Описанное в этом пункте построение области осуществимых σ_N , τ_N было дано О. Мором (1882). Конечно, оно применимо ко всякому симметричному тензору второго ранга \hat{Q} , причем роль σ_N , t_N^2 отходит к $N \cdot \hat{Q} \cdot N$, $N \cdot \hat{Q}^2 \cdot N$.

2.3. Разбиение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор. Тензор напряжений представляется в виде (I. 11.1):

$$\hat{T} = \frac{1}{3} I_1(\hat{T}) \hat{E} + \text{Dev } \hat{T} = \frac{1}{3} \sigma \hat{E} + \text{Dev } \hat{T}. \quad (2.3.1)$$

Здесь $\frac{1}{3} \sigma$ — среднее значение суммы трех нормальных напряжений на взаимно перпендикулярных площадках. В идеальной

жидкости или в покоящейся вязкой жидкости осуществляется напряженное состояние, в котором одинаковое давление $p = -\frac{1}{3}\sigma$ действует на произвольно ориентированных площадках. Такое «гидростатическое» напряженное состояние соответствует шаровой части тензора напряжений; его девиатором характеризуется уклонение напряженного состояния от гидростатического.

2.4. Примеры напряженных состояний. 1°. В напряженном состоянии чистого сдвига отсутствуют напряжения на площадках, перпендикулярных i_3 , а также напряжения t_{11} , t_{22} . Тензор \hat{T} задается равенством

$$\hat{T} = (i_1 i_2 + i_2 i_1) t_{12}, \quad (2.4.1)$$

и его характеристическое уравнение (2.1.5) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -t & t_{12} & 0 \\ t_{21} & -t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = -t(t^2 - t_{12}^2) = 0.$$

Главные напряжения равны

$$t_1 = t_{12}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = -t_{12}. \quad (2.4.2)$$

Система уравнений (2.1.6), определяющих главную ось напряжения e , будет

$$-t_{12} e_1 + t_{12} e_2 = 0, \quad t_{21} e_1 - t_{12} e_2 = 0, \quad -t_{12} e_3 = 0, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1.$$

Одно из них должно быть следствием прочих, в данном случае второе повторяет первое. Получаем

$$e_1 = e_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_3 = 0$$

и аналогично найдем

$$e_1^2 = e_2^2 = 0, \quad e_3^2 = \pm 1, \quad e_1 = -e_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_3 = 0.$$

Главные оси e , e имеют показанные на рис. 6 направления диагоналей квадрата, а главная ось e направлена по i_3 , что, впрочем, следовало из задания тензора.

Расположение кругов Мора показано на том же рис. 6. Главные касательные напряжения и интенсивность касательных напряжений равны

$$\tau_1 = \tau_3 = \frac{1}{2} t_{12}, \quad \tau_2 = t_{12}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{3} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)} = t_{12}.$$

Этим объясняется выбор множителя $2/3$ в определении (2.2.11) величины τ . Шаровая часть \hat{T} в случае чистого сдвига отсут-

ствуется, равно как и нормальные напряжения на октаэдрических площадках, полное касательное напряжение на них равно $\sqrt{\frac{2}{3}} t_{12}$.

Описанное здесь состояние чистого сдвига не сопровождается в изотропной нелинейно-упругой среде деформацией простого сдвига (см. п. 6.3 гл. II). Реализация последней требует приложения также нормальных напряжений.

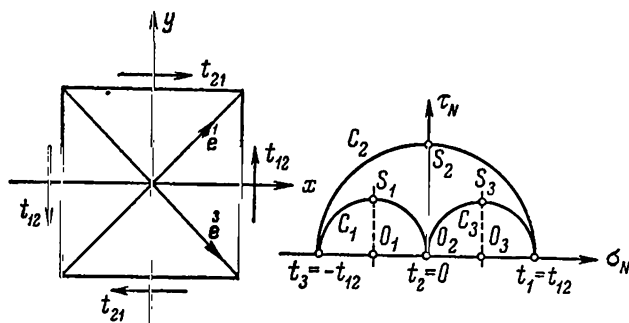


Рис. 6.

2°. В подвергающемся кручению вокруг его оси i_3 линейно-упругом стержне возникает напряженное состояние, определяемое тензором

$$T = t_{31}(i_3 i_1 + i_1 i_3) + t_{23}(i_2 i_3 + i_3 i_2). \quad (2.4.3)$$

Инварианты этого тензора равны

$$I_1(\hat{T}) = 0, \quad I_2(\hat{T}) = -(t_{31}^2 + t_{23}^2), \quad I_3(\hat{T}) = 0, \quad (2.4.4)$$

и его характеристическое уравнение по (I. 10.3) будет

$$-t^3 + t(t_{31}^2 + t_{23}^2) = 0.$$

Главные напряжения оказываются равными

$$t_1 = \sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = -\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2},$$

а направления главных осей задаются таблицей косинусов

	i_1	i_2	i_3
$\begin{smallmatrix} 1 \\ e \end{smallmatrix}$	$\frac{e}{\sqrt{2}} \cos \alpha$	$\frac{e}{\sqrt{2}} \sin \alpha$	$\frac{e}{\sqrt{2}}$
$\begin{smallmatrix} 2 \\ e \end{smallmatrix}$	$-e \sin \alpha$	$e \cos \alpha$	0
$\begin{smallmatrix} 3 \\ e \end{smallmatrix}$	$-\frac{e}{\sqrt{2}} \cos \alpha$	$-\frac{e}{\sqrt{2}} \sin \alpha$	$\frac{e}{\sqrt{2}}$

где $\cos \alpha = t_{31}/t_1$, $\sin \alpha = t_{23}/t_1$. Напряженное состояние по граням параллелепипеда с ребрами, имеющими направления i_3 , главной оси e и перпендикуляр к ней m в плоскости i_1, i_2 ,

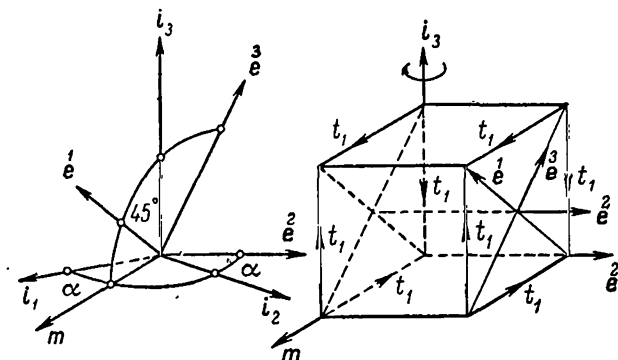


Рис. 7.

представляет чистый сдвиг интенсивности $\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2}$ (рис. 7). В этих осях выражение тензора записывается в виде

$$\hat{T} = \sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2} (mi_3 + i_3m).$$

3°. Тензор одинаковых касательных напряжений задается равенствами

$$t_{ik} = \tau_0 \quad (i \neq k), \quad t_{11} = t_{22} = t_{33} = 0. \quad (2.4.5)$$

Его инварианты равны

$$I_1(\hat{T}) = 0, \quad I_2(\hat{T}) = -3\tau_0^2, \quad I_3(\hat{T}) = 2\tau_0^3,$$

и главные напряжения, определяемые корнями кубического уравнения

$$-t^3 + 3\tau_0^2 t + 2\tau_0^3 = 0,$$

оказываются равными

$$t_1 = 2\tau_0, \quad t_2 = t_3 = -\tau_0.$$

Направление первой главной оси определяется вектором нормали октаэдрической площадки

$$e = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (i_1 + i_2 + i_3),$$

а главные оси e, e расположены в плоскости, перпендикулярной e , и определены с точностью до поворота вокруг этой оси. По (1.9.14) тензор представим в виде

$$\hat{T} = \tau_0 (3e e - E).$$

Цилиндр, ось которого имеет направление \mathbf{e} , подвергается растягивающему напряжению $2\tau_0$ вдоль оси и сжимающему τ_0 по боковой поверхности.

4°. Электростатическая система напряжений Максвелла задается тензором

$$\hat{T} = \frac{kg}{4\pi} \left(\mathbf{\mathcal{E}}\mathbf{\mathcal{E}} - \frac{1}{2} \hat{E} \mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{\mathcal{E}} \right), \quad (2.4.6)$$

в котором g — плотность свободных зарядов, k — диэлектрическая постоянная (предполагается, что она не зависит от g), $\mathbf{\mathcal{E}}$ — вектор напряженности электростатического поля. Оно возникает в поле объемных сил, действующих на диэлектрик:

$$\rho \mathbf{K} = -\operatorname{div} \hat{T} = -\frac{kg}{4\pi} \operatorname{div} \left(\mathbf{\mathcal{E}}\mathbf{\mathcal{E}} - \frac{1}{2} \hat{E} \mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{\mathcal{E}} \right).$$

Учитывая соотношения

$$\operatorname{div} \mathbf{\mathcal{E}}\mathbf{\mathcal{E}} = \mathbf{\mathcal{E}} \operatorname{div} \mathbf{\mathcal{E}} - \mathbf{\mathcal{E}} \times \operatorname{rot} \mathbf{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{\mathcal{E}}, \quad \mathbf{\mathcal{E}} = \operatorname{grad} V, \quad \operatorname{rot} \mathbf{\mathcal{E}} = 0,$$

где V — потенциал поля, имеем

$$\rho \mathbf{K} = -\frac{kg}{4\pi} \mathbf{\mathcal{E}} \operatorname{div} \mathbf{\mathcal{E}}. \quad (2.4.7)$$

Главные оси и главные напряжения находим почти без вычисления. По определению главных осей (I.9.1)

$$\frac{kg}{4\pi} \left(\mathbf{\mathcal{E}}\mathbf{\mathcal{E}} - \frac{1}{2} \hat{E} \mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{\mathcal{E}} \right) \cdot \mathbf{e} = t \mathbf{e},$$

и сразу видно, что можно удовлетворить этому уравнению, приняв

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{\mathcal{E}}}{|\mathbf{\mathcal{E}}|}, \quad t = \frac{kg}{8\pi} \mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{\mathcal{E}} = t_1. \quad (2.4.8)$$

Остающиеся решения получим, задавая единичному вектору \mathbf{e} произвольные направления в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{\mathcal{E}}$:

$$\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{\mathcal{E}} = 0, \quad \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{\mathcal{E}} = 0, \quad t_2 = t_3 = -\frac{kg}{8\pi} \mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{\mathcal{E}}. \quad (2.4.9)$$

По направлению поля действуют растягивающие напряжения, а в поперечных направлениях равные им по величине сжимающие напряжения.

5°. Сосуд под равномерным давлением. Напряженное состояние, определяемое шаровым тензором

$$\hat{T} = -p \hat{E}, \quad (2.4.10)$$

является статически возможным в сосуде, подверженном извне и изнутри одинаковому давлению; это следует из того, что при

таком задании тензора напряжения и при отсутствии объемных сил удовлетворяется уравнение равновесия в объеме (1.5.4), а на любой поверхности выполняется условие

$$\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{T}} = -p\mathbf{N},$$

что и требуется. Это статически возможное состояние действительно реализуется в линейно-упругом теле.

§ 3. Материальные координаты *)

3.1. Представление тензора напряжений. В §§ 1, 2 этой главы тензор напряжений $\hat{\mathbf{T}}$ задавался в деформированной среде (в V -объеме) его компонентами, далее обозначаемыми $t_{(sk)}$, в декартовой системе координат $OX_1X_2X_3$. Переходу к материальным координатам q^s и к векторному базису \mathbf{R}_s соответствуют диадные представления тензора

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{t}^{sk} \mathbf{R}_s \mathbf{R}_k = \hat{t}_k^s \mathbf{R}_s \mathbf{R}^k \quad (3.1.1)$$

через его контравариантные \hat{t}^{sk} или смешанные компоненты \hat{t}_k^s (ковариантные компоненты тензора напряжений обычно не применяются). Вместе с тем

$$\hat{\mathbf{T}} = t_{(mn)} \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n,$$

и из сопоставления этих выражений, сославшись на (3.1.6), (3.1.18) гл. II, получаем формулы связи

$$t_{(mn)} = \hat{t}^{rt} \frac{\partial x_m}{\partial q^r} \frac{\partial x_n}{\partial q^t} = \hat{t}_t^r \frac{\partial x_m}{\partial q^r} \frac{\partial q^t}{\partial x_n}, \quad (3.1.2)$$

$$\hat{t}^{rt} = t_{(mn)} \frac{\partial q^r}{\partial x_m} \frac{\partial q^t}{\partial x_n}, \quad \hat{t}_t^r = t_{(mn)} \frac{\partial q^r}{\partial x_m} \frac{\partial x_n}{\partial q^t}. \quad (3.1.3)$$

3.2. Зависимости Коши. Исходное определение тензора напряжения (1.3.2) записывается в виде

$$\overset{(N)}{\mathbf{t}} = \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{T}} = \hat{t}^{qs} \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{N}}_q, \quad \tilde{\mathbf{N}}_q = \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}_q. \quad (3.2.1)$$

Отсюда имеем

$$\overset{(N)}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{R}^k = \overset{(N)}{t}^k = \hat{t}^{qk} \tilde{\mathbf{N}}_q, \quad \overset{(N)}{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{R}_k = \overset{(N)}{t}_k = \hat{t}_k^q \tilde{\mathbf{N}}_q. \quad (3.2.2)$$

Это — зависимости Коши (1.4.5), выражающие контра- и ковариантные компоненты в базисах V -объема вектора напряжения

*) Изучение этого параграфа предполагает знакомство с содержанием §§ 3—5 гл. II.

$\overset{(N)}{t}$ на площадке с нормалью N через компоненты (контравариантные и смешанные) тензора напряжения. Сила, действующая на эту площадку, по (3.5.2) гл. II представляется выражением

$$\overset{N}{t} dO = \sqrt{\frac{G}{g}} \overset{q}{t}{}^{qs} R_s r_q \cdot n dO. \quad (3.2.3)$$

3.3. Необходимые условия равновесия. Инвариантная запись уравнений статики в объеме была представлена в п. 1.5 двумя соотношениями:

$$\widetilde{\text{div}} \hat{T} + \rho K = 0, \quad \hat{T} = \hat{T}^*. \quad (3.3.1)$$

Знак тильды, как условлено в п. 3.1 гл. II, обозначает, что операция дивергенции вычисляется в базисе V -объема. В этом базисе по (V.4.7) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{G} \overset{st}{t} R_t + \rho K = 0. \quad (3.3.2)$$

По закону сохранения массы и по (5.5.1) гл. II

$$\rho d\tau = \rho_0 d\tau_0, \quad \rho \sqrt{G} = \rho_0 \sqrt{g},$$

и другой записью уравнения статики в объеме может служить

$$\frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{G} \overset{st}{t} R_t + \rho_0 \sqrt{g} K = 0. \quad (3.3.3)$$

Сославшись на правило дифференцирования базисных векторов (V.2.2), можно представить вектор в левой части этого равенства через его контравариантные компоненты в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{G} \overset{sq}{t} + \left\{ \overset{q}{ts} \right\} \sqrt{G} \overset{st}{t} + \rho_0 \sqrt{g} \tilde{K}^q = 0. \quad (3.3.4)$$

Условие симметричности тензора \hat{T} через его контравариантные компоненты и смешанные компоненты записывается в обычном виде:

$$\overset{sk}{t} = \overset{ks}{t}, \quad \overset{s}{t}_{\cdot k} = \overset{s}{t}_k{}^{\cdot} = \overset{s}{t}_k. \quad (3.3.5)$$

Это следует из соотношений (IV.5.5) и, конечно, подтверждается формулами преобразования (3.1.3).

Уравнение равновесия (3.3.3) легко получить из наглядных представлений; рассматривается элементарное тело (параллелепипед), ограниченное поверхностями q^s и $q^s + dq^s$ ($s = 1, 2, 3$). По (3.2.3) и (3.5.3) гл. II силы, действующей по этим

поверхностям, представляется выражениями

$$\begin{aligned} & -\sqrt{G} \tilde{t}^{1t} R_t dq^2 dq^3, \quad \sqrt{G} \tilde{t}^{1t} R_t dq^2 dq^3 + \frac{\partial}{\partial q^1} \sqrt{G} \tilde{t}^{1t} R_t dq^1 dq^2 dq^3, \\ & -\sqrt{G} \tilde{t}^{2t} R_t dq^3 dq^1, \quad \sqrt{G} \tilde{t}^{2t} R_t dq^3 dq^1 + \frac{\partial}{\partial q^2} \sqrt{G} \tilde{t}^{2t} R_t dq^2 dq^3 dq^1, \\ & -\sqrt{G} \tilde{t}^{3t} R_t dq^1 dq^2, \quad \sqrt{G} \tilde{t}^{3t} R_t dq^1 dq^2 + \frac{\partial}{\partial q^3} \sqrt{G} \tilde{t}^{3t} R_t dq^3 dq^1 dq^2, \end{aligned}$$

так как на площадке, определяемой, например, векторами $R_2 dq^2, R_3 dq^3$

$$NdO = R_2 \times R_3 dq^2 dq^3 = \sqrt{G} R^1 dq^2 dq^3, \quad NdO \cdot \hat{T} = \sqrt{G} \tilde{t}^{1t} R_t dq^2 dq^3.$$

Массовая сила, действующая на рассматриваемый объем, равна

$$K dm = K \rho d\tau = K \rho_0 d\tau_0 = K \rho_0 \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3.$$

Уравнение (3.3.3) выражает равенство нулю главного вектора перечисленных здесь сил. Уравнение равновесия на поверхности O , ограничивающей объем V , выражает равенство вектора \hat{t} , определяемого по тензору напряжения основным соотношением (3.2.1), вектору внешней поверхностной силы F . Сославшись на (3.5.5) и (3.2.2) гл. II, имеем

$$F = N \cdot \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{n \cdot \hat{G} \times^{-1} \cdot n}} R^m n_m \cdot \tilde{t}^{st} R_s R_t,$$

или

$$F \sqrt{G^{sk} n_s n_k} = \tilde{t}^{mt} n_m R_t. \quad (3.3.6)$$

Запись через контравариантные компоненты поверхностной силы имеет вид

$$\tilde{t}^{mt} n_m = \tilde{F}^t \sqrt{G^{sk} n_s n_k}, \quad (3.3.7)$$

что, можно было бы записать и в форме

$$\tilde{F}^k = \tilde{t}^{qk} \tilde{N}_q, \quad \tilde{F}_k = \tilde{t}_k^q \tilde{N}_q, \quad (3.3.8)$$

но запись (3.3.7) имеет то преимущество, что в ней используется вектор нормали n к обычно наперед заданной поверхности O , ограничивающей v -объем, тогда как поверхность V -объема O разыскивается.

3.4. Другое определение тензора напряжений. Треффтц, Гамель. Каппус и другие авторы называют тензором напряжения ${}_0\hat{T}$ тензор, связанный с ранее введенным тензором \hat{T} соотношением

$${}_0\hat{T} = \sqrt{\frac{\bar{G}}{g}} \hat{T} = \sqrt{\frac{\bar{G}}{g}} \tilde{t}^{sq} R_s R_q = {}_0\tilde{t}^{sq} R_s R_q. \quad (3.4.1)$$

Тогда по (3.2.3)

$$\overset{(N)}{t} \frac{dO}{do} = {}_0\tilde{t}^{sq} R_s n_q = \overset{(N)}{t}, \quad (3.4.2)$$

где $\overset{(N)}{t}$ — вектор напряжений на ориентированной площадке $N dO$ в V -объеме, но рассчитанный на единицу площади, которую эта площадка имела в начальном состоянии (в v -объеме).

Уравнения равновесия в объеме и на поверхности приобретают вид

$$\frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{g} {}_0\tilde{t}^{st} R_t + \rho_0 \sqrt{g} K = 0, \quad (3.4.3)$$

$$\tilde{P}^s = {}_0\tilde{t}^{sq} n_q. \quad (3.4.4)$$

Здесь P — внешняя поверхностная сила, отнесенная к единице площади поверхности O тела в v -объеме:

$$P do = F dO. \quad (3.4.5)$$

3.5. Элементарная работа внешних сил. Рассматривается состояние равновесия среды в V -объеме, ограниченном поверхностью O и подверженном действию массовых K и поверхностных сил F . Согласно принципу виртуальных перемещений элементарная работы всех внешних и внутренних сил на виртуальном перемещении точек сплошной среды из ее равновесного состояния равна нулю:

$$\delta' a_{(e)} + \delta' a_{(i)} = 0. \quad (3.5.1)$$

Поле виртуальных перемещений задается вектором

$$\delta u = \delta(R - r) = \delta R, \quad (3.5.2)$$

так как в виртуальном перемещении из положения равновесия в V -объеме вектор r , индивидуализирующий рассматриваемую частицу в v -объеме, сохраняет неизменное значение ($\delta r = 0$).

Выражение элементарной работы внешних сил представляется в виде

$$\delta' a_{(e)} = \int \int \int_V \rho K \cdot \delta u d\tau + \int \int_O F \cdot \delta u dO. \quad (3.5.3)$$

Заменив во втором слагаемом поверхностную силу ее значением и используя правила преобразования поверхностного интеграла в объемный (II.5.5) и тождество (II.3.10), имеем по (II.3.11) и (1.5.5)

$$\begin{aligned} \int \int_O F \cdot \delta u dO &= \int \int_O N \cdot \hat{T} \cdot \delta u dO = \int \int \int_V \tilde{\nabla} \cdot \hat{T} \cdot \delta u d\tau = \\ &= \int \int \int_V [(\tilde{\nabla} \cdot \hat{T}) \cdot \delta u + \hat{T} \cdot \tilde{\nabla} \delta u] d\tau \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

и возвращаясь к (3.5.3), (3.5.2), получим

$$\delta' a_{(e)} = \int \int_V (\rho \mathbf{K} + \tilde{\text{div}} \hat{T}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\tau + \int \int_V \hat{T} \cdot \tilde{\nabla} \delta \mathbf{R} \, d\tau.$$

Вместе с тем по определению (V.4.3) набла-оператора в метрике V -объема

$$\tilde{\nabla} \delta \mathbf{R} = \mathbf{R}^s \frac{\partial}{\partial q^s} \delta \mathbf{R} = \mathbf{R}^s \delta \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^s} = \mathbf{R}^s \delta \mathbf{R}_s,$$

и, учитывая симметрию тензора \hat{T} , имеем

$$\begin{aligned} \hat{T} \cdot \mathbf{R}^s \delta \mathbf{R}_s &= \hat{T}^{qt} \mathbf{R}_q \mathbf{R}_t \cdot \mathbf{R}^s \delta \mathbf{R}_s = \hat{T}^{qs} \mathbf{R}_q \cdot \delta \mathbf{R}_s = \\ &= \frac{1}{2} (\hat{T}^{qs} \mathbf{R}_q \cdot \delta \mathbf{R}_s + \hat{T}^{sq} \mathbf{R}_s \cdot \delta \mathbf{R}_q) = \frac{1}{2} \hat{T}^{qs} \delta \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{R}_q. \end{aligned}$$

Теперь, сославшись на (3.3.1) и на (3.3.3) гл. II, приходим к соотношению

$$\delta' a_{(e)} = \frac{1}{2} \int \int_V \hat{T}^{sq} \delta G_{sq} \, d\tau = \frac{1}{2} \int \int_V \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{T}^{sq} \delta G_{sq} \, d\tau_0. \quad (3.5.5)$$

Но по (3.6.3) гл. II

$$\frac{1}{2} G_{sq} = \frac{1}{2} g_{sq} + \mathcal{E}_{sq}, \quad \delta \frac{1}{2} G_{sq} = \delta \mathcal{E}_{sq},$$

так как тензор \hat{g} при варьировании в V -объеме остается неизменным. Это позволяет переписать (3.5.5), (3.5.1) в виде

$$\delta' a_{(e)} = - \delta' a_{(i)} = \int \int_V \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{T}^{sq} \delta \mathcal{E}_{sq} \, d\tau_0. \quad (3.5.6)$$

В рассмотрение еще вводится элементарная работа сил, отнесенных к единице объема среды в начальном ее состоянии (в v -объеме), — удельная элементарная работа

$$\delta' a_{(e)} = \int \int_V \delta' A_{(e)} \, d\tau_0, \quad \delta' a_{(i)} = \int \int_V \delta' A_{(i)} \, d\tau_0. \quad (3.5.7)$$

Тогда по (3.5.6) и вследствие произвольности выбора объема V

$$\delta' A_{(e)} = - \delta' A_{(i)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{T}^{sq} \delta G_{sq} = \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{T}^{sq} \delta \mathcal{E}_{sq}. \quad (3.5.8)$$

Это выражение можно получить и более наглядным путем, вычислив элементарную работу перечисленных в п. 3.3 сил, действующих в V -объеме на элементарное тело, ограниченное поверхностями q^s и $q^s + \delta q^s$; при этом надо иметь в виду, что

виртуальные перемещения точек противоположных граней отличаются вектором

$$\frac{\partial \delta u}{\partial q^s} dq^s = \frac{\partial \delta R}{\partial q^s} dq^s = \delta R_s dq^s.$$

В частном случае, когда \hat{T} — шаровой тензор, описывающий гидростатическое напряженное состояние (всестороннее равномерное сжатие) интенсивности — p , имеем

$$\hat{T} = -p\hat{G}, \quad \hat{T}^{sq} = -pG^{sq} \quad (3.5.9)$$

и, далее, сославшись на (1.7.9),

$$\begin{aligned} \delta' A_{(i)} &= -\frac{1}{2} p \sqrt{\frac{G}{g}} G^{sq} \delta G_{sq} = -\frac{1}{2} p \frac{1}{\sqrt{gG}} \frac{\partial G}{\partial G_{sq}} \delta G_{sq} = \\ &= -p \frac{\partial}{\partial G_{sq}} \sqrt{\frac{G}{g}} \delta G_{sq}, \end{aligned}$$

или

$$\delta' A_{(i)} = -p \delta \sqrt{\frac{G}{g}} = -p \delta D. \quad (3.5.10)$$

Здесь по (5.5.1) гл. II через D обозначено относительное изменение объема. Пришли к результату, который можно было предвидеть.

З а м е ч а н и я. 1. Виртуальными в объеме V сплошной среды являются произвольные бесконечно малые перемещения, не нарушающие ее сплошности, а на ограничивающей ее поверхности O — такие, которые согласуются с наложенными связями. Поэтому на части O_1 поверхности, на которой перемещения заданы,

$$\delta u = 0. \quad (3.5.11)$$

Поверхностные силы F на O_1 наперед неизвестны. Это силы реакций тех приспособлений, которые сообщают точкам O_1 заданные перемещения u (например, реакции неподвижных опор, если $u = 0$). Но это не препятствует записи выражения элементарной работы поверхностных сил в форме

$$\int \int_O F \cdot \delta u dO = \int \int_O N \cdot \hat{T} \cdot \delta u dO,$$

так как на O_1 выполнено условие (3.5.11).

2. Знак δ' в выражениях элементарной работы и удельной элементарной работы применен для обозначения бесконечно малых величин, а введением штриха указывается, что эти величины не являются, вообще говоря, вариациями некоторых функций. Не существует величины $A_{(e)}$ (или $A_{(i)}$), вариация которой равна удельной работе внешних (или внутренних) сил.

3.6. Энергетический тензор напряжений. Мера деформации определялась в базисе v -объема формулами (3.3.2), (3.3.3) гл. II:

$$\hat{G}^\times = G_{sq} r^s r^q,$$

так что

$$\delta \hat{G}^\times = r^s r^q \delta G_{sq}. \quad (3.6.1)$$

Тензор же напряжений \hat{T} представляется в базисе V -объема через его контравариантные компоненты выражением (3.1.1). Поэтому

$$\delta' A_{(e)} \neq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{T} \cdot \cdot \delta \hat{G}^\times, \quad (3.6.2)$$

то есть удельная элементарная работа внешних сил не выражается через свертку (первый инвариант произведения) тензоров напряжения \hat{T} и вариации первой меры деформации $\delta \hat{G}^\times$.

Введем поэтому в рассмотрение тензор

$$\hat{Q} = t^{st} r_s r_t = \tilde{t}^{st} r_s r_t, \quad (3.6.3)$$

контравариантные компоненты которого в базисе v -объема равны контравариантным компонентам \tilde{t}^{st} тензора напряжений в базисе V -объема. Тогда

$$\hat{Q} \cdot \cdot \delta \hat{G}^\times = \tilde{t}^{sq} r_s r_q \cdot \cdot r^m r^n \delta G_{mn} = \tilde{t}^{sq} \delta G_{sq}$$

и, далее,

$$\delta' A_{(e)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{Q} \cdot \cdot \delta \hat{G}^\times = \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{Q} \cdot \cdot \delta \mathcal{E}. \quad (3.6.4)$$

Здесь удельная элементарная работа представлена сверткой тензора \hat{Q} , называемого поэтому энергетическим тензором напряжений, с вариацией первой меры деформации.

Связь тензоров \hat{T} и \hat{Q} может быть представлена и в инвариантном виде. Сославшись на формулы (3.2.3) гл. II, имеем

$$(\nabla R)^* = R_s r^s, \quad R_s = (\nabla R)^* \cdot r_s = r_s \cdot \nabla R$$

и поэтому

$$\hat{T} = R_s \tilde{t}^{sq} R_q = (\nabla R)^* \cdot r_s \tilde{t}^{sq} r_q \cdot \nabla R$$

и по (3.6.3), а также (3.2.6) гл. II

$$\hat{T} = (\nabla R)^* \cdot \hat{Q} \cdot \nabla R, \quad \hat{Q} = (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \hat{T} \cdot \tilde{\nabla} r. \quad (3.6.5)$$

Заметим, что в уравнения статики в объеме (3.3.3) и на поверхности (3.3.8) входят компоненты \tilde{t}^{sq} тензора \hat{T} , являющиеся

одновременно и компонентами (в другой метрике) тензора \hat{Q} . Но, конечно, было бы ошибкой записывать эти уравнения в виде

$$\operatorname{div} \hat{Q} + \rho \sqrt{G} K = 0, \quad F = N \cdot \hat{Q}.$$

Представим тензоры \hat{Q} и $\delta \hat{\mathcal{E}}$ их разбиениями на шаровые и девиаторные части:

$$\hat{Q} = \frac{1}{3} \hat{g} I_1(\hat{Q}) + \operatorname{Dev} \hat{Q},$$

$$\delta \hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{3} \hat{g} I_1(\delta \hat{\mathcal{E}}) + \operatorname{Dev} \delta \hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{3} \hat{g} \delta I_1(\hat{\mathcal{E}}) + \delta \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}}.$$

Тогда по (3.6.4) выражение удельной элементарной работы представится в виде

$$\delta' A_{(e)} = \sqrt{\frac{G}{g}} \left(\frac{1}{3} \hat{g} I_1(\hat{Q}) + \operatorname{Dev} \hat{Q} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \hat{g} \delta I_1(\hat{\mathcal{E}}) + \delta \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}} \right),$$

так что, имея в виду соотношения (\hat{g} — единичный тензор в ν -метрике)

$$\hat{g} \cdot \hat{g} = I_1(\hat{g} \cdot \hat{g}) = I_1(\hat{g}) = 3,$$

$$\hat{g} \cdot \delta \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}} = I_1(\hat{g} \cdot \delta \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}}) = \delta I_1(\operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}}) = 0,$$

$$\operatorname{Dev} \hat{Q} \cdot \hat{g} = 0,$$

$$\operatorname{Dev} \hat{Q} \cdot \delta \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}} = I_1(\operatorname{Dev} \hat{Q} \cdot \delta \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}}),$$

получим представление удельной элементарной работы суммой двух слагаемых:

$$\delta A_{(e)} = \sqrt{\frac{G}{g}} \left[\frac{1}{3} I_1(\hat{Q}) \delta I_1(\hat{\mathcal{E}}) + I_1(\operatorname{Dev} \hat{Q} \cdot \delta \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}}) \right]. \quad (3.6.6)$$

В линейной теории упругости первое называют удельной элементарной работой изменения объема, второе — изменения формы. В нелинейной теории такая интерпретация не имеет места.

3.7. Инварианты тензора напряжений. Сославшись на (IV.7.5), (IV.7.6), в V -объеме имеем

$$I_1(\hat{T}) = G_{st} \hat{T}^{st}, \quad I_3(\hat{T}) = G | \hat{T}^{st} |. \quad (3.7.1)$$

Далее, переходя в формуле (IV.7.11) к смешанным, а потом к контравариантным компонентам \hat{T} , получаем

$$\begin{aligned} I_2(\hat{T}) &= \frac{1}{2} (\hat{T}_s^s \hat{T}_r^r - \hat{T}_r^s \hat{T}_s^r) = \frac{1}{2} G_{sq} G_{rt} (\hat{T}^{sq} \hat{T}^{rt} - \hat{T}^{rq} \hat{T}^{st}) = \\ &= \frac{1}{2} \hat{T}^{sq} \hat{T}^{rt} (G_{sq} G_{rt} - G_{rq} G_{st}). \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Вместе с тем

$$\begin{aligned} G_{sq}G_{rt} - G_{rq}G_{st} &= (\mathbf{R}_s \cdot \mathbf{R}_q \mathbf{R}_r - \mathbf{R}_r \cdot \mathbf{R}_q \mathbf{R}_s) \cdot \mathbf{R}_t = [(\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_r) \times \mathbf{R}_q] \cdot \mathbf{R}_t = \\ &= (\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_r) \cdot (\mathbf{R}_q \times \mathbf{R}_t) = \epsilon_{srm} \epsilon_{qtn} \mathbf{R}^m \cdot \mathbf{R}^n = G^{mn} G e_{srm} e_{qtn} \end{aligned}$$

и еще одним представлением $I_2(\hat{T})$ служит

$$I_2(\hat{T}) = \frac{1}{2} G G^{mn} e_{srm} e_{qtn} \hat{T}^{sq} \hat{T}^{rt}. \quad (3.7.3)$$

§ 4. Интегральные оценки напряженного состояния *)

4.1. Моменты функции. Условимся называть моменты n -го порядка функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной в V -объеме, интегралы

$$\int \int \int_V f(x_1, x_2, x_3) x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} d\tau, \quad d\tau = dx_1 dx_2 dx_3, \quad (4.1.1)$$

где s_1, s_2, s_3 — неотрицательные целые числа, сумма которых

$$s_1 + s_2 + s_3 = n. \quad (4.1.2)$$

При $s_1 = 0$ имеется $n + 1$ чисел (s_2, s_3) с суммой n , при $s_1 = 1$ число чисел (s_2, s_3) с суммой $n - 1$ равно n и т. д. Поэтому общее число N моментов n -го порядка равно

$$N = (n + 1) + n + \dots + 1 = \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2). \quad (4.1.3)$$

4.2. Моменты компонент тензора напряжений. Уравнения равновесия в объеме (1.5.6) позволяют записать $3N$ соотношений

$$\int \int \int_V x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \left(\frac{\partial t_{1t}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{2t}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{3t}}{\partial x_3} \right) d\tau + \int \int \int_V x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \rho K_t d\tau = 0.$$

Первое слагаемое преобразуется по формуле Гаусса — Остроградского

$$\begin{aligned} \int \int \int_V x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \frac{\partial t_{kt}}{\partial x_k} d\tau &= \\ &= \int \int \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} t_{kt}) - x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \sum_{k=1}^3 \frac{s_k}{x_k} t_{kt} \right] d\tau = \\ &= \int \int_O x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} F_t dO - \int \int \int_V x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \sum_{k=1}^3 \frac{s_k}{x_k} t_{kt} d\tau, \end{aligned}$$

*) Содержание этого параграфа не связано с последующими главами, он может быть опущен без ущерба для понимания дальнейшего текста.

причем использованы уравнения равновесия на поверхности (1.5.15)

$$t_{kt}N_k = F_t.$$

Теперь введя обозначения

$$q_{s_1 s_2 s_3}^t = \frac{1}{V} \left[\iiint_V x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \rho K_t d\tau + \iint_O x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} F_t dO \right], \quad (4.2.1)$$

$$\frac{1}{V} \iiint_V x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} t_{kt} d\tau = (x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} t_{kt})_m, \quad (4.2.2)$$

придем к соотношениям

$$s_1 (x_1^{s_1-1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} t_{1t})_m + s_2 (x_1^{s_1} x_2^{s_2-1} x_3^{s_3} t_{2t})_m + s_3 (x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3-1} t_{3t})_m = q_{s_1 s_2 s_3}^t. \quad (4.2.3)$$

Их правые части при заданных объемных и поверхностных силах (по всей поверхности O , ограничивающей объем V) известны. Число уравнений (4.2.3) равно $\frac{3}{2}(n+1)(n+2)$, а число неизвестных — числу моментов $(n-1)$ -го порядка для шести функций t_{kt} , то есть $3n(n+1)$.

4.3. Случай $n=0$, $n=1$. При $n=0$ $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ и три уравнения

$$q_{000}^t = \frac{1}{V} \left[\iiint_V \rho K_t d\tau + \iint_O F_t dO \right] = 0 \quad (4.3.1)$$

выражают условия обращения в нуль главного вектора внешних сил.

При $n=1$ приходим к девяти уравнениям, содержащим шесть неизвестных; из них находим средние значения шести компонент тензора напряжений

$$(t_{1t})_m = q_{100}^t, (t_{2t})_m = q_{010}^t, (t_{3t})_m = q_{001}^t, \quad (4.3.2)$$

причем условия симметричности этого тензора

$$(t_{12})_m - (t_{21})_m = q_{100}^2 - q_{010}^1 = 0, q_{010}^3 - q_{001}^2 = 0, q_{001}^1 - q_{100}^3 = 0 \quad (4.3.3)$$

выражают требования обращения в нуль трех компонент главного момента внешних сил.

4.4. Моменты напряжений первого порядка. При $n=2$ приходим к 18 уравнениям с таким же числом неизвестных

$$(t_{kt}x_r)_m = (t_{rk}x_t)_m \quad (r = 1, 2, 3). \quad (4.4.1)$$

Уравнения распадаются на две группы:

$$2(t_{1t}x_1)_m = q_{200}^t, \quad 2(t_{2t}x_2)_m = q_{020}^t, \quad 2(t_{3t}x_3)_m = q_{002}^t, \quad (4.4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} (t_{1t}x_2)_m + (t_{2t}x_1)_m &= q_{110}^t, \quad (t_{2t}x_3)_m + (t_{3t}x_2)_m = q_{011}^t, \\ (t_{3t}x_1)_m + (t_{1t}x_3)_m &= q_{101}^t. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

Из них находим все моменты первого порядка всех шести компонент тензора напряжений. Например, моменты первого порядка напряжений t_{11} , t_{12} (поделенные на объем) равны

$$(t_{11}x_1)_m = \frac{1}{2} q_{200}^1, \quad (t_{11}x_2)_m = q_{110}^1 - \frac{1}{2} q_{200}^2, \quad (t_{11}x_3)_m = q_{101}^1 - \frac{1}{2} q_{200}^3, \quad (4.4.4)$$

$$(t_{12}x_1)_m = \frac{1}{2} q_{200}^2, \quad (t_{12}x_2)_m = \frac{1}{2} q_{020}^1, \quad (t_{12}x_3)_m = \frac{1}{2} (q_{101}^2 + q_{011}^1 - q_{110}^3). \quad (4.4.5)$$

4.5. Пример. Сосуд под внешним и внутренним давлением. Объем тела обозначается V_e , а внутренней полости V_i ; ограничивающие эти объемы поверхности назовем O_e , O_i . Поверхностные силы создаются равномерно распределенными по O_e и O_i давлениями — внешним p_e , внутренним p_i , так что

$$F = \begin{cases} -p_e N_e & \text{на } O_e, \\ -p_i N_i & \text{на } O_i, \end{cases} \quad (4.5.1)$$

где N_e , N_i — единичные векторы внешних по отношению к телу нормалей к поверхностям O_e , O_i (вектор N_i направлен внутрь полости V_i). Начало системы осей совмещено с центром тяжести объема тела (материала), так что

$$V_e x_s^e - V_i x_s^i = 0, \quad s = 1, 2, 3, \quad (4.5.2)$$

где x_s^e , x_s^i — координаты центров тяжести объемов V_e , V_i .

По (4.2.1) при пренебрежении массовыми силами имеем

$$\begin{aligned} q_{s_1 s_2 s_3}^t &= -\frac{1}{V} \left(p_e \int_{O_e} x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} N_{et} dO + p_i \int_{O_i} x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} N_{it} dO \right) = \\ &= -\frac{1}{V} \left[p_e \int \int \int_{V_e} \frac{\partial}{\partial x_t} (x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3}) d\tau - p_i \int \int \int_{V_i} \frac{\partial}{\partial x_t} (x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3}) d\tau \right], \end{aligned}$$

где $V = V_e - V_i$ — объем материала. Условия равновесия (4.3.1), (4.3.3), конечно, выполняются. По (4.3.2), (4.4.2), (4.4.3),

учитывая (4.5.2), находим средние значения нормальных напряжений и их первых моментов

$$(t_{qq})_m = -\frac{1}{V} (p_e V_e - p_i V_i) \quad \left(\sum_q \right), \quad (4.5.3)$$

$$\begin{aligned} (t_{qq} x_s)_m &= -\frac{1}{V} (p_e V_e x_s^e - p_i V_i x_s^i) = -\frac{V_e}{V} (p_e - p_i) x_s^e = \\ &= -\frac{V_i}{V} (p_e - p_i) x_s^i. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Средние значения и первые моменты касательных напряжений равны нулю:

$$(t_{qh})_m = 0, \quad (t_{qh} x_s)_m = 0 \quad (q \neq h). \quad (4.5.5)$$

4.6. Пример. Главный вектор и главный момент напряжений в плоском сечении тела. Рассматривается часть нагруженного массовыми и поверхностными силами тела V , отсеченная от него плоскостью $x_3 = x_3^0$. Объем этой части назовем T ; он ограничен поверхностью $O_* + \Omega$, где O_* — часть поверхности O тела V , а Ω — площадь плоского сечения. При этих обозначениях, принимая $x_3 > x_3^0$ в объеме T , имеем по (4.2.1)

$$\begin{aligned} r_{s_1 s_2 s_3} &= \frac{1}{T} \left(\int_T \int \int x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} \rho K_r d\tau + \int_{O_*} \int x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} F_r dO \right) + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{\Omega} \int x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} t_{rk} N_k dO = \bar{r}_{s_1 s_2 s_3}^* - \frac{1}{T} \int_{\Omega} \int x_1^{s_1} x_2^{s_2} x_3^{s_3} t_{r3} dO, \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

так как $N_k = -\delta_{3k}$ на плоскости $x_3 = x_3^0$. В (4.6.1) первое слабое определяется заданными внешними силами. Из уравнений равновесия (4.3.1), (4.3.3) находим теперь выражения:

а) перерезывающих сил

$$\Omega(t_{13})_{m_*} = T \bar{q}_{000}^1, \quad \Omega(t_{23})_{m_*} = T \bar{q}_{000}^2, \quad (4.6.2)$$

б) растягивающей силы

$$\Omega(t_{33})_{m_*} = T \bar{q}_{000}^3, \quad (4.6.3)$$

в) крутящего момента

$$\Omega(x_1 t_{23} - x_2 t_{31})_{m_*} = T (\bar{q}_{010}^2 - \bar{q}_{010}^1), \quad (4.6.4)$$

г) изгибающих моментов относительно осей Ox_1 , Ox_2

$$\left. \begin{aligned} \Omega(x_2 t_{33})_{m_*} &= T (\bar{q}_{010}^3 - \bar{q}_{001}^2 + x_3^0 \bar{q}_{000}^2), \\ -\Omega(x_1 t_{33})_{m_*} &= T (\bar{q}_{001}^1 - \bar{q}_{100}^3 - x_3^0 \bar{q}_{000}^1). \end{aligned} \right\} \quad (4.6.5)$$

Индексом m_* обозначается среднее значение по площади Ω :

$$\frac{1}{\Omega} \iint_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 = (f)_{m_*}.$$

4.7. Оценка среднего значения квадратичной формы компонент тензора напряжений. Для упрощения записей здесь используются одноиндексные обозначения

$$\tau_1 = t_{11}, \tau_2 = t_{22}, \tau_3 = t_{33}, \tau_4 = t_{12}, \tau_5 = t_{23}, \tau_6 = t_{31}. \quad (4.7.1)$$

В рассмотрение вводится положительная 6×6 матрица $\|q_{rs}\|$ постоянных*). Через ψ обозначен интеграл по объему тела от знакоопределенной положительной квадратичной формы:

$$\psi = \frac{1}{2} \iiint_V q_{rs} \left[\tau_r - \left(a_0^r + \sum_{m=1}^3 a_m^r x_m \right) \right] \left[\tau_s - \left(a_0^s + \sum_{k=1}^3 a_k^s x_k \right) \right] d\tau \quad (4.7.2)$$

(опущены знаки суммирования по r и s). Система осей $Ox_1x_2x_3$ совмещена с главными центральными осями инерции объема

$$\iiint_V x_k d\tau = 0, \quad \iiint_V x_k x_m d\tau = 0 \quad (k, m = 1, 2, 3; k \neq m), \quad (4.7.3)$$

и вводятся обозначения

$$\iiint_V x_k^2 d\tau = V j_k^2 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (4.7.4)$$

так что

$$\rho_1^2 = j_2^2 + j_3^2, \quad \rho_2^2 = j_3^2 + j_1^2, \quad \rho_3^2 = j_1^2 + j_2^2$$

представляют квадраты радиусов инерции относительно главных осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 .

Рассматриваемая как функция коэффициентов a_0^r, a_k^s , функция ψ имеет минимум при условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial a_0^r} &= - \iiint_V q_{rs} \left[\tau_r - \left(a_0^r + \sum_{m=1}^3 a_m^r x_m \right) \right] d\tau = - V q_{rs} [(\tau_r)_m - a_0^r], \\ \frac{\partial \psi}{\partial a_k^s} &= - \iiint_V q_{rs} x_k \left[\tau_r - \left(a_0^r + \sum_{m=1}^3 a_m^r x_m \right) \right] d\tau = \\ &= - V q_{rs} [(\tau_r x_k)_m - a_k^r j_k^2]. \end{aligned}$$

*) Напомним, что матрица называется положительной, если образуемая по ней квадратичная форма $q_{rs}x_sx_r$ — знакоопределенная положительная (обращается в нуль только тогда, когда все $x_r = 0$).

Поскольку определитель $|q_{rs}| \neq 0$, из них следует, что стационарное значение ψ , являющееся вследствие ее знакоопределенной положительности минимумом, достигается при значениях параметров a_0^r, a_k^r , равных

$$a_0^r = (\tau_r)_m, \quad a_k^r = \frac{1}{j_k^2} (\tau_r x_k)_m$$

и вычисляемых с помощью формул (4.3.2), (4.4.2), (4.4.3) по заданию внешних сил. Этот минимум, если еще раз обратиться к формулам (4.7.3), оказывается равным

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \int \int \int_V q_{rs} \left\{ \tau_r - \left[(\tau_r)_m + \sum_{q=1}^3 \frac{(\tau_r x_q)_m}{j_q^2} x_q \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \tau_s - \left[(\tau_s)_m + \sum_{k=1}^3 \frac{(\tau_s x_k)_m}{j_k^2} x_k \right] \right\} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int \int \int_V q_{rs} \tau_r \tau_s d\tau - \frac{1}{2} V q_{rs} \left[(\tau_r)_m (\tau_s)_m + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{j_k^2} (\tau_r x_k)_m (\tau_s x_k)_m \right]. \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Приходим к неравенству

$$\frac{1}{V} \int \int \int_V q_{rs} \tau_r \tau_s d\tau > q_{rs} \left[(\tau_r)_m (\tau_s)_m + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{j_k^2} (\tau_r x_k)_m (\tau_s x_k)_m \right]. \quad (4.7.6)$$

Со знаком \geq оно имеет место и для положительной знакопостоянной формы $q_{rs} \tau_r \tau_s$ *). Пусть, например, все q_{rs} , кроме одного q_{rr} , равны нулю. Тогда

$$\left(\frac{1}{V} \int \int \int_V \tau_r^2 d\tau \right)^{1/2} = (\tau_r^2)_m^{1/2} \geq \left[(\tau_r)_m^2 + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{j_k^2} (\tau_r x_k)_m^2 \right]^{1/2}. \quad (4.7.7)$$

В задаче о сосудах п. 4.5 по (4.5.3) и (4.5.4) неравенство

$$\int \int \int_V q_{rs} \tau_r \tau_s d\tau \geq \frac{1}{V} \left[(p_e V_e - p_i V_i)^2 + V_e^2 (p_e - p_i)^2 \sum_{k=1}^3 \frac{(x_k^e)^2}{j_k^2} \right] \sum_{r, s=1}^3 q_{rs} \quad (4.7.8)$$

*) Форма, сохраняющая знак, но обращающаяся в нуль не только в начале координат пространства своих переменных, называется знакопостоянной.

согласно с (2.4.10) выполняется при $p_e = p_i$ со знаком равенства. Пусть теперь $p_i = 0$; полагая только одно $q_{ss} \neq 0$, имеем неравенство

$$|\tau_s|_{\max} > (\tau_s^2)_m^{1/2} \geq p_e \frac{V_e}{V} \left(1 + \sum_{k=1}^3 \frac{(x_k^e)^2}{j_k^2} \right)^{1/2}, \quad (4.7.9)$$

показывающее, что наличие полости сопровождается повышением напряжений; это следует из того, что при отсутствии полости $V_e = V$, $x_k^e = 0$, и по (2.4.10) в формуле (4.7.9) надо принять знак равенства.

4.8. Оценка удельной потенциальной энергии деформированного линейно-упругого тела. Эта величина, как будет показано в п. 3.2 гл. III, выражается через инварианты тензора напряжений по формуле

$$A = \frac{1}{2E} [I_1^2(\hat{T}) - 2(1 + \nu) I_2(\hat{T})], \quad (4.8.1)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала. Неравенство (4.7.6) позволяет дать следующую оценку этой величины; вычисляемую по заданию внешних сил. Обозначим

$$\overline{I_1(\hat{T})} = (t_{rr})_m, \quad \overline{I_1(\hat{T}^{(k)})} = (t_{rr}x_k)_m$$

и также

$$\begin{aligned} \overline{I_2(\hat{T})} &= (t_{rr})_m (t_{r+1, r+1})_m - (t_{r, r+1})_m^2, \\ \overline{I_2(\hat{T}^{(k)})} &= (t_{rr}x_k)_m (t_{r+1, r+1}x_k)_m - (t_{r, r+1}x_k)_m^2 \end{aligned}$$

(суммирование по индексу r от 1 до 3 с заменой $r+1 = 4$ единиц). Тогда

$$\begin{aligned} (A)_m &= \frac{1}{V} \int_V \int A d\tau > \frac{1}{2E} \{ [\overline{I_1(\hat{T})}]^2 - 2(1 + \nu) \overline{I_2(\hat{T})} \} + \\ &+ \frac{1}{2E} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{j_k^2} \{ [\overline{I_1(\hat{T}^{(k)})}]^2 - 2(1 + \nu) \overline{I_2(\hat{T}^{(k)})} \}. \quad (4.8.2) \end{aligned}$$

4.9. Оценка удельной интенсивности касательных напряжений. Квадрат этой величины, равный абсолютному значению второго инварианта девиатора тензора напряжения, по (2.2.11), а также со ссылкой на формулы (I.11.8), (I.10.5), может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{1}{6} [(t_1 - t_2)^2 + (t_2 - t_3)^2 + (t_3 - t_1)^2] = \frac{1}{6} [(t_{11} - t_{22})^2 + (t_{22} - t_{33})^2 + \\ &+ (t_{33} - t_{11})^2 + 6(t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2)] = \frac{1}{6} [(t_{rr} - t_{r+1, r+1})^2 + 6t_{r, r+1}^2]. \quad (4.9.1) \end{aligned}$$

Это — знакопостоянная положительная форма, так как она обращается в нуль при $t_{12} = t_{23} = t_{31} = 0$, $t_{11} = t_{22} = t_{33} \neq 0$. По (4.7.6) имеем

$$(\tau^2)_m = \frac{1}{V} \int \int \int_V \tau^2 dx_1 dx_2 dx_3 \geq \frac{1}{6} \{ [(t_{rr})_m - (t_{r+1, r+1})_m]^2 + 6(t_{r, r+1})_m^2 \} + \\ + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{j_k^2} \{ [(t_{rr}x_k)_m - (t_{r+1, r+1}x_k)_m]^2 + 6(t_{r, r+1}x_k)_m^2 \} = \tau_*^2. \quad (4.9.2)$$

Согласно критерию Мизеса неравенство $\tau < \tau_T$ во всем объеме тела (τ_T — предел текучести материала) гарантирует отсутствие в нем зон пластической деформации; поскольку $(\tau^2)_m^{1/2} < \tau_{\max}$, то условие $\tau_T > (\tau^2)_m^{1/2}$ представляет необходимое, но, конечно, не достаточное условие недостижимости предела текучести. Поэтому неравенство

$$\tau_T \leq \tau_* \quad (4.9.3)$$

является достаточным признаком наличия зон пластичности, тогда как неравенство противоположного знака

$$\tau_T > \tau_* \quad (4.9.4)$$

представляет необходимое условие их отсутствия. Как уже говорилось, эти критерии выражены с помощью формул п. 4.3 через внешние объемные и поверхностные внешние силы (последние предполагаются заданными по всей поверхности O тела).

4.10. Моменты напряжений второго и более высокого порядка. Если $n \geq 3$, то число уравнений (4.2.3) меньше числа неизвестных. Например, при $n = 3$ имеем 30 уравнений с 36 неизвестными. Однако 15 неизвестных (при любом $n \geq 3$) оказывается возможным определить. Это девять величин

$$n(x_1^{n-1}t_{1s})_m = q_{n00}^s, \quad n(x_2^{n-1}t_{2s})_m = q_{0n0}^s, \quad n(x_3^{n-1}t_{3s})_m = q_{00n}^s \quad (4.10.1)$$

и шесть величин вида

$$(n-1)(x_1^{n-2}x_2t_{11})_m = q_{n-1, 10}^1 - \frac{1}{n} q_{n00}^2, \quad (n-1)(x_1^{n-2}x_3t_{11})_m = \\ = q_{n-1, 01}^1 - \frac{1}{n} q_{n00}^3. \quad (4.10.2)$$

4.11. Оценка снизу максимума компонент напряжений. Вывод формулы (4.7.6) для оценки снизу среднего значения квадратичной формы компонент тензора напряжений основывался только на свойствах ортонормированности (4.7.3), (4.7.4) в объеме V четырех полиномов (нулевой и первой степени)

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{V}}, \quad P_s = \frac{x_s}{j_s \sqrt{V}} \quad (s = 1, 2, 3), \quad (4.11.1)$$

и его можно применить к более общей системе ортонормированных полиномов

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_r. \quad (4.11.2)$$

Например, к основной системе (4.11.1) можно присоединить один из полиномов второй степени

$$P_{3+q} = \frac{1}{j_{3+q} \sqrt{V}} \left[x_q^2 - j_q^2 - \frac{1}{V} \sum_{k=1}^3 \frac{x_k}{j_k^2} \int \int \int_V x_q^2 x_k d\tau \right], \quad (4.11.3)$$

причем

$$j_{3+q}^2 = \frac{1}{V} \int \int \int_V x_q^4 d\tau - j_q^4 - \frac{1}{V^2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{j_k^2} \left(\int \int \int_V x_q^2 x_k d\tau \right)^2. \quad (4.11.4)$$

Вычисление становится более громоздким при присоединении к основной системе не одного, а двух полиномов, например полинома P_4 и полинома P_5 , содержащего x_2^2 ; тогда придется позаботиться об ортогональности P_5 не только с основными полиномами, но с P_4 .

Пусть построена ортонормированная в V система полиномов

$$\int \int \int_V P_t P_q d\tau = \begin{cases} 0, & q \neq t, \\ 1, & q = t, \end{cases} \quad t, q = 1, 2, \dots, s. \quad (4.11.5)$$

Тогда введя в рассмотрение вместо (4.7.2) выражение более общего вида

$$\psi = \frac{1}{2} \int \int \int_V q_{rq} \left(\tau_r - \sum_{t=0}^s a_t^r P_t \right) \left(\tau_q - \sum_{l=0}^s a_l^q P_l \right) d\tau$$

и повторив вывод в п. 4.7, придем к более общему, чем (4.7.6), неравенству

$$\int \int \int_V q_{rq} \tau_r \tau_q d\tau \geq V^2 q_{rq} \sum_{t=0}^s (\tau_r P_t)_m (\tau_q P_t)_m,$$

причем знак равенства может иметь место, если $q_{rq} \tau_r \tau_q$ — знакопостоянная положительная форма.

Пусть все q_{rq} , кроме одного с одинаковыми индексами, равны нулю. Тогда, учитывая, что

$$\frac{1}{V} \int \int \int_V \tau_q^2 d\tau \leq |\tau_q|_{\max}^2, \quad (4.11.6)$$

придем к оценке снизу максимума модуля τ_q :

$$|\tau_q|_{\max} \geq \left[V \sum_{t=0}^s (\tau_q P_t)_m^2 \right]^{1/2}. \quad (4.11.7)$$

Она представляется весьма грубой, но ее можно уточнить, увеличивая ее правую часть путем присоединения новых ортонормированных в V полиномов. При выборе их, однако, надо позаботиться о возможности выразить величины

$$(\tau_r P_t)_m = \frac{1}{V} \int \int_V \tau_r P_t d\tau \quad (4.11.8)$$

через вычисляемые по заданным нагрузкам моменты высоких порядков (4.10.1) и (4.10.2).

Например, если ограничиться в этих формулах $n = 3$, то при разыскании $|\tau_1|_{\max}$, кроме основных полиномов (4.11.1), можно использовать еще построенный выше полином P_4 , а для дальнейшего уточнения еще один полином, ортонормированный с предшествующими пятью полиномами, включающий слагаемое $x_1 x_2$ или $x_1 x_3$. Дальнейшее уточнение требует уже построения системы семи ортонормированных полиномов (четырех основных и трех квадратичных, содержащих x_1^2 , $x_1 x_2$, $x_1 x_3$). Этим при $n = 3$ возможность дальнейшего уточнения $|\tau_1|_{\max}$ будет исчерпана. Аналогично строятся оценки максимумов остальных компонент. Например, наилучшая оценка при $n = 3$ снизу $|\tau_4|_{\max} = |t_{12}|_{\max}$ с помощью формулы (4.11.7) может быть достигнута с помощью шести полиномов: полиномов P_0, \dots, P_4 и ортонормированного с ними полинома, содержащего x_2^2 .

4.12. Уточненная оценка. Исходим из равенства

$$\int \int_V \sum_{q=1}^6 \beta_q \tau_q \sum_{t=0}^s a_t P_t d\tau = V \sum_{q=1}^6 \beta_q \sum_{t=0}^s a_t (\tau_q P_t)_m, \quad (4.12.1)$$

в котором β_q ($q = 1, \dots, 6$) и a_t ($t = 1, \dots, s$) — некоторые постоянные. Тогда, поскольку модуль интеграла в левой части не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции, имеем

$$\int \int_V \left| \sum_{q=1}^6 \beta_q \tau_q \right| \left| \sum_{t=0}^s a_t P_t \right| d\tau \leq \left| \sum_{q=1}^6 \beta_q \tau_q \right|_{\max} \int \int_V \left| \sum_{t=0}^s a_t P_t \right| d\tau$$

и, возвращаясь к (4.12.1), приходим к неравенству

$$\left| \sum_{q=1}^6 \beta_q \tau_q \right|_{\max} \geq V \frac{\left| \sum_{q=1}^6 \beta_q \sum_{t=0}^s a_t (\tau_q P_t)_m \right|}{\int \int_V \left| \sum_{t=0}^s a_t P_t \right| d\tau}. \quad (4.12.2)$$

Вхождение в знаменатель правой части интеграла от модуля существенно усложняет вычисление, но преимуществом этой

формулы по сравнению с (4.11.6) является наличие постоянных a_t , распоряжаясь которыми можно увеличивать правую часть неравенства.

Полагая

$$\sum_{r, q=1}^6 q_{rq} \tau_r \tau_q = \left(\sum_{q=1}^6 \beta_q \tau_q \right)^2,$$

имеем по (4.11.6)

$$\left| \sum_{q=1}^6 \beta_q \tau_q \right|_{\max} \geq \left\{ V \sum_{t=0}^s \left[\sum_{q=1}^6 \beta_q (\tau_q P_t)_m \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.12.3)$$

Теперь примем в неравенстве (4.12.2)

$$a_t = \sum_{q=1}^6 \beta_q (\tau_q P_t)_m \quad (4.12.4)$$

и через γ назовем его правую часть:

$$\gamma = V \frac{\sum_{t=0}^s \left[\sum_{q=1}^6 \beta_q (\tau_q P_t)_m \right]^2}{\iiint_V \left| \sum_{t=0}^s \sum_{q=1}^6 \beta_q (\tau_q P_t)_m P_t \right| d\tau}. \quad (4.12.5)$$

Полагая $\varphi = \operatorname{sgn} \psi$ в известном неравенстве Буняковского — Шварца

$$\left[\iiint_V \varphi \psi d\tau \right]^2 \leq \iiint_V \varphi^2 d\tau \iiint_V \psi^2 d\tau,$$

имеем

$$\iiint_V |\psi| d\tau \leq \left(V \iiint_V \psi^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

В приложении к знаменателю правой части (4.12.5) это неравенство с учетом (4.11.5) дает

$$\begin{aligned} \iiint_V \left| \sum_{t=0}^s \sum_{q=1}^6 \beta_q (\tau_q P_t)_m P_t \right| d\tau &\leq \\ &\leq \left\{ V \iiint_V \left[\sum_{t=0}^s \sum_{q=1}^6 \beta_q (\tau_q P_t)_m P_t \right]^2 d\tau \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ V \sum_{t=0}^s \left[\sum_{q=1}^6 \beta_q (\tau_q P_t)_m \right]^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\gamma \geq \left\{ V \sum_{t=0}^s \left[\sum_{q=1}^6 \beta_q (\tau_q P_t)_m \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Итак, оценка снизу по неравенству (4.12.3) хуже, чем даваемая неравенством (4.12.2), если в последнем выбрать постоянные a_t по (4.12.4). Например, если только одна из постоянных β_q отлична от нуля, то по (4.12.2) и (4.12.4)

$$|\tau_q|_{\max} \geq V \frac{\sum_{t=0}^s (\tau_q P_t)_m^2}{\iiint_V \left| \sum_{t=0}^s (\tau_q P_t)_m P_t \right| d\tau}, \quad (4.12.6)$$

и эта оценка точнее, чем (4.11.7).

В качестве примера приведем оценку снизу максимума модуля температуры θ линейно-упругого тела при адиабатическом нагружении. По (3.5.8) гл. III имеем

$$\theta = - \frac{\alpha \Theta_0}{c_p} \sigma,$$

где θ — температура, отсчитываемая от натурального состояния (при отсутствии нагружения), Θ_0 — абсолютная температура в этом состоянии, α — коэффициент линейного расширения, c_p — теплоемкость при постоянном давлении; через σ обозначен первый вариант тензора напряжения ($\sigma = t_{11} + t_{22} + t_{33}$). По (4.12.3), ограничиваясь только основными полиномами (4.11.1), имеем

$$|\theta|_{\max} \geq \frac{\alpha \Theta_0}{c_p} \left\{ V \sum_{t=0}^3 (\sigma P_t)_m^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.12.7)$$

Более точная оценка по формуле (4.12.5) дает

$$|\theta|_{\max} \geq \frac{\alpha \Theta_0}{c_p} V \frac{\sum_{t=0}^3 (\sigma P_t)_m^2}{\iiint_V |(\sigma P_t)_m P_t| d\tau}. \quad (4.12.8)$$

ГЛАВА II

ДЕФОРМАЦИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 1. Линейный тензор деформации

1.1. Обзор содержания главы. Как говорилось в п. 1.1 гл. I, переход из начального состояния среды (из v -объема) в ее конечное состояние (V -объем) определяется заданием вектора перемещения u точек среды. Построение механики сплошной среды нуждается в математическом средстве, обеспечивающем возможность определения по этому векторному полю изменения расстояний между точками среды и углов между отмеченными направлениями в данной точке.

Задача состоит в том, чтобы проследить за изменением длины и направления любого бесконечно малого отрезка v -объема, задаваемого вектором

$$dr = e|dr| = e ds \quad (1.1.1)$$

и несущего те же частицы вектора V -объема

$$dR = \tilde{e}|dR| = \tilde{e} dS. \quad (1.1.2)$$

Речь здесь идет о сопоставлении вектора dR вектору dr , и естественно, что решение связывается с введением в рассмотрение тензора второго ранга. Действительно, рассматривая вектор-радиус R точки V -объема как функцию материальных координат, за коковые можно принять, в частности, декартовы координаты a_1, a_2, a_3 этой точки в v -объеме, имеем по (II.2.11)

$$dR = dr \cdot \nabla R = (\nabla R)^* \cdot dr, \quad (1.1.3)$$

где ∇R — тензор второго ранга — градиент вектора R . С помощью этого несимметричного тензора строится симметричный тензор второго ранга, называемый ниже тензором первой меры деформации (Коши — Грина), позволяющий дать решение поставленного выше вопроса об изменении длин отрезков и углов в v -объеме.

Этим не исчерпывается вопрос о величинах, характеризующих деформацию, так как имеет значение и обратная задача —

определение в v -объеме вектора $d\mathbf{r}$, заданного в V -объеме вектором $d\mathbf{R}$. Ее решение приводит к введению второй меры деформации.

Еще одной существенно важной геометрической задачей является определение по заданной материальной ориентированной площадке $n\,do$ в v -объеме соответствующей ей в V -объеме площадки $N\,dO$. Эта задача и ей обратная — нахождение $n\,do$ по $N\,dO$ — решаются введением еще двух мер деформации, определяемых тензорами второго ранга, обратными первой и второй мерам (см. п. I. 7).

Из равенства (1.1.3) гл. I следует, что

$$\nabla \mathbf{R} = \hat{\mathbf{E}} + \nabla \mathbf{u} = i_s i_k \left(\delta_{sk} + \frac{\partial u_k}{\partial a_s} \right). \quad (1.1.4)$$

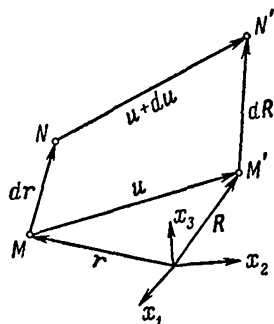


Рис. 8.

В линейной теории упругости нет нужды в использовании перечисленных мер деформации; в ней основываются на вполне приемлемом при рассмотрении деформации массивных и слабо деформируемых тел предположении о существенной малости элементов матрицы тензора $\nabla \mathbf{u}$:

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial a_s} \right| \ll 1. \quad (1.1.5)$$

Этим допускается последовательное пренебрежение квадратами и произведениями компонент тензора $\nabla \mathbf{u}$ по сравнению с их первыми степенями. При таком допущении для описания деформированного состояния достаточно ввести один симметричный тензор второго ранга, называемый далее линейным тензором деформации.

1.2. Определение линейного тензора деформации *). В v -объеме рассматриваются две бесконечно близкие точки M и N (рис. 8):

$$M \dots \mathbf{r} = i_s a_s, \quad N \dots \mathbf{r} + d\mathbf{r} = i_s (a_s + da_s). \quad (1.2.1)$$

В V -объеме их положения M' , N' определяются вектор-радиусами

$$\left. \begin{aligned} M' \dots \mathbf{R} &= \mathbf{r} + \mathbf{u} = i_s (a_s + u_s), \\ N' \dots \mathbf{R} + d\mathbf{R} &= \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{u} + d\mathbf{u} = i_s (a_s + da_s + u_s + du_s). \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

*) См. также п. II.2.

Здесь du представляет вектор относительного перемещения двух бесконечно близких точек среды; по (II.2.6) и (II.2.11)

$$du = \frac{du}{dr} \cdot dr = (\nabla u)^* \cdot dr = dr \cdot \nabla u. \quad (1.2.3)$$

Тензор du/dr — производную вектора u по направлению r — представим суммой его симметричной и кососимметричной частей [см. (I.4.8)]:

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dr} + \nabla u \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dr} - \nabla u \right) = \hat{\varepsilon} + \hat{\Omega}. \quad (1.2.4)$$

Первая определяет симметричный тензор второго ранга, называемый линейным тензором деформации и обозначаемый

$$\hat{\varepsilon} = \text{def } u = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dr} + \nabla u \right) = \frac{1}{2} [(\nabla u)^* + \nabla u]. \quad (1.2.5)$$

Матрица компонент этого тензора записывается в виде

$$\left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} & \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \gamma_{13} \\ \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{23} \\ \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \gamma_{31} & \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{array} \right\|. \quad (1.2.6)$$

Выражения компонент $\varepsilon_{ih} = \varepsilon_{hi}$ через производные вектора перемещения по (II.2.5) определяются формулами

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial a_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial a_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial a_3}, \quad (1.2.7)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_3} + \frac{\partial u_3}{\partial a_2} \right), \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_3} \right). \quad (1.2.8)$$

Диагональные элементы матрицы (1.2.6) в линейной теории упругости называются относительными удлинениями, а удвоенные недиагональные (γ_{ih}) — сдвигами. Происхождение этих наименований объяснено ниже (п. 3.6).

Второе слагаемое в формуле (1.2.4) представляет кососимметричный тензор второго ранга

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dr} - \nabla u \right) = \frac{1}{2} [(\nabla u)^* - \nabla u] \quad (1.2.9)$$

с матрицей компонент

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & \omega_{12} = -\omega_3 & \omega_{13} = \omega_2 \\ \omega_{21} = \omega_3 & 0 & \omega_{23} = -\omega_1 \\ \omega_{31} = -\omega_2 & \omega_{32} = \omega_1 & 0 \end{array} \right\|. \quad (1.2.10)$$

Здесь величины

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial a_2} - \frac{\partial u_2}{\partial a_3} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_3} - \frac{\partial u_3}{\partial a_1} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_1} - \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \right) \quad (1.2.11)$$

представляют проекции сопутствующего тензору $(\nabla u)^*$ вектора ω , называемого вектором поворота. По (II.2.8) имеем

$$\omega = \frac{1}{2} \epsilon_{rts} \frac{\partial u_t}{\partial a_r} i_s = \frac{1}{2} i_r \times i_t \frac{\partial u_t}{\partial a_r} = \frac{1}{2} \nabla \times u = \frac{1}{2} \text{rot } u. \quad (1.2.12)$$

Перепишав формулы (1.2.5) и (1.2.9) в виде

$$\frac{du}{dr} = \hat{e} + \hat{\Omega}, \quad \nabla u = \hat{e} - \hat{\Omega} \quad (1.2.13)$$

и сославшись на (1.2.3), а также на (I.4.10), имеем

$$du = \hat{e} \cdot dr + \hat{\Omega} \cdot dr = \hat{e} \cdot dr + \omega \times dr. \quad (1.2.14)$$

Второе слагаемое в этой формуле представляет перемещение, обусловленное поворотом бесконечно малой окрестности точки M как твердого тела, а первое определяет перемещение относительно точки M точек этой окрестности, создаваемое деформацией \hat{e} .

Данное здесь в применении к вектору перемещения u определение линейного тензора деформации распространимо на любой вектор (п. II.2). Например, применение операции def к вектор-радиусу r приводит к единичному тензору

$$\text{def } r = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dr} + \nabla r \right) = \frac{1}{2} (\hat{E} + \hat{E}) = \hat{E}, \quad (1.2.15)$$

так что

$$\text{def } R = \hat{E} + \hat{e}. \quad (1.2.16)$$

§ 2. Определение вектора перемещения по линейному тензору деформации

2.1. Совместность деформаций (зависимости Сен-Венана). Ставится задача об определении вектора перемещения — его трех проекций u_s , называемых кратко перемещениями, по заданному линейному тензору деформации \hat{e} . Иначе говоря, речь идет об интегрировании системы шести дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} &= \epsilon_{11}, & \frac{\partial u_2}{\partial a_2} &= \epsilon_{22}, & \frac{\partial u_3}{\partial a_3} &= \epsilon_{33}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_2} \right) &= \epsilon_{12}, & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_3} \right) &= \epsilon_{23}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_3} + \frac{\partial u_3}{\partial a_1} \right) &= \epsilon_{31}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

заданные правые части которых непрерывны вместе с их производными первого и второго порядков. Число уравнений (шесть) превосходит число неизвестных (три), поэтому задача может иметь решение только при наложении некоторых условий на задание компонент тензора $\hat{\varepsilon}$. Это поясняется таким рассмотрением: представив себе среду разделенной на элементарные кубики, сообщим каждому из отдельно взятых кубиков деформацию, подвергнув его малым растяжениям и малым скошениям первоначально прямых углов между ребрами; полученные тела можно будет снова сложить в сплошную (лишенную разрывов) среду лишь при надлежащей согласованности деформаций отдельных кубиков. Это обеспечивается при существовании непрерывного вместе с его производными по крайней мере до третьего порядка вектора перемещения \mathbf{u} , так что заданный тензор $\hat{\varepsilon}$ является его деформацией ($\hat{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u}$). Иначе говоря, речь идет об условиях интегрируемости системы уравнений (2.1.1); сказанное объясняет и другие наименования — условия сплошности и условия совместности деформаций. На их важное значение в механике сплошной среды указал Сен-Венан, поэтому принят также термин «зависимости Сен-Венана».

Исходим из формулы (1.2.14). В ее правую часть входит неизвестный кососимметричный тензор $\hat{\Omega}$, и его надо исключить из рассмотрения. Но условием интегрируемости соотношения (1.2.14), то есть существования вектора \mathbf{u} , служит по (II.6.5) обращение в нуль ротора тензора $(\hat{\varepsilon} + \hat{\Omega})^*$:

$$\text{rot } (\hat{\varepsilon} + \hat{\Omega})^* = \text{rot } (\hat{\varepsilon} - \hat{\Omega}),$$

так как $\hat{\varepsilon}^* = \hat{\varepsilon}$, $\hat{\Omega}^* = -\hat{\Omega}$. Приходим к условию

$$\text{rot } \hat{\varepsilon} = \text{rot } \hat{\Omega}. \quad (2.1.2)$$

Выражение ротора кососимметричного тензора дается формулой (II.3.9):

$$\text{rot } \hat{\Omega} = (\nabla \omega)^* - \hat{E} \text{div } \omega = \frac{d\omega}{dr}, \quad (2.1.3)$$

поскольку

$$\text{div } \omega = \left(\frac{1}{2} I_1 - \text{rot } \hat{\varepsilon} \right) = 0,$$

так как первый инвариант ротора симметричного тензора равен нулю.

Приходим к соотношению

$$\text{rot } \hat{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dr}, \quad d\omega = \text{rot } \hat{\varepsilon} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.1.4)$$

и, снова обратившись к (II.6.5), записываем условие его интегрируемости в виде

$$\text{rot } (\text{rot } \hat{\varepsilon})^* = \text{Ink } \hat{\varepsilon} = 0. \quad (2.1.5)$$

При его выполнении по (2.1.4) имеем

$$\omega = \omega_0 + \int_{M_0}^M \operatorname{rot} \hat{e} \cdot dr. \quad (2.1.6)$$

Теперь правая часть выражения du в формуле (1.2.14) полностью известна и выполнено условие ее интегрируемости (2.1.3) — из него при соблюдении условия (2.1.5) определен вектор ω . Поэтому последнее и представляет условие интегрируемости соотношения (1.2.14). Этим, кстати, объясняется наименование Ink — условие $\operatorname{Ink} \hat{P} \neq 0$ несовместимо с существованием вектора, для которого симметричный тензор \hat{P} был бы деформацией (см. п. II.4).

Запись шести условий обращения в нуль тензора $\operatorname{Ink} \hat{e}$ следует из таблицы компонент (II.4.15) тензора $\operatorname{Ink} \hat{e}$. Эти же условия можно получить, исключив перемещения u_1, u_2, u_3 из системы уравнений (2.1.1). Процесс исключения ведется так. Рассматривая три уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial a_1} = e_{11}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial a_2} = e_{22}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_2} = \gamma_{12},$$

замечаем, что их левые части удовлетворяют тождеству

$$\frac{\partial^2}{\partial a_2^2} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{\partial^2}{\partial a_1^2} \frac{\partial u_2}{\partial a_2} = \frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right).$$

Из него получаем одно из трех условий, выражающих требование обращения в нуль диагональных компонент $\operatorname{Ink} \hat{e}$:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial a_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial a_1 \partial a_2}. \quad (2.1.7)$$

Одним из тождеств второй группы является

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial^3 u_3}{\partial a_1 \partial a_2 \partial a_3} + \frac{\partial^2}{\partial a_2 \partial a_3} \left(\frac{\partial u_3}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial a_3} \right) + \frac{\partial^2}{\partial a_3 \partial a_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_3} \right) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial a_3^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} + \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Оно приводит к соотношению

$$-2 \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial a_1 \partial a_2} + \frac{\partial}{\partial a_3} \left(\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial a_2} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial a_1} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial a_3} \right) = 0. \quad (2.1.8)$$

Остающиеся условия получаем из (2.1.7) и (2.1.8) с помощью круговой перестановки индексов.

Отметим еще, что формула (2.1.5), конечно, применима к линейному тензору деформации $\operatorname{def} a$ любого вектора a (не только вектора перемещения):

$$\operatorname{Ink} \operatorname{def} a = 0. \quad (2.1.9)$$

Симметричный тензор, «несовместность» (Ink) которого равна нулю, представляет деформацию некоторого вектора. Это предположение было использовано в п. 1.6 гл. I.

2.2. Вектор перемещения. Формула Чезаро. Используя выражение (2.1.6) вектора ω , перепишем соотношение (1.2.14) в виде

$$du = \hat{e} \cdot dr + \omega_0 \times dr - dr \times \int_{M_0}^M \text{rot } \hat{e}(\sigma) \cdot dr(\sigma). \quad (2.2.1)$$

Пусть C — путь интегрирования, M_0 — его начальная, M — конечная точка; M' , M'' — точки на этом пути. Вектор-радиусы этих точек обозначаются r_0 , $r(s)$, $r(\sigma)$, $r(\sigma')$. Тогда

$$u(s) = u_0 + \omega_0 \times [r(s) - r_0] + \\ + \int_{M_0}^M \hat{e}(\sigma) \cdot dr(\sigma) - \int_{M_0}^M dr(\sigma) \times \int_{M_0}^{M'} \text{rot } \hat{e}(\sigma') \cdot dr(\sigma').$$

Двойной интеграл известным приемом преобразуется в одинарный:

$$- \int_{M_0}^M dr(\sigma) \times \int_{M_0}^{M'} \text{rot } \hat{e}(\sigma') \cdot dr(\sigma') = \int_{M_0}^M \text{rot } \hat{e}(\sigma') \cdot dr(\sigma') \times \int_{M''}^M dr(\sigma) = \\ = \int_{M_0}^M \text{rot } \hat{e}(\sigma') \cdot dr(\sigma') \times [r(s) - r(\sigma')].$$

Приходим к формуле Е. Чезаро, определяющей вектор перемещения по линейному тензору деформации:

$$u = u_0 + \omega_0 \times (r - r_0) + \int_{M_0}^M \{ \hat{e}(\sigma) + [r(\sigma) - r(s)] \times \text{rot } \hat{e}(\sigma) \} \cdot dr(\sigma) = \\ = u_0 + \omega_0 \times (r - r_0) + \int_{M_0}^M \hat{\Pi} \cdot dr(\sigma). \quad (2.2.2)$$

Здесь введен в рассмотрение тензор второго ранга $\hat{\Pi}$ (несимметричный):

$$\hat{\Pi} = \hat{e}' + (r' - r) \times \text{rot } \hat{e}'. \quad (2.2.3)$$

В этой записи $r = r(s)$, а штрихами отмечены величины в точке пути интегрирования. Пользуясь диадным представлением этого тензора

$$\hat{\Pi} = \left[e'_{st} + (a'_q - a_q) \left(\frac{\partial e'_{qt}}{\partial a'_s} - \frac{\partial e'_{st}}{\partial a'_q} \right) \right] i_s i_t, \quad (2.2.4)$$

можно придать формуле Чезаро вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \mathbf{i}_s \int_{M_0}^M \left[\varepsilon'_{st} + (a'_q - a_q) \left(\frac{\partial \varepsilon'_{qt}}{\partial a'_s} - \frac{\partial \varepsilon'_{st}}{\partial a'_q} \right) \right] da'_t. \quad (2.2.5)$$

Вектор перемещения \mathbf{u} , естественно, оказался определенным с точностью до слагаемого вектора

$$\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (2.2.6)$$

представляющего малое перемещение среды как твердого тела — геометрическую сумму перемещения \mathbf{u}_0 точки M_0 и перемещения поворота $\boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ вокруг этой точки.

Интегрируемость выражения (2.2.2) проверяется непосредственно. Надо убедиться в выполнении условия (II.6.5):

$$\text{rot } \hat{\Pi}^* = \text{rot} [\hat{\varepsilon}' + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \text{rot } \hat{\varepsilon}']^* = \text{rot} [\hat{\varepsilon}' - (\text{rot } \hat{\varepsilon}')^* \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})] = 0. \quad (2.2.7)$$

Здесь учтено тождество (I.5.11):

$$[(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \text{rot } \hat{\varepsilon}']^* = -(\text{rot } \hat{\varepsilon}')^* \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}).$$

Полагая теперь $\hat{Q} = (\text{rot } \hat{\varepsilon}')^*$ в тождестве

$$\text{rot} (\hat{Q} \times \mathbf{r}) = \text{rot } \hat{Q} \times \mathbf{r} + \hat{Q}^* - \hat{E} \text{Sp } \hat{Q}, \quad (2.2.8)$$

имеем

$$\begin{aligned} \text{rot} [(\text{rot } \hat{\varepsilon}')^* \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})] &= \text{rot} (\text{rot } \hat{\varepsilon}')^* \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \\ &+ (\text{rot } \hat{\varepsilon}')^{**} - \hat{E} \text{Sp} (\text{rot } \hat{\varepsilon}')^* = \text{Ink } \hat{\varepsilon}' \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \text{rot } \hat{\varepsilon}', \end{aligned}$$

поскольку след ротора симметричного тензора (а значит, и транспонированного тензора) равен нулю. Подстановка в (2.2.7) дает

$$\text{rot } \hat{\Pi}^* = \text{rot } \hat{\varepsilon}' - \text{Ink } \hat{\varepsilon}' \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \text{rot } \hat{\varepsilon}' = -\text{Ink } \hat{\varepsilon}' \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = 0, \quad (2.2.9)$$

и вследствие произвольности вектора $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ приходим снова к условию (2.1.5).

2.3. Пример. Температурное поле. Деформация отдельно взятого изотропного кубика в температурном поле $\Theta(a_1, a_2, a_3)$ представляется известным выражением

$$\hat{\varepsilon} = \alpha \theta \hat{E} \quad (\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \alpha \theta, \gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0), \quad (2.3.1)$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения. В сплошном теле такая деформация возможна при выполнении условия (2.1.5):

$$\begin{aligned} \text{Ink } \alpha \theta \hat{E} &= \text{rot} (\text{rot } \alpha \theta \hat{E})^* = i_s \frac{\partial}{\partial a_s} \times \left(i_t \frac{\partial}{\partial a_t} \times \alpha \theta i_q i_q \right)^* = \\ &= (i_s \times i_q)(i_t \times i_q) \frac{\partial^2 \alpha \theta}{\partial a_s \partial a_t} = e_{sqr} e_{tqm} i_r i_m \frac{\partial^2 \alpha \theta}{\partial a_s \partial a_t} = \\ &= (\delta_{st} \delta_{rm} - \delta_{sm} \delta_{rt}) i_r i_m \frac{\partial^2 \alpha \theta}{\partial a_s \partial a_t} = 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\text{Ink } \alpha \theta \hat{E} = \hat{E} \frac{\partial^2 \alpha \theta}{\partial a_s \partial a_s} - \frac{\partial^2 \alpha \theta}{\partial a_s \partial a_t} i_s i_t = (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) \alpha \theta. \quad (2.3.2)$$

Учитывая еще, что

$$\text{Sp} (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) \alpha \theta = 0,$$

имеем теперь

$$\nabla \nabla \alpha \theta = 0, \quad \frac{\partial^2 \alpha \theta}{\partial a_s \partial a_t} = 0. \quad (2.3.3)$$

Условиями осуществимости деформации в сплошном теле по закону (2.3.1) оказались требования равенства нулю всех вторых производных θ по координатам, так что θ представляет линейную функцию координат. Принимая $\alpha = \text{const}$, имеем

$$\theta = \theta_0 + q_1 a_1 + q_2 a_2 + q_3 a_3 = \theta_0 + q \cdot r, \quad (2.3.4)$$

где $q = \text{grad } \theta$ — постоянный вектор.

Вектор перемещения найдем, подставив это выражение в формулу Чезаро (2.2.5). Отбросив перемещение среды как твердого тела, получим

$$\begin{aligned} u &= \alpha i_s \int_{M_0}^M [(\theta_0 + q_k a'_k) \delta_{st} + (a'_r - a_r)(q_s \delta_{rt} - q_r \delta_{st})] da'_t = \\ &= \alpha \int_{M_1}^M \left[(\theta_0 + q \cdot r') dr' + \frac{1}{2} q d|r' - r|^2 - q \cdot (r' - r) \cdot dr' \right] \end{aligned}$$

и в окончательном виде

$$u = \alpha \theta (r - r_0) - \frac{1}{2} \alpha |r - r_0|^2 \text{grad } \theta. \quad (2.3.5)$$

При законе распределения температуры по объему тела, отличном от линейного, свободное температурное расширение по закону (2.3.1) не может иметь места. На тензор $\hat{E} \alpha \theta$ надо наложить компенсирующий тензор $\hat{\varepsilon}^*$ такой, чтобы при деформации

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^* + \hat{E} \alpha \theta \quad (2.3.6)$$

удовлетворялось условие совместности

$$\text{Ink } \hat{e}^* = -(\hat{E}\nabla^2 - \nabla\nabla)\alpha\theta. \quad (2.3.7)$$

Было бы ошибкой думать, что вектор перемещения u теперь можно представить геометрической суммой векторов u_1 , u_2 , определяемых условиями

$$\text{def } u_1 = \alpha\theta\hat{E}, \quad \text{def } u_2 = \hat{e}^*,$$

так как тензоры $\alpha\theta\hat{E}$ и \hat{e}^* , взятые по отдельности, не удовлетворяют условиям совместности и векторы u_1 , u_2 не существуют.

2.4. Дисторсии Вольтерра. Векторы поворота ω и перемещения u , определяемые интегралами (2.1.6) и (2.2.2), представляют в односвязной области однозначные функции координат a_h точки M — верхнего предела интеграла. В случае двусвязной области в рассмотрение должны быть введены циклические постоянные векторы — см. (II.6.9):

$$\oint_K \text{rot } \hat{e}' \cdot dr' = b, \quad \oint_K (\hat{e}' + r' \times \text{rot } \hat{e}') \cdot dr' = c, \quad (2.4.1)$$

где K — несводимый непрерывным преобразованием в точку контур. Значения ω и u в точке M могут быть теперь записаны в виде

$$\omega = \omega_0 + \int_{M_0}^M \text{rot } \hat{e}' \cdot dr' + nb, \quad (2.4.2)$$

$$u = u_0 + \omega_0 \times (r - r_0) + \int_{M_0}^M [\hat{e}' + (r' - r) \times \text{rot } \hat{e}'] \cdot dr' + + n(c + b \times r), \quad (2.4.3)$$

где n — число оборотов по K -контур на пути интегрирования из M_0 в M . Однозначность определения векторов u и ω теряется. Ее можно восстановить проведением барьера, превращающего двусвязную область в односвязную, однако переход через барьер сопровождается нарушением непрерывности этих векторов.

Пусть σ — поверхность барьера, σ^- и σ^+ — две конгруэнтные с σ поверхности, расположенные непосредственно «над» и «под» барьером; M , M^- , M^+ — близкие друг другу точки на σ , σ^- , σ^+ .

Тогда, принимая M^- за начальную, M^+ за конечную точку пути интегрирования, имеем (рис. 9)

$$\omega^+ = \omega^- + \int_{M^-}^{M^+} \text{rot } \hat{e}' \cdot d\mathbf{r}', \quad (2.4.4)$$

$$u^+ = u^- + \omega^- \times (r^+ - r^-) + \int_{M^-}^{M^+} [\hat{e}' + (r' - r^+) \times \text{rot } \hat{e}'] \cdot d\mathbf{r}'. \quad (2.4.5)$$

При наложении поверхностей σ^- , σ^+ на барьер σ

$$r^+ \rightarrow r, \quad r^- \rightarrow r, \quad r^+ - r^- \rightarrow 0$$

и интегралы (2.4.4), (2.4.5) равны их значениям по замкнутому K -контуру. Приходим к формулам Вейнгартена, определяющим разрывы на барьере векторов ω и u (1901):

$$\omega^+ - \omega^- = b, \quad u^+ - u^- = c + b \times r. \quad (2.4.6)$$

Они указывают на то, что материал на одной стороне барьера испытал относительно материала на другой его стороне малое перемещение, возможное в твердом теле, задаваемое векторами поворота b и поступательного перемещения c . Это можно объяснить так: из двусвязного тела (тора, например) после его рассечения по поверхности σ удален тонкий слой материала, а затем конгруэнтные концы σ^+ и σ^- полученного односвязного тела снова спаяны (в тор), причем им было сообщено малое поступательное перемещение c и малый поворот, определяемый вектором b . Эту операцию образования нового тела из старого Вольтерра назвал дисторсией; Ляв называет ее дислокацией, но в литературе последнего десятилетия термину «дислокация» придается более общее значение. В подверженном дисторсии упругом теле возникает напряженное состояние. Оно может быть теоретически рассчитано по заданию циклических постоянных векторов b , c . Последние могут быть определены экспериментально по измерению смещений и поворотов концов разрезаемого кольцеобразного тела.

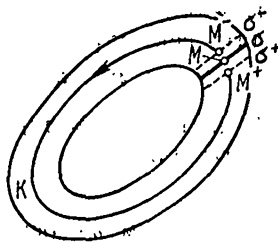


Рис. 9.

Возможность дисторсии в односвязном теле исключается, так как после удаления из него, скажем, тонкого клинообразного тела и последующего сшивания свободных краев теряется непрерывность самого тензора деформации \hat{e} (следовательно, и напряжения становятся разрывными). Это следует из того, что, как указывалось ранее, перемещения в односвязном теле не

могут быть многозначными, если тензор $\hat{\epsilon}$ непрерывен. Этим же следует объяснить, почему при рассмотрении дисторсии говорилось об удалении из тела полоски с обязательно конгруэнтными краями, — дело в том, что разрыв на барьере вектора u , совместимый с предположением о непрерывности тензора $\hat{\epsilon}$, представляется смещением твердого тела. При всяком же разрыве более сложной природы этот тензор не останется непрерывным.

§ 3. Первая мера и первый тензор конечной деформации *)

3.1. Векторные базисы v - и V -объемов. Точка сплошной среды задается материальными координатами q^1, q^2, q^3 . Ее положение в v -объеме определяется вектором-радиусом

$$r = r(q^1, q^2, q^3) = i_s a_s(q^1, q^2, q^3). \quad (3.1.1)$$

В V -объеме положение этой же материальной точки можно задать вектор-радиусом

$$R = R(q^1, q^2, q^3) = i_s x_s(q^1, q^2, q^3) = i_s(a_s + u_s). \quad (3.1.2)$$

В частности, материальными можно считать декартовы координаты v -объема

$$a_s = q^s, \quad (3.1.3)$$

но с таким же основанием за них можно принять и декартовы координаты V -объема

$$x_s = q^s. \quad (3.1.4)$$

Векторный базис в v -объеме задается тройкой векторов

$$r_s = \frac{\partial r}{\partial q^s} = i_k \frac{\partial a_k}{\partial q^s}, \quad (3.1.5)$$

а в V -объеме — тройкой векторов

$$R_s = \frac{\partial R}{\partial q^s} = i_k \frac{\partial x_k}{\partial q^s}. \quad (3.1.6)$$

Векторы взаимных базисов строятся по правилам (V.1.5):

$$r^s = \frac{1}{2} \epsilon^{skt} r_k \times r_t, \quad (3.1.7)$$

$$R^s = \frac{1}{2} \epsilon^{skt} R_k \times R_t. \quad (3.1.8)$$

Здесь

$$\epsilon^{skt} = \frac{1}{Vg} e^{skt}, \quad \epsilon^{skt} = \frac{1}{\sqrt{G}} e^{skt}, \quad (3.1.9)$$

*) Чтение этого раздела предполагает знание материала Приложений IV и V.

причем через g и G обозначаются определители матриц ковариантных компонент

$$g_{sk} = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_k, \quad G_{sk} = \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{R}_k \quad (3.1.10)$$

метрических тензоров v - и V -объемов \hat{g} и \hat{G} , так что

$$g = |g_{sk}| = [\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)]^2, \quad G = |G_{sk}| = [\mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3)]^2. \quad (3.1.11)$$

Сами эти тензоры, играющие роль единичных в v - и соответственно в V -объеме, в их диадных представлениях записываются в виде

$$\hat{g} = g_{sk} \mathbf{r}^s \mathbf{r}^k = g^{sk} \mathbf{r}_s \mathbf{r}_k = \mathbf{r}^k \mathbf{r}_k, \quad (3.1.12)$$

$$\hat{G} = G_{sk} \mathbf{R}^s \mathbf{R}^k = G^{sk} \mathbf{R}_s \mathbf{R}_k = \mathbf{R}^k \mathbf{R}_k. \quad (3.1.13)$$

Здесь, как всегда, введены также контравариантные компоненты метрических тензоров \hat{g} и \hat{G} :

$$g^{sk} = \mathbf{r}^s \cdot \mathbf{r}^k, \quad G^{sk} = \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{R}^k. \quad (3.1.14)$$

Заметим, что тензоры \hat{g} и \hat{G} , являясь единичными в базисах v - и соответственно V -объемов, равны обратным им тензорам:

$$\hat{g} = \hat{g}^{-1}, \quad \hat{G} = \hat{G}^{-1}. \quad (3.1.15)$$

Следствием определений (3.1.7), (3.1.8) служат известные соотношения

$$\mathbf{r}^s \cdot \mathbf{r}_k = g_k^s = \begin{cases} 1, & s = k, \\ 0, & s \neq k, \end{cases} \quad \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{R}_k = G_k^s = \begin{cases} 1, & s = k, \\ 0, & s \neq k. \end{cases} \quad (3.1.16)$$

Заменив здесь \mathbf{r}_k , \mathbf{R}_k их значениями (3.1.5), (3.1.6), имеем

$$\mathbf{r}^s \cdot \mathbf{i}_t \frac{\partial a_t}{\partial q^k} = g_k^s, \quad \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{i}_t \frac{\partial x_t}{\partial q^k} = G_k^s.$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{r}^s \cdot \mathbf{i}_t \frac{\partial a_t}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial a_r} = \mathbf{r}^s \cdot \mathbf{i}_t \frac{\partial a_t}{\partial a_r} = \mathbf{r}^s \cdot \mathbf{i}_r = g_r^s \frac{\partial q^k}{\partial a_r} = \frac{\partial q^s}{\partial a_r}.$$

Итак,

$$\mathbf{r}^s \cdot \mathbf{i}_r = \frac{\partial q^s}{\partial a_r}, \quad \mathbf{r}^s = \frac{\partial q^s}{\partial a_r} \mathbf{i}_r \quad (3.1.17_1)$$

и аналогично

$$\mathbf{R}^s \cdot \mathbf{i}_r = \frac{\partial q^s}{\partial x_r}, \quad \mathbf{R}^s = \frac{\partial q^s}{\partial x_r} \mathbf{i}_r. \quad (3.1.17_2)$$

Следствием являются упомянутые выше соотношения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_s \mathbf{r}^s &= \frac{\partial a_k}{\partial q^s} \frac{\partial q^s}{\partial a_r} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_r = \hat{E}, \quad \mathbf{R}_s \mathbf{R}^s = \frac{\partial x_k}{\partial q^s} \frac{\partial q^s}{\partial x_r} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_r = \hat{E}, \\ \hat{E} &= \hat{g} = \hat{G}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.18)$$

По (3.1.10) и (3.1.14) приходим к формулам

$$g_{sk} = \frac{\partial a_t}{\partial q^s} \frac{\partial a_t}{\partial q^k}, \quad G_{sk} = \frac{\partial x_t}{\partial q^s} \frac{\partial x_t}{\partial q^k}, \quad (3.1.19)$$

$$g^{sk} = \frac{\partial q^s}{\partial a_t} \frac{\partial q^k}{\partial a_t}, \quad G^{sk} = \frac{\partial q^s}{\partial x_t} \frac{\partial q^k}{\partial x_t}. \quad (3.1.20)$$

Набла-оператор в v -объеме определяется символическим вектором (V. 4.3):

$$\nabla = \mathbf{r}^s \frac{\partial}{\partial q^s}. \quad (3.1.21)$$

В V -объеме роль векторов \mathbf{r}^s отходит к \mathbf{R}^s и для набла-оператора применяется обозначение

$$\tilde{\nabla} = \mathbf{R}^s \frac{\partial}{\partial q^s}. \quad (3.1.22)$$

В последующем требуется тщательное различение операций в v - и в V -объемах; действия и величины, относящиеся к V -объему, указываются знаком тильды (\sim). Например, вектор может быть задан его компонентами в базисах v - и V -объемов; его ковариантные и контравариантные компоненты в векторном базисе v -объема обозначаются, как обычно, a_s и a^s , но в векторном базисе V -объема — через \tilde{a}_s , \tilde{a}^s :

$$\mathbf{a} \doteq a_s \mathbf{r}^s = a^s \mathbf{r}_s = \tilde{a}_s \mathbf{R}^s = \tilde{a}^s \mathbf{R}_s. \quad (3.1.23)$$

Тензор, равный градиенту вектора \mathbf{a} , в соответствии со сказанным записывается в метрике v -объема в виде

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{r}^s \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^s} = \mathbf{r}^s \mathbf{r}_k \nabla_s a^k = \mathbf{r}^s \mathbf{r}^k \nabla_s a_k, \quad (3.1.24)$$

а в метрике V -объема имеем отличный от него тензор

$$\tilde{\nabla} \mathbf{a} = \mathbf{R}^s \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^s} = \mathbf{R}^s \mathbf{R}_k \tilde{\nabla}_s \tilde{a}^k = \mathbf{R}^s \mathbf{R}^k \tilde{\nabla}_s \tilde{a}_k. \quad (3.1.25)$$

Это объясняется тем, что транспонированный тензор $(\nabla \mathbf{a})^*$ определен как производная \mathbf{a} по направлению \mathbf{r} , а $(\tilde{\nabla} \mathbf{a})^*$ — по направлению \mathbf{R} :

$$(\nabla \mathbf{a})^* = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}, \quad (\tilde{\nabla} \mathbf{a})^* = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{R}}. \quad (3.1.26)$$

В операциях ковариантного дифференцирования в v - и в V -объемах требуется, конечно различать символы Кристоффеля; например,

$$\nabla_s a^k = \frac{\partial a^k}{\partial q^s} + \left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\} a^t, \quad \tilde{\nabla}_s \tilde{a}^k = \frac{\partial \tilde{a}^k}{\partial q^s} + \left\{ \widetilde{\begin{matrix} k \\ st \end{matrix}} \right\} \tilde{a}^t. \quad (3.1.27)$$

Символы, снабженные знаком тильды, вычисляются по компонентам тензора \hat{G} , а когда этот знак отсутствует — по компонентам \hat{g} :

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\} &= g^{kr} [st, r] = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\frac{\partial g_{sr}}{\partial q^t} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial q^s} - \frac{\partial g_{st}}{\partial q^r} \right), \\ \left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\} &= G^{kr} [\widetilde{st}, r] = \frac{1}{2} G^{kr} \left(\frac{\partial G_{sr}}{\partial q^t} + \frac{\partial G_{tr}}{\partial q^s} - \frac{\partial G_{st}}{\partial q^r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.1.28)$$

Отметим также формулы, обратные (3.1.7), (3.1.8):

$$r_s = \frac{1}{2} \epsilon_{stk} r^t \times r^k, \quad R_s = \frac{1}{2} \epsilon_{stk} R^t \times R^k, \quad (3.1.29)$$

причем

$$\epsilon_{stk} = r_s \cdot (r_t \times r_k) = \sqrt{g} e_{stk}, \quad \epsilon_{stk} = R_s \cdot (R_t \times R_k) \sqrt{G} = e_{stk}. \quad (3.1.30)$$

3.2. Тензоры-градиенты ∇R и $\tilde{\nabla} r$. По (3.1.21), (3.1.22), учитывая определения базисных векторов (3.1.5), (3.1.6), имеем диадные представления этих тензоров

$$\nabla R = r^s \frac{\partial R}{\partial q^s} = r^s R_s, \quad (3.2.1)$$

$$\tilde{\nabla} r = R^s \frac{\partial r}{\partial q^s} = R^s r_s. \quad (3.2.2)$$

Транспонированные тензоры — производная R по направлению r и r по направлению R — определяются равенствами

$$(\nabla R)^* = \frac{dR}{dr} = R_s r^s, \quad (\tilde{\nabla} r)^* = \frac{dr}{dR} = r_s R^s. \quad (3.2.3)$$

Из этих определений следуют основные в последующем формулы

$$dR = (\nabla R)^* \cdot dr = dr \cdot \nabla R, \quad (3.2.4)$$

$$dr = (\tilde{\nabla} r)^* \cdot dR = dR \cdot \tilde{\nabla} r. \quad (3.2.5)$$

Сразу видно также, что тензоры ∇R и $\tilde{\nabla} r$ обратные:

$$\left. \begin{aligned} \nabla R \cdot \tilde{\nabla} r &= r^s R_s \cdot R^k r_k = r^s r_s = \hat{g}, \quad \nabla R = (\tilde{\nabla} r)^{-1}, \\ \tilde{\nabla} r \cdot \nabla R &= R^s r_s \cdot r^k R_k = R^s R_s = \hat{G}, \quad \tilde{\nabla} r = (\nabla R)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

Заметим еще, что в отличие от (3.2.1), (3.2.2) тензоры $\tilde{\nabla} R$, ∇r — единичные тензоры в базисах V - и v -объемов:

$$\tilde{\nabla} R = R^s R_s = \hat{G}, \quad \nabla r = r^s r_s = \hat{g}. \quad (3.2.7)$$

3.3. Первая мера деформации (Коши — Грин). Как уже говорилось в начале п. 1.2, вектор $\overrightarrow{MN} = dr$, определенный в v -объеме двумя бесконечно близкими точками M и N , в V -объеме становится равным вектору $\overrightarrow{M'N'} = dR$. Связь между этими

векторами задается формулами (3.2.4). Из них находится соотношение, определяющее квадрат линейного элемента dS в V -объеме:

$$d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = dS^2 = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{R} \cdot (\nabla \mathbf{R})^* \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \hat{G}^\times \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.3.1)$$

Здесь в рассмотрение введен тензор \hat{G}^\times , называемый ниже первой мерой деформации (или мерой деформации Коши). Этот тензор по (3.2.1) равен

$$\hat{G}^\times = \nabla \mathbf{R} \cdot (\nabla \mathbf{R})^* = r^s \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{R}_k r^k = G_{sk}^\times r^s r^k \quad (3.3.2)$$

и определен, как видно из этого представления, в векторном базисе v -объема своими ковариантными компонентами G_{sk}^\times , равными ковариантным компонентам единичного тензора V -объема \hat{G} , имеющего диадное представление (3.1.13),

$$G_{sk}^\times = G_{sk} = \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{R}_k. \quad (3.3.3)$$

Было бы ошибочно на этом основании отождествлять тензоры \hat{G}^\times и \hat{G} . Контравариантные компоненты $G^{\times sk}$ тензора меры деформации определяются по общему правилу перехода от ко- к контравариантным компонентам (IV.5.4):

$$G^{\times st} = g^{sr} g^{tq} G_{rq}, \quad (3.3.4)$$

и отнюдь не равны контравариантным компонентам G^{sk} тензора \hat{G} — последние определены формулами (3.1.14) и представляют элементы матрицы, обратной $\|\mathbf{G}_{sk}\|$.

Вернемся к квадрату линейного элемента (3.3.1); учитывая (3.3.2), (3.3.3), приходим к его известному представлению квадратичной формой дифференциалов dq^s , образуемой с помощью матрицы ковариантных компонент тензора \hat{G} :

$$dS^2 = d\mathbf{r} \cdot r^s G_{sk} r^k \cdot d\mathbf{r} = dq^i r_i \cdot r^s G_{sk} r^k \cdot r_m dq^m = G_{sk} dq^s dq^k \quad (3.3.5)$$

Для вычисления ковариантных компонент первой меры деформации служат формулы (3.1.19):

$$G_{sk} = \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{R}_k = i_t \frac{\partial x_t}{\partial q^s} \cdot i_m \frac{\partial x_m}{\partial q^k} = \frac{\partial x_t}{\partial q^s} \frac{\partial x_t}{\partial q^k}. \quad (3.3.6)$$

Введем еще в рассмотрение тензор $\hat{G}^{\times -1}$, обратный \hat{G}^\times . Сославшись на (I.7.14), имеем

$$\hat{G}^{\times -1} = (\nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{R}^*)^{-1} = (\nabla \mathbf{R})^{*-1} \cdot (\nabla \mathbf{R})^{-1} = (\nabla \mathbf{R})^{-1*} \cdot (\nabla \mathbf{R})^{-1}$$

и по (3.2.6), (3.2.2), (3.2.3), (3.1.14)

$$\hat{G}^{\times -1} = (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^* \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{r} = r_s \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{R}^k \cdot r_k = G^{sk} r_s r_k. \quad (3.3.7)$$

Контравариантные компоненты этого тензора, он обозначается далее еще \hat{m} , в векторном базисе v -объема равны контравариантным компонентам единичного тензора V -объема \hat{G} .

Вычисление компонент G^{sk} связано с обращением матрицы G_{sk} . Можно поступить иначе. Примем на минуту декартовы координаты точек V -объема за материальные координаты. Тогда

$$x_s = q^s, \quad R_s = i_s = R^s, \quad \tilde{\nabla} r = i_s \frac{\partial r}{\partial x_s}, \quad (\tilde{\nabla} r)^* = \frac{\partial r}{\partial x_k} i_k$$

и по (3.3.7), (3.1.5), возвращаясь к материальным координатам q^s , имеем

$$\hat{G}^{\times -1} = \hat{m} = \frac{\partial r}{\partial x_s} \frac{\partial r}{\partial x_s} = r_t r_m \frac{\partial q^t}{\partial x_s} \frac{\partial q^m}{\partial x_s}. \quad (3.3.8)$$

Итак, снова получим формулы (3.1.20):

$$G^{tm} = \frac{\partial q^t}{\partial x_s} \frac{\partial q^m}{\partial x_s}, \quad (3.3.9)$$

и легко проверить, что матрицы $\|G_{st}\|$, $\|G^{st}\|$ обратные. Действительно, по (3.3.7)

$$G_{st} G^{tr} = \frac{\partial x_m}{\partial q^s} \frac{\partial x_m}{\partial q^t} \frac{\partial q^t}{\partial x_l} \frac{\partial q^r}{\partial x_l} = \frac{\partial x_m}{\partial q^s} \frac{\partial x_m}{\partial x_l} \frac{\partial q^r}{\partial x_l} = \frac{\partial x_m}{\partial q^s} \frac{\partial q^r}{\partial x^m} = \frac{\partial q^r}{\partial q^s} = \delta_s^r,$$

что и требуется. Вычисление по формулам (3.3.9) требует знания преобразования, обратного (3.1.2), то есть выражения материальных координат через декартовы координаты V -объема.

3.4. Геометрическое значение компонент первой меры деформации. Представим в формуле (3.3.1) бесконечно малый вектор $d\mathbf{r}$ в виде произведения его модуля $|d\mathbf{r}| = ds$ на задающий его направление единичный вектор \mathbf{e} . Придем к равенству

$$dS^2 = \mathbf{e} \cdot \hat{G}^{\times} \cdot \mathbf{e} \cdot ds^2, \quad \frac{dS}{ds} = (\mathbf{e} \cdot \hat{G}^{\times} \cdot \mathbf{e})^{1/2}. \quad (3.4.1)$$

В частности, направляя $d\mathbf{r}$ по базисному вектору \mathbf{r}_t , имеем

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_t}{|\mathbf{r}_t|} = \frac{\mathbf{r}_t}{\sqrt{g_{tt}}} \quad \left(\hat{\Sigma}_t \right) \quad (3.4.2)$$

и, сославшись на (3.3.2), получим

$$dS^2 = \frac{1}{g_{tt}} \mathbf{r}_t \cdot G_{qm} \mathbf{r}^q \mathbf{r}^m \cdot \mathbf{r}_t ds^2 = \frac{G_{tt}}{g_{tt}} ds^2, \quad \frac{dS}{ds} = \sqrt{\frac{G_{tt}}{g_{tt}}}. \quad (3.4.3)$$

Этим определяется геометрическое значение диагональных компонент матрицы $\|G_{sk}\|$. Обозначая δ_t относительное удлинение

элементарного отрезка, направленного в v -объеме по базисному вектору r_t , имеем

$$\delta_t = \sqrt{\frac{G_{tt}}{g_{tt}}} - 1, \quad G_{tt} = g_{tt} (1 + \delta_t)^2 \quad \left(\sum_t \right). \quad (3.4.4)$$

Единичный вектор \tilde{e} , имеющий направление вектора dR в V -объеме, по (3.2.4) определяется равенством

$$dR = \tilde{e} dS = e ds \cdot \nabla R = (\nabla R)^* \cdot e ds,$$

так что по (3.4.1)

$$\tilde{e} = \frac{e \cdot \nabla R}{\sqrt{e \cdot \hat{G}^\times \cdot e}} = \frac{(\nabla R)^* \cdot e}{\sqrt{e \cdot \hat{G}^\times \cdot e}}. \quad (3.4.5)$$

Рассматривая теперь в точке v -объема M два направления e, e' под углом β и называя \tilde{e}, \tilde{e}' сопоставляемые им направления в V -объеме, получаем

$$\cos \beta = \tilde{e} \cdot \tilde{e}' = \frac{e \cdot \nabla R \cdot (\nabla R)^* \cdot e'}{\sqrt{e \cdot \hat{G}^\times \cdot e} \sqrt{e' \cdot \hat{G}^\times \cdot e'}}$$

и, сославшись на (3.3.2),

$$\cos \beta = \frac{e \cdot \hat{G}^\times \cdot e'}{\sqrt{e \cdot \hat{G}^\times \cdot e} \sqrt{e' \cdot \hat{G}^\times \cdot e'}}. \quad (3.4.6)$$

В частности, выбрав e и e' по направлениям базисных векторов r_s, r_t , придем к формуле

$$\cos \beta_{st} = \frac{G_{st}}{\sqrt{G_{ss} G_{tt}}} = \frac{G_{st}}{\sqrt{g_{ss} g_{tt}}} \frac{1}{(1 + \delta_s)(1 + \delta_t)} \quad \left(\sum_{s,t} \right), \quad (3.4.7)$$

поясняющей геометрическое значение недиагональных элементов матрицы $\|G_{st}\|$.

Определяя угол φ_{st} , называемый углом сдвига, равенством

$$\beta_{st} = \beta_{st} - \varphi_{st},$$

имеем

$$\begin{aligned} \cos \beta_{st} &= \cos \beta_{st} \cos \varphi_{st} + \sin \beta_{st} \sin \varphi_{st} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{ss} g_{tt}}} (g_{st} \cos \varphi_{st} + \sqrt{g_{ss} g_{tt} - g_{st}^2} \sin \varphi_{st}). \end{aligned}$$

Это позволяет записать (3.4.7) еще в виде

$$g_{st} \cos \varphi_{st} + \sqrt{g_{ss} g_{tt} - g_{st}^2} \sin \varphi_{st} = \frac{G_{st}}{(1 + \delta_s)(1 + \delta_t)}. \quad (3.4.8)$$

3.5. Изменение ориентированной площадки. Вектор ориентированной площадки ndo в v -объеме может быть представлен в виде

$$ndo = \frac{1}{2} e' \times e'' ds' ds'',$$

где e' , e'' — единичные векторы в плоскости площадки. В V -объеме он преобразуется в вектор

$$N dO = \frac{1}{2} \tilde{e}' \times \tilde{e}'' dS' dS'',$$

и по (3.4.5), (3.4.1), (3.2.1) (3.2.3)

$$N dO = \frac{1}{2} ds' ds'' [(\nabla R)^* \cdot e'] \times (e'' \cdot \nabla R) = \frac{1}{2} ds' ds'' R_s \times R_q e'^s e''^q, \quad (3.5.1)$$

где e'^s , e''^q — контравариантные компоненты e' , e'' в базисе v -объема. Сославшись теперь на (3.1.20), (3.1.30), имеем

$$\begin{aligned} N dO &= \frac{1}{2} ds' ds'' \epsilon_{sqi} R^t e'^s e''^q = \frac{1}{2} ds' ds'' \sqrt{\frac{G}{g}} (r_s \times r_q) \cdot r_i e'^s e''^q R^t = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} ds' ds'' (e' \times e'') \cdot r_i R^t = \sqrt{\frac{G}{g}} n \cdot r_i R^t d\sigma \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

или по (3.2.3)

$$N dO = \sqrt{\frac{G}{g}} n \cdot (\tilde{\nabla} r)^* d\sigma = \sqrt{\frac{G}{g}} \tilde{\nabla} r \cdot n d\sigma. \quad (3.5.3)$$

Отсюда, имея в виду также (3.3.7), приходим к соотношению

$$\frac{dO}{d\sigma} = \left\{ \frac{G}{g} [n \cdot (\tilde{\nabla} r)^*] \cdot (\tilde{\nabla} r \cdot n) \right\}^{1/2} = \left[\frac{G}{g} n \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot n \right]^{1/2}, \quad (3.5.4)$$

поясняющему геометрическое значение тензора $\hat{G}^{\times^{-1}}$; им определяется отношение площадей ориентированных площадок V - и v -объемов вполне подобно тому, как мерой деформации \hat{G}^{\times} определяется отношение длин отрезков [см. (3.4.1)].

Теперь по (3.5.3) имеем

$$N = \frac{\tilde{\nabla} r \cdot n}{\sqrt{n \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot n}} = \frac{(\nabla R)^{-1} \cdot n}{\sqrt{n \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot n}}. \quad (3.5.5)$$

Эта формула аналогична (3.4.5).

3.6. Первый тензор конечной деформации. Замена в выражении первой меры деформации вектор-радиуса R точки V -объема его значением через вектор перемещения u вводит в рассмотрение симметричный тензор второго ранга, называемый первым тензором конечной деформации (Коши — Грина) и обозначаемый далее

$$\hat{\mathcal{E}} = \text{Def } u.$$

(в противопоставление линейному тензору деформации $\hat{\epsilon} = \text{def } u$). Сославшись на (1.1.4) и (3.3.2) и заменив по (3.2.7)

единичный тензор \hat{E} его представлением \hat{g} в базисе v -объема, имеем

$$\hat{G}^\times = (\hat{g} + \nabla u) \cdot [\hat{g} + (\nabla u)^*] = \hat{g} + \nabla u + (\nabla u)^* + \nabla u \cdot (\nabla u)^*. \quad (3.6.1)$$

Определив $\hat{\mathcal{E}}$ равенством

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^* + \nabla u \cdot (\nabla u)^*] = \hat{e} + \frac{1}{2} \nabla u \cdot (\nabla u)^*, \quad (3.6.2)$$

получим

$$\hat{G}^\times = \hat{g} + 2\hat{\mathcal{E}}, \quad \hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} (\hat{G}^\times - \hat{g}). \quad (3.6.3)$$

Если материальными координатами точки считать ее декартовы координаты a_s в системе осей $OX_1X_2X_3$ и через $u_{(s)}$ обозначить проекции u на эти оси, то по (3.3.6) компоненты тензора в этих осях представляются в виде

$$\mathcal{E}_{(ss)} = e_{(ss)} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_{(1)}}{\partial a_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{(2)}}{\partial a_s} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{(3)}}{\partial a_s} \right)^2 \right], \quad (3.6.4)$$

$$\mathcal{E}_{(sk)} = \frac{1}{2} \Gamma_{(sk)} = e_{(sk)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{(1)}}{\partial a_s} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial a_k} + \frac{\partial u_{(2)}}{\partial a_s} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial a_k} + \frac{\partial u_{(3)}}{\partial a_s} \frac{\partial u_{(3)}}{\partial a_k} \right), \quad (3.6.5)$$

где $e_{(ss)}$, $e_{(sk)}$ определяются по формулам (1.2.7), (1.2.8), в записи которых u_s заменяются на $u_{(s)}$, чтобы отличить проекции u на оси декартовой системы (перемещения) от ковариантных компонент u_s этого вектора в векторном базисе r_s .

Выражения ковариантных компонент \mathcal{E}_{sk} тензора конечной деформации Коши через ковариантные компоненты вектора перемещения записываются по (V.4.5), (V.4.6) в виде

$$\mathcal{E}_{sk} = \frac{1}{2} \Gamma_{sk} = e_{sk} + \frac{1}{2} g^{mt} \nabla_s u_m \nabla_k u_t, \quad (3.6.6)$$

причем

$$e_{sk} = \frac{1}{2} (\nabla_s u_k + \nabla_k u_s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial q^k} + \frac{\partial u_k}{\partial q^s} \right) - \left\{ \begin{matrix} r \\ s k \end{matrix} \right\} u_r. \quad (3.6.7)$$

Формулы, связывающие компоненты тензора конечной деформации с относительными удлинениями элементарных отрезков на базисных векторах r_s в v -объеме и с углами сдвига φ_{st} , непосредственно получаются из (3.4.4) и (3.4.8) при замене G_{tt} , G_{st} соответственно на $g_{tt} + 2e_{tt}$ и $g_{st} + 2e_{st}$. Они записываются в виде

$$\delta_t = \sqrt{1 + 2e_{tt}} - 1, \quad \sin \varphi_{st} = \frac{\Gamma_{st}}{(1 + \delta_s)(1 + \delta_t)}, \quad (3.6.8)$$

если в качестве материальных координат ввести декартовы координаты a_s в v -объеме.

Как указывалось в п. 1.1, в линейной теории упругости принимается предположение о малости компонент тензора $\nabla \mathbf{u}$, позволяющее пренебречь квадратами этих величин по сравнению с первыми степенями. При этом условии тензор конечной деформации заменяется линейным тензором деформации

$$\hat{\mathcal{E}} \approx \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*] = \hat{\mathbf{e}}, \quad \mathcal{E}_{st} \approx e_{st} \quad (3.6.9)$$

и по формулам (3.6.8)

$$\delta_t \approx e_{tt}, \quad \sin \varphi_{st} \approx \varphi_{st} = \gamma_{st}. \quad (3.6.10)$$

Этим объясняются принятые в линейной теории наименования диагональных компонент тензора $\hat{\mathbf{e}}$ относительными удлинениями, а недиагональных — сдвигами. Последние здесь представляют изменения первоначально прямых углов между отрезками, параллельными координатным осям.

Относительные удлинения δ_k и сдвиги φ_{st} в большом числе задач теории упругости оказываются достаточно малыми, что дает основание к замене формул (3.6.8) приближенными равенствами (3.6.10). Однако малость самих относительных удлинений и сдвигов еще не может служить основанием для замены тензора $\hat{\mathcal{E}}$ на $\hat{\mathbf{e}}$ — требуется, как говорилось, малость всех компонент тензора-градиента перемещения $\nabla \mathbf{u}$. Так, в п. 3.8 будет приведен пример, когда $\hat{\mathcal{E}} = 0$ (поворот среды как твердого тела), тогда как $\hat{\mathbf{e}} \neq 0$ и компоненты этого тензора могут быть сколь угодно большими. Очевидно, что здесь возможность отождествления тензоров \mathcal{E} и $\hat{\mathbf{e}}$ отпадает. Эти же вопросы рассматриваются в п. 3.9.

3.7. Главные деформации, главные оси деформации. Конечно, на тензоры \hat{G}^\times и $\hat{\mathcal{E}}$, как на симметричные тензоры второго ранга, распространяется все сказанное в пп. 2.1 и 2.2 гл. I. Главные деформации, обозначаемые E_s , определяются из характеристического уравнения тензора $\hat{\mathcal{E}}$

$$|\mathcal{E}_{(st)} - E \delta_{st}| = 0 \quad (3.7.1)$$

или, в другой записи (IV.7.4),

$$|g^{tr} \mathcal{E}_{sr} - E g_s^t| = 0. \quad (3.7.2)$$

Аналогично главным касательным напряжениям в п. 2.2 гл. I вводятся главные сдвиги

$$E_2 - E_3 = \Gamma_1, \quad E_1 - E_3 = \Gamma_2, \quad E_1 - E_2 = \Gamma_3 \quad (E_1 > E_2 > E_3). \quad (3.7.3)$$

Через них выражается второй инвариант девиатора тензора

$$-I_2(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}}) = \frac{1}{6} (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2) = \frac{\Gamma^2}{4}. \quad (3.7.4)$$

Здесь, подобно (2.2.11) гл. I, введена величина, называемая интенсивностью деформации сдвига:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)} = 2 \sqrt{-I_2(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})}. \quad (3.7.5)$$

3.8. Конечный поворот среды как твердого тела. При таком перемещении вектор-радиус \mathbf{r} , не изменяя своей длины и ориентации относительно системы осей, повернутых вместе со средой, станет равным [см. (1.8.3)]

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{i}_s \mathbf{i}'_s = a_s \mathbf{i}'_s,$$

где $\hat{\mathbf{A}}$ — тензор поворота, \mathbf{i}'_s — единичные векторы повернутых осей. В этом случае $\mathbf{r}_s = \mathbf{i}_s$, $\mathbf{R}_s = \mathbf{i}'_s$, так что по (3.2.1)

$$\nabla \mathbf{R} = \hat{\mathbf{A}}, \quad (\nabla \mathbf{R})^* = \hat{\mathbf{A}}^*, \quad \hat{\mathbf{G}}^\times = \nabla \mathbf{R} \cdot (\nabla \mathbf{R})^* = \hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathcal{E}}$$

и по (3.6.3)

$$\hat{\mathcal{E}} = 0. \quad (3.8.1)$$

Этого следовало ожидать, так как перемещение среды как твердого тела не сопровождается изменениями длин элементов и углов между ними. Однако линейный тензор деформации отнюдь не равен нулю:

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*] = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{R} + (\nabla \mathbf{R})^*] - 2\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{i}_s \mathbf{i}'_s + \mathbf{i}'_s \mathbf{i}_s - 2\mathbf{i}_s \mathbf{i}_s). \quad (3.8.2)$$

Например, при повороте на 90° вокруг оси \mathbf{i}_3

$$\mathbf{i}'_1 = \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{i}'_2 = -\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}'_3 = \mathbf{i}_3, \quad \hat{\mathcal{E}} = -(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2)$$

и, значит, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -1$.

Линейный вектор поворота определяется по (1.2.12):

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{R} - \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{i}_s \times \frac{\partial}{\partial a_s} (\mathbf{i}'_k - \mathbf{i}_k) a_k = \frac{1}{2} \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}'_s. \quad (3.8.3)$$

3.9. Выражение тензора конечной деформации через линейный тензор деформации и линейный вектор поворота. Обратившись к формулам (1.2.13) и (3.6.2), имеем

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{E}} - \hat{\Omega}) \cdot (\hat{\mathcal{E}} + \hat{\Omega}) = \hat{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{E}}^2 + \hat{\mathcal{E}} \cdot \hat{\Omega} - \hat{\Omega} \cdot \hat{\mathcal{E}} - \hat{\Omega}^2)$$

и, сославшись на (1.6.12), придем к формуле

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} [\hat{\mathcal{E}}^2 + \hat{\mathcal{G}} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathcal{E}} - (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathcal{E}})^*] \quad (3.9.1)$$

(в базисе ν -объема $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathcal{G}}$). Из нее следует, что условия

$$|\varepsilon_{sh}| \ll 1 \quad (3.9.2)$$

еще не являются достаточными для отождествления тензоров $\hat{\mathcal{E}}$ и \hat{e} даже при малости компонент тензора $\hat{\mathcal{E}}$; тогда по (3.9.2) будет мал и вектор ω , но не исключено, что величины e_{sk} имеют более высокий порядок малости, чем ω_k . Тогда в формуле (3.9.1), придется сохранить квадратичные относительно ω слагаемые:

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{e} + \frac{1}{2}(\hat{g}\omega \cdot \omega - \omega\omega), \quad (3.9.3)$$

а при $|e_{qh}| \ll |\omega_k|$ не исключена также возможность использования этой формулы в виде

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(\hat{g}\omega \cdot \omega - \omega\omega). \quad (3.9.4)$$

Она действительно может осуществиться в задачах о деформировании тел с резко отличающимися по различным направлениям размерами (весьма тонкий стержень, тонкая плита) при некоторых условиях нагружения.

Из (3.9.1) следует вместе с тем, что замена тензора $\hat{\mathcal{E}}$ линейным тензором деформации требует малости одного порядка не только компонент последнего e_{sk} , но и компонент вектора ω :

$$|e_{sk}| \ll 1, \quad |\omega_k| \ll 1. \quad (3.9.5)$$

Но эти условия эквивалентны (1.1.5):

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial u_s} \right| \ll 1. \quad (3.9.6)$$

§ 4. Вторая мера и второй тензор конечной деформации

4.1. Вторая мера конечной деформации. Введение первой меры деформации \hat{G}^\times и обратного ей тензора $\hat{G}^{\times-1}$ позволило указать способы определения геометрических объектов (длины отрезков, углов между ними, ориентированных площадок) V -объема по их заданию в v -объеме. Здесь будет рассмотрена обратная задача — определение этих объектов в v -объеме по их заданию в V -объеме. Очевидно, что ее решение сведется к замене в построениях § 3 векторов r на R , а R на r . Тот и другой вектор мы будем считать функциями материальных координат q^s .

Исходным соотношением вместо (3.2.4) теперь является (3.2.5):

$$dr = dR \cdot \tilde{\nabla} r = (\tilde{\nabla} r)^* \cdot dR,$$

и, полагая $dR = \tilde{e} |dR| = \tilde{e} dS$, $dr = e |dr| = e ds$, получим

$$dr \cdot dr = ds^2 = \tilde{e} \cdot \tilde{\nabla} r \cdot (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \tilde{e} dS^2 = \tilde{e} \cdot \hat{g}^\times \cdot \tilde{e} dS^2. \quad (4.1.1)$$

Введенный здесь симметричный тензор второго ранга

$$\hat{g}^\times = \tilde{\nabla} \mathbf{r} \cdot (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^* = \mathbf{R}^s \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_k \mathbf{R}^k = g_{sk} \mathbf{R}^s \mathbf{R}^k \quad (4.1.2)$$

представляет вторую меру деформации. Его компоненты g_{sk} в векторном базисе V -объема равны ковариантным компонентам единичного тензора \hat{g} в v -объеме; но, конечно, нельзя отождествлять эти тензоры: контравариантные компоненты меры деформации \hat{g}^\times определяются формулами

$$g^{\times sk} = G^{sr} G^{kq} \cdot g_{rq}. \quad (4.1.3)$$

Для вычисления ковариантных компонент \hat{g}^\times служат формулы

$$g_{sk} = \mathbf{i}_t \frac{\partial a_t}{\partial q^s} \cdot \mathbf{i}_q \frac{\partial a_q}{\partial q^k} = \frac{\partial a_t}{\partial q^s} \frac{\partial a_t}{\partial q^k}. \quad (4.1.4)$$

Тензор $\hat{g}^{\times -1} = \hat{M}$, обратный \hat{g}^\times , определяется из соотношения

$$\hat{g}^{\times -1} = [\tilde{\nabla} \mathbf{r} \cdot (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^*]^{-1} = (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^{*-1} \cdot (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^{-1} = (\nabla \mathbf{R})^* \cdot \nabla \mathbf{R}. \quad (4.1.5)$$

Здесь использованы равенства (3.2.6); по (3.2.3) имеем

$$\hat{g}^{\times -1} = \mathbf{R}_s \mathbf{r}^s \cdot \mathbf{r}^k \mathbf{R}_k = g^{sk} \mathbf{R}_s \mathbf{R}_k. \quad (4.1.6)$$

Компоненты этого тензора представляют элементы матрицы, обратной g_{sk} . Повторив вычисление, подобное (3.3.9), получим также

$$g^{sk} = \frac{\partial q^s}{\partial a_r} \frac{\partial q^k}{\partial a_r}. \quad (4.1.7)$$

4.2. Геометрическое значение компонент второй меры деформации. По (4.1.1)

$$\frac{dS}{ds} = (\tilde{\mathbf{e}} \cdot \hat{g}^\times \cdot \tilde{\mathbf{e}})^{-1/2}. \quad (4.2.1)$$

В частности, рассматривая направление, определяемое базисным вектором \mathbf{R}_k в V -объеме, возвращаемся к формулам (3.4.3), (3.4.4):

$$\frac{dS}{ds} = \left(\frac{g_{kk}}{G_{kk}} \right)^{-1/2} = 1 + \delta_k, \quad \frac{g_{kk}}{G_{kk}} = \frac{1}{(1 + \delta_k)^2} \quad \left(\sum_k \right). \quad (4.2.2)$$

Аналогично (3.4.5) имеем также соотношения

$$\mathbf{e} = \frac{\tilde{\mathbf{e}} \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{r}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{e}} \cdot \hat{g}^\times \cdot \tilde{\mathbf{e}}}} = \frac{(\tilde{\nabla} \mathbf{r})^* \cdot \tilde{\mathbf{e}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{e}} \cdot \hat{g}^\times \cdot \tilde{\mathbf{e}}}}, \quad (4.2.3)$$

определяющие единичный вектор v -объема, который в V -объеме имеет направление $\tilde{\mathbf{e}}$. Отсюда имеем

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' = \cos \beta = \frac{\tilde{\mathbf{e}} \cdot \hat{g}^\times \cdot \tilde{\mathbf{e}}'}{\sqrt{\tilde{\mathbf{e}} \cdot \hat{g}^\times \cdot \tilde{\mathbf{e}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}' \cdot \hat{g}^\times \cdot \tilde{\mathbf{e}}'}} \quad (4.2.4)$$

и, направляя \tilde{e} и \tilde{e}' по базисным векторам R_s, R_t в V -объеме, придем, как следовало ожидать, к формуле

$$\cos \beta_{st} = \frac{g_{st}}{\sqrt{g_{ss}g_{tt}}} = \frac{r_s \cdot r_t}{|r_s||r_t|} \quad \left(\sum_{st} \right). \quad (4.2.5)$$

Отметим еще аналоги формул (3.5.4), (3.5.5):

$$\frac{dO}{do} = \sqrt{\frac{\hat{G}}{g}} (N \cdot \hat{g}^{\times -1} \cdot N)^{-1/2}, \quad n = \frac{\nabla R \cdot N}{\sqrt{N \cdot \hat{g}^{\times -1} \cdot N}} = \frac{(\tilde{\nabla} r)^{-1} \cdot N}{\sqrt{N \cdot \hat{g}^{\times -1} \cdot N}}. \quad (4.2.6)$$

4.3. Второй тензор конечной деформации (Альманзи — Гамель). Вводя в рассмотрение вектор перемещения и сославшись на (3.2.7), имеем

$$\tilde{\nabla} r = \tilde{\nabla} (R - u) = \hat{G} - \tilde{\nabla} u, \quad (4.3.1)$$

так что по (4.1.2)

$$\hat{g}^{\times} = \tilde{\nabla} r \cdot (\tilde{\nabla} r)^* = \hat{G} - [\tilde{\nabla} u + (\tilde{\nabla} u)^*] + \tilde{\nabla} u \cdot (\tilde{\nabla} u)^* = \hat{G} - 2\hat{\mathcal{E}}. \quad (4.3.2)$$

Здесь введен в рассмотрение тензор деформации Альманзи — Гамеля

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} (\hat{G} - \hat{g}^{\times}) = \hat{\mathcal{E}} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla} u \cdot (\tilde{\nabla} u)^*, \quad (4.3.3)$$

где $\hat{\mathcal{E}}$ — вычисляемый в базисе V -объема линейный тензор деформации

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} [\tilde{\nabla} u + (\tilde{\nabla} u)^*] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_s}{\partial q^t} + \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial q^s} - \left\{ \tilde{r} \right\}_{st} \tilde{u}_r \right) R^s R^t. \quad (4.3.4)$$

Принимая декартовы координаты x_s в V -объеме за материальные, имеем также

$$\tilde{\mathcal{E}}_{sk} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_{(s)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{(k)}}{\partial x_s} \right) - \frac{\partial u_{(t)}}{\partial x_s} \frac{\partial u_{(t)}}{\partial x_k} \right]. \quad (4.3.5)$$

Через линейный тензор деформации и линейный вектор поворота тензор деформации Альманзи — Гамеля выражается формулой, подобной (3.9.1):

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}} - \frac{1}{2} [\hat{\mathcal{E}}^2 + \hat{G} \tilde{\omega} \cdot \tilde{\omega} - \tilde{\omega} \tilde{\omega} - \tilde{\omega} \times \hat{\mathcal{E}} - (\tilde{\omega} \times \hat{\mathcal{E}})^*]. \quad (4.3.6)$$

Сопоставляя равенства (3.6.3) и (4.3.2):

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_{sk} r^s r^k = \frac{1}{2} (\hat{G}^{\times} - \hat{g}) = \frac{1}{2} (G_{sk} - g_{sk}) r^s r^k, \\ \hat{\mathcal{E}} &= \tilde{\mathcal{E}}_{sk} R^s R^k = \frac{1}{2} (\hat{G} - \hat{g}^{\times}) = \frac{1}{2} (G_{sk} - g_{sk}) R^s R^k, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.7)$$

приходим к соотношениям

$$\mathcal{E}_{sh} = \tilde{\mathcal{E}}_{sh}. \quad (4.3.8)$$

Ковариантные компоненты тензоров $\hat{\mathcal{E}}$ и $\hat{\tilde{\mathcal{E}}}$ — первого в базисе v -объема, второго в базисе V -объема — равны друг другу. Но, конечно, было бы ошибочно отождествлять эти тензоры ($\hat{\mathcal{E}} \neq \hat{\tilde{\mathcal{E}}}$).

§ 5. Связь между мерами деформации

5.1. Сопоставление мер деформации и обратных им тензоров. В §§ 3 и 4 этой главы были введены четыре меры деформации: мера Коши \hat{G}^\times и тензор $\hat{M} = \hat{g}^{\times-1}$, обратный мере \hat{g}^\times :

$$\hat{G}^\times = \nabla R \cdot (\nabla R)^*, \quad \hat{g}^{\times-1} = (\tilde{\nabla} r)^{\times-1} \cdot (\tilde{\nabla} r)^{-1} = (\nabla R)^* \cdot (\nabla R) = \hat{M}, \quad (5.1.1)$$

а также вторая мера \hat{g}^\times и тензор, обратный первой мере \hat{G}^\times Коши:

$$\hat{g}^\times = \tilde{\nabla} r \cdot (\tilde{\nabla} r)^*, \quad \hat{G}^{\times-1} = (\nabla R)^{\times-1} \cdot (\nabla R)^{-1} = (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \tilde{\nabla} r = \hat{m}. \quad (5.1.2)$$

Тензоры \hat{G}^\times и \hat{m} определены в базисах v -объема:

$$\hat{G}^\times = G_{sk} r^s r^k, \quad \hat{m} = \hat{G}^{\times-1} = G^{sk} r_s r_k, \quad (5.1.3)$$

где G_{sk} , G^{sk} — ко- и контравариантные компоненты единичного тензора V -объема.

Представления \hat{g}^\times и \hat{M} в базисах V -объема имеют вид

$$\hat{g}^\times = g_{sk} R^s R^k, \quad \hat{M} = g^{sk} R_s R_k, \quad (5.1.4)$$

причем g_{sk} , g^{sk} — ко- и контравариантные компоненты единичного тензора v -объема.

Формулы для компонент введенных тензоров в декартовой системе осей $OX_1 X_2 X_3$ записываются в виде

$$G_{(sk)} = \frac{\partial x_t}{\partial a_s} \frac{\partial x_t}{\partial a_k}, \quad M_{(sk)} = \frac{\partial x_s}{\partial a_t} \frac{\partial x_k}{\partial a_t}, \quad (5.1.5)$$

$$g_{(sk)} = \frac{\partial a_t}{\partial x_s} \frac{\partial a_t}{\partial x_k}, \quad m_{(sk)} = \frac{\partial a_s}{\partial x_t} \frac{\partial a_k}{\partial x_t}. \quad (5.1.6)$$

5.2. Связь между инвариантами. Известно [см. (I.9.16)], что главные значения произведений тензоров $\hat{Q} \cdot \hat{Q}^*$ и $\hat{Q}^* \cdot \hat{Q}$ равны друг другу. Поэтому, называя главные значения тензоров (5.1.1), (5.1.2) через G_s , M_s , g_s , m_s , имеем

$$G_s = M_s, \quad g_s = m_s. \quad (5.2.1)$$

Вместе с тем главные значения тензора \hat{Q}^{-1} равны обратным величинам главных значений \hat{Q} . Поэтому

$$G_s = \frac{1}{m_s} = \frac{1}{g_s}, \quad g_s = \frac{1}{M_s} = \frac{1}{G_s}. \quad (5.2.2)$$

Отсюда следуют формулы связи главных инвариантов [см. (I.10.15), (I.10.16)]:

$$I_1(\hat{G}^\times) = I_1(\hat{M}), \quad I_2(\hat{G}^\times) = I_2(\hat{m}), \quad (5.2.3)$$

$$I_1(\hat{G}^\times) = \frac{I_2(\hat{g}^\times)}{I_3(\hat{g}^\times)}, \quad I_2(\hat{G}^\times) = \frac{I_1(\hat{g}^\times)}{I_3(\hat{g}^\times)}, \quad I_3(\hat{G}^\times) = \frac{1}{I_3(\hat{g}^\times)} \quad (5.2.4)$$

и, конечно, обращения этих формул

$$I_1(\hat{g}^\times) = \frac{I_2(\hat{G}^\times)}{I_3(\hat{G}^\times)}, \quad I_2(\hat{g}^\times) = \frac{I_1(\hat{G}^\times)}{I_3(\hat{G}^\times)}, \quad I_3(\hat{g}^\times) = \frac{1}{I_3(\hat{G}^\times)}. \quad (5.2.5)$$

К приведенным соотношениям следует добавить формулы, определяющие главные инварианты тензоров мер деформации \hat{G}^\times и g^\times . По (5.1.3), (5.1.4) имеем

$$I_1(\hat{G}^\times) = G_{sk} r^s \cdot r^k = g^{sk} G_{sk}, \quad I_1(\hat{g}^\times) = g_{sk} R^s \cdot R^k = G^{sk} g_{sk}, \quad (5.2.6)$$

что согласуется с определением (IV.7.5). Далее, по (IV.7.6)

$$I_3(\hat{G}^\times) = \frac{|G_{sk}|}{g} = \frac{G}{g}, \quad I_3(\hat{g}^\times) = \frac{|g_{sk}|}{G} = \frac{g}{G}. \quad (5.2.7)$$

Теперь по (5.2.4), (5.2.5) получаем

$$I_2(\hat{G}^\times) = \frac{G}{g} g_{sk} G^{sk}, \quad I_2(\hat{g}^\times) = \frac{g}{G} g^{sk} G_{sk}. \quad (5.2.8)$$

Это соответствует (IV.7.10).

5.3. Представление мер деформации в главных осях. Через e обозначаются единичные векторы главных осей мер деформации \hat{G}^\times и $\hat{G}^{\times^{-1}}$:

$$\hat{G}^\times = \sum_{s=1}^3 G_s e e, \quad \hat{G}^{\times^{-1}} = \sum_{s=1}^3 \frac{ss}{G_s} e e. \quad (5.3.1)$$

В формуле (3.4.5) примем $e = \overset{s}{e}$; тогда

$$e \cdot \hat{G}^\times \cdot e = \overset{s}{e} \cdot \hat{G}^\times \cdot \overset{s}{e} = G_s, \quad \overset{s}{e} = \frac{\overset{s}{e} \cdot \nabla R}{\sqrt{G_s}} = \frac{\nabla R^s \cdot \overset{s}{e}}{\sqrt{G_s}}, \quad (5.3.2)$$

так что

$$\hat{A} = \overset{s}{e}\overset{s}{e} = \sum_{s=1}^3 \frac{\overset{ss}{e}\overset{ss}{e}}{\sqrt{G_s}} \cdot \nabla R = \hat{G}^{\times -1/2} \cdot \nabla R. \quad (5.3.3)$$

Этим определяется тензор поворота главных осей тензора \hat{G}^{\times} при деформации v -объема. Но триэдры главных осей двух тензоров \hat{G}^{\times} и \hat{M} , имеющих одинаковые главные значения, связаны преобразованием поворота [см. (I.9.17)], а поворот тензора \hat{G}^{\times} осуществляется тензором поворота (5.3.3). Поэтому \hat{M} — это «повернутый тензор \hat{G}^{\times} » и по (I.9.17)

$$\hat{M} = \hat{A}^* \cdot \hat{G}^{\times} \cdot \hat{A} = \sum_{s=1}^3 \overset{s}{e}\overset{s}{e} \cdot \hat{G}^{\times} \cdot \sum_{q=1}^3 \overset{q}{e}\overset{q}{e} = \sum_{s=1}^3 G_s \overset{s}{e}\overset{s}{e}, \quad (5.3.4)$$

откуда следует также, что

$$\hat{g}^{\times} = \hat{M}^{-1} = \sum_{s=1}^3 \frac{\overset{s}{e}\overset{s}{e}}{G_s}. \quad (5.3.5)$$

Заметим еще, что соотношение (5.3.3), переписываемое в виде

$$\nabla R = \hat{G}^{\times 1/2} \cdot \hat{A}, \quad \nabla R^* = \hat{A}^* \cdot \hat{G}^{\times 1/2}, \quad (5.3.6)$$

согласуется с представлением (I.10.17) несимметричного тензора в форме произведения справа или слева тензора поворота на симметричный положительный тензор. Из (5.3.6) сразу же следует и соотношение (5.3.4):

$$\nabla R^* \cdot \nabla R = \hat{M} = \hat{A}^* \cdot \hat{G}^{\times} \cdot \hat{A}.$$

Заметим еще, что следствием формул (5.3.6) и (3.2.6) являются представления тензоров $\tilde{\nabla} r$, ∇r^* в виде

$$\tilde{\nabla} r = \hat{A}^* \cdot \hat{G}^{\times -1/2}, \quad \tilde{\nabla} r^* = \hat{G}^{\times -1/2} \cdot \hat{A}. \quad (5.3.7)$$

Определение тензора поворота, когда известны исходные преобразования (3.1.1), (3.1.2) v -объема в V -объем, требует знания тензора $\hat{G}^{\times -1/2}$; для этого должны быть известны главные направления и главные значения тензора \hat{G}^{\times} . Другой прием основан на отыскании компонент тензора $\hat{G}^{\times -1/2}$. По (I.6.9) это сводится к системе уравнений

$$G_{(st)}^{-1/2} G_{(tq)}^{-1/2} = G_{(sq)}^{-1}, \quad (5.3.8)$$

процедура решения которой, по существу, не отличается от разыскания главных осей и главных направлений тензора \hat{G}^{\times} . Она значительно облегчается, когда поле вектора перемещения плоское. См. п. 6.2 этой главы.

5.4. Инварианты тензоров конечной деформации. Они вычисляются по инвариантам мер деформации \hat{G}^\times и \hat{g}^\times с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2} (\hat{G}^\times - \hat{E}), \quad \hat{\mathcal{E}}^2 = \frac{1}{4} (\hat{G}^{\times 2} - 2\hat{G}^\times + \hat{E}), \quad \hat{\mathcal{E}}^3 = \frac{1}{8} (\hat{G}^{\times 3} - 3\hat{G}^{\times 2} + 3\hat{G}^\times - \hat{E}), \\ \hat{\hat{\mathcal{E}}} &= \frac{1}{2} (\hat{E} - \hat{g}^\times), \quad \hat{\hat{\mathcal{E}}}^2 = \frac{1}{4} (\hat{g}^{\times 2} - 2\hat{g}^\times + \hat{E}), \quad \hat{\hat{\mathcal{E}}}^3 = \frac{1}{8} (-\hat{g}^{\times 3} + 3\hat{g}^{\times 2} - 3\hat{g}^\times + \hat{E}) \end{aligned} \right\} \quad (5.4.1)$$

и формул [см. (I. 10.10), (I. 10.11)]

$$\left. \begin{aligned} I_2(\hat{Q}) &= \frac{1}{2} [I_1^2(\hat{Q}) - I_1(\hat{Q}^2)], \\ I_3(\hat{Q}) &= \frac{1}{3} [I_1(\hat{Q}^3) - I_1(\hat{Q})I_1(\hat{Q}^2) + I_1(\hat{Q})I_2(\hat{Q})]. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.2)$$

Получаем

$$\begin{aligned} I_1(\hat{\mathcal{E}}) &= \frac{1}{2} [I_1(\hat{G}^\times) - 3], \quad I_2(\hat{\mathcal{E}}) = \frac{1}{4} [I_2(\hat{G}^\times) - 2I_1(\hat{G}^\times) + 3], \quad I_3(\hat{\mathcal{E}}) = \\ &= \frac{1}{8} [I_3(\hat{G}^\times) - I_2(\hat{G}^\times) + I_1(\hat{G}^\times) - 1], \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

$$\begin{aligned} I_1(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) &= \frac{1}{2} [3 - I_1(\hat{g}^\times)], \quad I_2(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) = \frac{1}{4} [I_2(\hat{g}^\times) - 2I_1(\hat{g}^\times) + 3], \quad I_3(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) = \\ &= \frac{1}{8} [-I_3(\hat{g}^\times) + I_2(\hat{g}^\times) - I_1(\hat{g}^\times) + 1]. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} I_1(\hat{G}^\times) &= 2I_1(\hat{\mathcal{E}}) + 3, \quad I_2(\hat{G}^\times) = 4I_2(\hat{\mathcal{E}}) + 4I_1(\hat{\mathcal{E}}) + 3, \quad I_3(\hat{G}^\times) = \\ &= 1 + 2I_1(\hat{\mathcal{E}}) + 4I_2(\hat{\mathcal{E}}) + 8I_3(\hat{\mathcal{E}}), \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

$$\begin{aligned} I_1(\hat{g}^\times) &= 3 - 2I_1(\hat{\hat{\mathcal{E}}}), \quad I_2(\hat{g}^\times) = 3 - 4I_1(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) + 4I_2(\hat{\hat{\mathcal{E}}}), \quad I_3(\hat{g}^\times) = \\ &= 1 - 2I_1(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) + 4I_2(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) - 8I_3(\hat{\hat{\mathcal{E}}}). \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Более сложные зависимости между главными инвариантами тензоров деформации $\hat{\mathcal{E}}$ и $\hat{\hat{\mathcal{E}}}$. Их можно получить с помощью формул (5.2.4). Например,

$$I_1(\hat{g}^\times) = 3 - 2I_1(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) = \frac{I_2(\hat{G}^\times)}{I_3(\hat{G}^\times)}$$

и по (5.4.5)

$$I_1(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) = \frac{I_1(\hat{\mathcal{E}}) + 4I_2(\hat{\mathcal{E}}) + 12I_3(\hat{\mathcal{E}})}{1 + 2I_1(\hat{\mathcal{E}}) + 4I_2(\hat{\mathcal{E}}) + 8I_3(\hat{\mathcal{E}})}. \quad (5.4.7)$$

5.5. Объемное расширение. Выражение элементов объема среды в начальном и конечном состояниях представляются в виде

$$\begin{aligned} d\tau_0 &= \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}^1 dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3, \\ d\tau &= \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) dq^1 dq^2 dq^3 = \\ &= \sqrt{G} \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}^1 dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\frac{d\tau}{d\tau_0} = \sqrt{\frac{G}{g}}, \quad D = \frac{d\tau - d\tau_0}{d\tau_0} = \sqrt{\frac{G}{g}} - 1. \quad (5.5.1)$$

Величина D — относительное изменение элемента объема при деформации — называется объемным расширением.

Сославшись на определение (IV.7.6) третьего инварианта в косоугольном базисе, имеем

$$I_3(\hat{G}^\times) = \frac{1}{g} |G_{sk}| = \frac{G}{g} = (1 + D)^2 \quad (5.5.2)$$

или по (5.4.5)

$$D = [1 + 2I_1(\hat{\mathcal{E}}) + 4I_2(\hat{\mathcal{E}}) + 8I_3(\hat{\mathcal{E}})]^{1/2} - 1. \quad (5.5.3)$$

Учитывая также (5.2.5) и (5.4.6), можно это выражение записать еще в виде

$$D = [1 - 2I_1(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) + 4I_2(\hat{\hat{\mathcal{E}}}) - 8I_3(\hat{\hat{\mathcal{E}}})]^{-1/2} - 1. \quad (5.5.4)$$

Непосредственный вывод формулы (5.5.3) основан на том, что объем в v -объеме единичного кубика с ребрами, направленными по главным осям \hat{e} тензора \hat{G}^\times , станет в V -объеме равным

$$(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) = \sqrt{(1 + 2\mathcal{E}_1)(1 + 2\mathcal{E}_2)(1 + 2\mathcal{E}_3)} = D + 1,$$

где δ_s — главные удлинения, \mathcal{E}_s — главные значения тензора $\hat{\mathcal{E}}$; см. также (3.6.8). Остается сослаться на формулы (I.10.4) — (I.10.6), связывающие главные инварианты с главными значениями тензора.

В линейном приближении, когда тензор $\hat{\mathcal{E}}$ отождествляется с линейным тензором деформации \hat{e} , объемное расширение, обозначаемое обычно ϑ (вместо D), по (5.5.3) представляется в виде [см. также (IV.7.5)]

$$\vartheta = I_1(\hat{e}) = g^{sk} e_{sk} \quad (5.5.5)$$

или по (V.4.4), (V.4.6)

$$\vartheta = g^{sk} \frac{1}{2} (\nabla_s u_k + \nabla_k u_s) = \nabla_s u^s = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} u^r}{\partial q^r}. \quad (5.5.6)$$

5.6. Преобразование подобия начального состояния. Рассматриваются два начальных состояния среды: v -объем и v_* -объем, получающийся из первого преобразованием подобия

$$r_* = Kr, \quad a_{s*} = Ka_s. \quad (5.6.1)$$

Тогда меры деформации, вычисленные по первому и второму начальным состояниям, связываются соотношениями

$$\hat{G}_*^{\times} = \frac{1}{K^2} \hat{G}^{\times}, \quad \hat{g}_*^{\times} = K^2 \hat{g}^{\times}, \quad (5.6.2)$$

непосредственно следующими из (3.3.6), — достаточно в качестве материальных координат ввести декартовы координаты a_s в v -объеме.

Связь между главными инвариантами мер деформации I_k и I_k^* дается очевидными формулами

$$\left. \begin{aligned} I_1(\hat{G}_*^{\times}) &= \frac{1}{K^2} I_1(\hat{G}^{\times}), \quad I_2(\hat{G}_*^{\times}) = \frac{1}{K^4} I_2(\hat{G}^{\times}), \quad I_3(\hat{G}_*^{\times}) = \frac{1}{K^6} I_3(\hat{G}^{\times}), \\ I_1(\hat{g}_*^{\times}) &= K^2 I_1(\hat{g}^{\times}), \quad I_2(\hat{g}_*^{\times}) = K^4 I_2(\hat{g}^{\times}), \quad I_3(\hat{g}_*^{\times}) = K^6 I_3(\hat{g}^{\times}). \end{aligned} \right\} \quad (5.6.3)$$

Более сложный вид имеют формулы, связывающие инварианты тензоров конечной деформации. По (5.6.3) и (5.4.3) получим

$$\left. \begin{aligned} I_1(\hat{\mathcal{E}}_*) &= \frac{1}{K^2} \left[I_1(\hat{\mathcal{E}}) + \frac{3}{2} \beta \right], \quad I_2(\hat{\mathcal{E}}_*) = \frac{1}{K^4} \left[I_2(\hat{\mathcal{E}}) + \beta I_1(\hat{\mathcal{E}}) + \frac{3}{4} \beta^2 \right], \\ I_3(\hat{\mathcal{E}}_*) &= \frac{1}{K^6} \left[I_3(\hat{\mathcal{E}}) + \frac{1}{2} \beta I_2(\hat{\mathcal{E}}) + \frac{1}{4} \beta^2 I_1(\hat{\mathcal{E}}) + \frac{1}{8} \beta^3 \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.6.4)$$

причем

$$\beta = 1 - K^2. \quad (5.6.5)$$

Точно такие же формулы, но с заменой K^2 на K^{-2} , β на $K^{-2} - 1$, связывают инварианты тензоров деформации $\hat{\mathcal{E}}_*$ и $\hat{\mathcal{E}}$.

В теории конечных деформаций следует предпочесть применение мер, а не тензоров деформации. «Вводя перемещения вместо координат, ничего не выигрывают, а, наоборот, теряют в смысле краткости и обозримости формул» (Кирхгофф).

5.7. Определение вектора перемещения по мерам деформации*). По заданной мере деформации \hat{G}^{\times} (матрице компонент G_{sh}) находится тензор $\hat{G}^{\times^{-1}}$ (обратная матрица). Этим

*) Принятым здесь изложением автор обязан беседам с М. А. Заком.

определяются символы Кристоффеля второго рода

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} = G^{st} [k, \widetilde{q}; t] = \frac{1}{2} G^{st} \left(\frac{\partial G_{kt}}{\partial q^q} + \frac{\partial G_{qt}}{\partial q^k} - \frac{\partial G_{kq}}{\partial q^t} \right). \quad (5.7.1)$$

Конечно, предполагается, что известен метрический тензор объема \hat{g} и вычисляемые по нему символы Кристоффеля

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} = g^{st} [k, q; t] = \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{kt}}{\partial q^q} + \frac{\partial g_{qt}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kq}}{\partial q^t} \right). \quad (5.7.2)$$

Теперь, исходя из равенств

$$R_q = r_q \cdot \nabla R, \quad \nabla R = r^s R_s, \quad (5.7.3)$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla R}{\partial q^k} &= \frac{\partial r^s}{\partial q^k} R_s + r^s \frac{\partial R_s}{\partial q^k} = - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} r^q R_s + \left\{ \begin{matrix} s \\ ks \end{matrix} \right\} r^s R_q = \\ &= \left(\left\{ \begin{matrix} q \\ ks \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} q \\ ks \end{matrix} \right\} \right) r^s R_q = \left(\left\{ \begin{matrix} q \\ ks \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} q \\ ks \end{matrix} \right\} \right) r^s r_q \cdot \nabla R \end{aligned}$$

и при обозначении

$$\hat{\Gamma}_{[k]} = \left(\left\{ \begin{matrix} q \\ ks \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} q \\ ks \end{matrix} \right\} \right) r^s r_q \quad (5.7.4)$$

приходим к системе линейных дифференциальных уравнений относительно тензора ∇R :

$$\frac{\partial \nabla R}{\partial q^k} = \hat{\Gamma}_{[k]} \cdot \nabla R. \quad (5.7.5)$$

Условия интегрируемости ее следуют из соотношений

$$\frac{\partial \nabla R}{\partial q^r \partial q^k} = \left(\frac{\partial \hat{\Gamma}_{[k]}}{\partial q^r} + \hat{\Gamma}_{[k]} \cdot \hat{\Gamma}_{[r]} \right) \cdot \nabla R = \left(\frac{\partial \hat{\Gamma}_{[r]}}{\partial q^k} + \hat{\Gamma}_{[r]} \cdot \hat{\Gamma}_{[k]} \right) \cdot \nabla R = \frac{\partial^2 R}{\partial q^k \partial q^r}$$

и приводятся к виду

$$\frac{\partial \hat{\Gamma}_{[k]}}{\partial q^r} - \frac{\partial \hat{\Gamma}_{[r]}}{\partial q^k} = \hat{\Gamma}_{[r]} \cdot \hat{\Gamma}_{[k]} - \hat{\Gamma}_{[k]} \cdot \hat{\Gamma}_{[r]}. \quad (5.7.6)$$

Выполнив дифференцирования (при этом используются формулы дифференцирования базисных векторов r^s, r_q) и заменив $\hat{\Gamma}_{[k]}, \hat{\Gamma}_{[r]}$ их значениями (5.7.4), придем к соотношениям, эквивалентным требованию обращения в нуль компонент тензора Риччи \hat{A}^{nn} (V.6.14).

Предположив решение системы уравнений (5.7.5) известным*), далее по (5.7.3) находим R по его полному дифференциалу

$$dR = R_m dq^m = r_m \cdot \nabla R dq^m = dr \cdot \nabla R. \quad (5.7.7)$$

При задании меры деформации \tilde{g}^\times (значит, и обратного тензора $\hat{g}^{\times-1} = \hat{M}$) искомым является вектор r , определяющий положение точки в v -объеме, тогда как ее положение в V -объеме и метрический тензор в этом объеме известны — известны R и \hat{G} (например, положение в V -объеме задается декартовыми координатами x_s , $\hat{G} = \hat{E} = i_s i_s$).

Теперь из соотношений

$$\tilde{\nabla} r = R^s r_s, \quad r_q = R_q \cdot \tilde{\nabla} r \quad (5.7.8)$$

имеем

$$\frac{\partial \tilde{\nabla} r}{\partial q^k} = \left(\left\{ \begin{matrix} q \\ ks \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tilde{q} \\ sk \end{matrix} \right\} \right) R^s R_q \cdot \tilde{\nabla} r,$$

и система дифференциальных уравнений (5.7.5) заменяется системой

$$\frac{\partial \tilde{\nabla} r}{\partial q^k} = \hat{\Gamma}_{[k]} \cdot \tilde{\nabla} r, \quad \hat{\Gamma}_{[k]} = \left(\left\{ \begin{matrix} q \\ ks \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tilde{q} \\ ks \end{matrix} \right\} \right) R^s R_q. \quad (5.7.9)$$

Определив из нее тензор $\tilde{\nabla} r$, находим r по его полному дифференциалу

$$dr = dR \cdot \tilde{\nabla} r. \quad (5.7.10)$$

Вектор перемещения u определяется, конечно, равенством

$$u = R - r.$$

§ 6. Примеры деформированных состояний

6.1. Аффинное преобразование. Оно определяется соотношением [см. [I.3.15)]

$$R = \hat{\Lambda} \cdot r, \quad (6.1.1)$$

где $\hat{\Lambda}$ — постоянный тензор второго ранга. Из соотношения

$$dR = \hat{\Lambda} \cdot dr = dr \cdot \hat{\Lambda}^*$$

по (3.2.4), (3.3.2), (3.3.7) имеем

$$\nabla R = \hat{\Lambda}^*, \quad (\nabla R)^* = \hat{\Lambda}, \quad \hat{G}^\times = \hat{\Lambda}^* \cdot \hat{\Lambda}, \quad \hat{G}^{\times-1} = \hat{m} = (\hat{\Lambda}^* \cdot \hat{\Lambda})^{-1}, \quad (6.1.2)$$

а по (3.2.5), (4.1.2), (4.1.5) и (I.7.14)

$$\tilde{\nabla} r = \hat{\Lambda}^{*-1}, \quad (\tilde{\nabla} r)^* = \hat{\Lambda}^{-1}, \quad \hat{g}^\times = (\hat{\Lambda} \cdot \hat{\Lambda}^*)^{-1}, \quad \hat{M} = \hat{\Lambda} \cdot \hat{\Lambda}^*. \quad (6.1.3)$$

*) Его можно записать в форме матрицанга, строящегося по тензорам $\hat{\Gamma}_{[k]}$.

Эти формулы поясняют различие между введенными мерами деформации. Далее в записях компонент используются декартовы координаты; поэтому в нарушение правил общей тензорной алгебры (Приложение IV) свободные индексы в левой и правой частях формулы занимают различные положения, а суммирование проводится по индексам, расположенным на одной высоте.

Компоненты первой меры деформации и тензора деформации $\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(\hat{G}^\times - \hat{g})$ представляются в виде

$$G_{qt} = \lambda_{sq}\lambda_{st}, \quad \mathcal{E}_{qt} = \frac{1}{2}(\lambda_{sq}\lambda_{st} - \delta_{qt}), \quad (6.1.4)$$

и по (3.4.4), (3.4.8) формулы для относительных удлинений и сдвигов будут

$$\delta_t = (\lambda_{1t}^2 + \lambda_{2t}^2 + \lambda_{3t}^2)^{1/2} - 1, \quad \sin \tilde{\varphi}_{qt} = \frac{\lambda_{sq}\lambda_{st}}{(1 + \delta_q)(1 + \delta_t)}. \quad (6.1.5)$$

Через λ^{sr} обозначается алгебраическое дополнение элемента λ_{rs} матрицы $\|\lambda_{rs}\|$, разделенное на определитель $\lambda = |\lambda_{rs}|$ этой матрицы. Тогда

$$g_{rt} = \lambda^{sr}\lambda^{st}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{rt} = \frac{1}{2}(\delta_{rt} - \lambda^{sr}\lambda^{st}) \quad (6.1.6)$$

и, далее,

$$\tilde{\delta}_t = (\lambda^{1t^2} + \lambda^{2t^2} + \lambda^{3t^2})^{-1/2} - 1, \quad \sin \varphi_{qt} = \frac{\lambda^{st}\lambda^{sq}}{(1 + \tilde{\delta}_t)(1 + \tilde{\delta}_q)}. \quad (6.1.7)$$

Отметим, что $\delta_t \neq \tilde{\delta}_t$, — в первом случае речь идет об относительном удлинении отрезка единичной длины, который в u -объеме был параллельным оси i_t и приобрел длину $1 + \delta_t$ в V -объеме; во втором — об отрезке длины $1 + \tilde{\delta}_t$ в V -объеме, который в этом объеме стал параллельным оси i_t . В формуле (6.1.5) материальными координатами считаются a_s (декартовы координаты u -объема), а в (6.1.6) — координаты x_s (декартовы координаты V -объема).

Инварианты меры деформации \hat{G}^\times по (I.6.7) и (5.2.4) представляются в виде

$$I_1(\hat{G}^\times) = \hat{\Lambda}^* \cdot \hat{\Lambda} = \lambda_{st}\lambda_{st}, \quad I_2(\hat{G}^\times) = \frac{I_1(\hat{g}^\times)}{I_3(\hat{g}^\times)} = \lambda^2 \lambda^{st}\lambda^{st}, \quad I_3(\hat{G}^\times) = \lambda^2. \quad (6.1.8)$$

6.2. Плоское поле перемещений. Точечное преобразование u -объема в V -объем задается соотношениями

$$x_1 = x_1(a_1, a_2), \quad x_2 = x_2(a_1, a_2), \quad x_3 = a_3. \quad (6.2.1)$$

Для упрощения записей вводим обозначения

$$\frac{\partial x_s}{\partial a_k} = \lambda_{sk} \quad (s, k = 1, 2), \quad \lambda_{3s} = \lambda_{s3} = 0, \quad \lambda_{33} = 1. \quad (6.2.2)$$

Тогда вполне аналогично (6.1.2) имеем

$$d\mathbf{R} = \hat{\Lambda} \cdot d\mathbf{r}$$

и, сославшись на (6.1.4), получим

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \lambda_{11}^2 + \lambda_{21}^2, & G_{12} &= \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22}, & G_{22} &= \lambda_{12}^2 + \lambda_{22}^2, \\ G_{23} &= G_{31} = 0, & G_{33} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.3)$$

$$G = |G_{st}| = G_{11}G_{22} - G_{12}^2 = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21})^2 = \lambda^2. \quad (6.2.4)$$

Система уравнений (5.3.8), определяющих компоненты тензора $G^{\times 1/2}$, записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} (G_{11}^{\times 1/2})^2 + (G_{12}^{\times 1/2})^2 &= G_{11}, & G_{12}^{\times 1/2} (G_{11}^{\times 1/2} + G_{12}^{\times 1/2}) &= G_{12}, \\ (G_{12}^{\times 1/2})^2 + (G_{22}^{\times 1/2})^2 &= G_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.5)$$

Квадрат первого инварианта этого тензора выражается через главные значения и, значит, инварианты тензора \hat{G}^{\times} :

$$\begin{aligned} (G_{11}^{\times 1/2} + G_{22}^{\times 1/2})^2 &= I_1^2(\hat{G}^{\times 1/2}) = \\ &= (\sqrt{G_1^{\times}} + \sqrt{G_2^{\times}})^2 = G_1^{\times} + G_2^{\times} + 2\sqrt{G_1^{\times}G_2^{\times}} = G_1^{\times} + G_2^{\times} + 2\sqrt{G} = \Delta. \end{aligned}$$

Поэтому

$$G_{11}^{\times 1/2} + G_{22}^{\times 1/2} = \sqrt{\Delta} = \sqrt{(\lambda_{11} + \lambda_{22})^2 + (\lambda_{12} - \lambda_{21})^2}. \quad (6.2.6)$$

Теперь из второго уравнения (6.2.5) находим $G_{12}^{\times 1/2}$, а потом и диагональные элементы $G_{11}^{\times 1/2}$, $G_{22}^{\times 1/2}$:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}^{\times 1/2} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} [\lambda_{11}(\lambda_{11} + \lambda_{22}) - \lambda_{21}(\lambda_{12} - \lambda_{21})], \\ G_{12}^{\times 1/2} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22}), \\ G_{22}^{\times 1/2} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} [\lambda_{22}(\lambda_{11} + \lambda_{22}) + \lambda_{12}(\lambda_{12} - \lambda_{21})]. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.7)$$

При обозначениях

$$\cos \chi = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\lambda_{11} + \lambda_{22}), \quad \sin \chi = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\lambda_{21} - \lambda_{12}) \quad (6.2.8)$$

эти равенства записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} G_{11}^{\times 1/2} &= \lambda_{11} \cos \chi + \lambda_{21} \sin \chi, \\ G_{12}^{\times 1/2} &= \lambda_{12} \cos \chi + \lambda_{22} \sin \chi = -\lambda_{11} \sin \chi + \lambda_{21} \cos \chi, \\ G_{22}^{\times 1/2} &= -\lambda_{12} \sin \chi + \lambda_{22} \cos \chi. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.9)$$

Выбор знака в определении (6.2.8) угла χ диктуется тем, чтобы линейное преобразование

$$x_1 = \lambda_{11}a_1 + \lambda_{12}a_2, \quad x_2 = \lambda_{21}a_1 + \lambda_{22}a_2$$

могло быть преобразованием поворота вокруг оси i_3 на угол χ . Тогда выбор

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \cos \chi, \quad \lambda_{21} = -\lambda_{12} = \sin \chi, \quad \sqrt{\Delta} = 2$$

удовлетворяет определению (6.2.8) и вместе с тем

$$x_1 = a_1 \cos \chi - a_2 \sin \chi, \quad x_2 = a_1 \sin \chi + a_2 \cos \chi, \quad R = \hat{r} = r \cdot \hat{A} = i'_s a_s, \quad (6.2.10)$$

что и требуется.

Представление тензора $\hat{G}^{\times 1/2}$ теперь записывается в виде

$$\hat{G}^{\times 1/2} = G_{sk}^{\times 1/2} i_s i_k + i_3 i_3 = (i_s i_k \cos \chi - i_3 \times i_s i_k \sin \chi) \lambda_{sk} + i_3 i_3. \quad (6.2.11)$$

Выражение матрицы поворота \hat{A} составляется по (5.3.6):

$$\begin{aligned} \hat{A} = \hat{G}^{\times 1/2} \cdot (\tilde{\nabla} r)^* &= (i_s i_k \cos \chi - i_3 \times i_s i_k \sin \chi) \frac{\partial x_s}{\partial a_k} \cdot i_q i_r \frac{\partial a_q}{\partial x_r} + i_3 i_3 = \\ &= (i_s i_r \cos \chi - i_3 \times i_s i_r \sin \chi) \frac{\partial x_s}{\partial a_q} \frac{\partial a_q}{\partial x_r} + i_3 i_3, \end{aligned}$$

и, далее,

$$\hat{A} = \hat{E}_2 \cos \chi - i_3 \times \hat{E}_2 \sin \chi + i_3 i_3 \quad (\hat{E}_2 = i_1 i_1 + i_2 i_2). \quad (6.2.12)$$

Структура этого выражения повторяет (I. 8.8).

6.3. Простой сдвиг *). Этот частный случай плоского аффинного преобразования задается формулами

$$x_1 = a_1 + s a_2, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \quad (6.3.1)$$

где s — постоянная сдвига; прямоугольник $ABDC$ превращается в параллелограмм $ABD'C'$ (рис. 10). Матрицы $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Lambda}^*$ записываются в виде

$$\hat{\Lambda} = \hat{E} + s i_1 i_2, \quad \hat{\Lambda}^* = \hat{E} + s i_2 i_1, \quad (6.3.2)$$

и по (6.1.3), (6.1.4) имеем следующие отличные от нуля компоненты тензора $\hat{\mathcal{E}}$:

$$\hat{G}^{\times} = \hat{E} + s (i_1 i_2 + i_2 i_1) + s^2 i_2 i_2, \quad \mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_{21} = \frac{s}{2}, \quad \mathcal{E}_{22} = \frac{1}{2} s^2. \quad (6.3.3)$$

Далее, по (6.1.5)

$$\delta_3 = \delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \sqrt{1 + s^2} - 1, \quad \sin \tilde{\varphi}_{12} = \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}, \quad (6.3.4)$$

*) Не смешивать с термином «чистый сдвиг» (п. 2.4 гл. I).

что, конечно, легко увидеть на рис. 10. Из характеристического уравнения тензора \hat{G}^\times

$$\begin{vmatrix} 1-G & s & 0 \\ s & 1+s^2-G & 0 \\ 0 & 0 & 1-G \end{vmatrix} = (1-G)[(1-G)^2 - s^2 G] = 0$$

находим его главные значения

$$G_1 = \frac{1}{2}(2 + s^2 + s\sqrt{s^2 + 4}), \quad G_2 = \frac{1}{2}(2 + s^2 - s\sqrt{s^2 + 4}), \quad G_3 = 1. \quad (6.3.5)$$

Система уравнений для определения его главных направлений будет

$$(1 - G_k) \cos \beta_k + s \sin \beta_k = 0, \quad s \cos \beta_k + (1 + s^2 - G_k) \sin \beta_k = 0. \quad (6.3.6)$$

(где $\cos \beta_k = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_1$, $\sin \beta_k = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_2$), и это дает

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{G_1 - 1}{s} = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 + 4}), \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{G_2 - 1}{s} = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 + 4}) \quad (6.3.7)$$

и при $s > 0$ $\frac{\pi}{4} \leq \beta_1 \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4} \leq \beta_2 \leq \pi$.

Главные значения тензора \hat{g}^\times по (5.2.2) и (6.3.6) равны

$$g_1 = \frac{1}{G_1} = G_2, \quad g_2 = \frac{1}{G_2} = G_1,$$

а система уравнений, определяющих их главные направления, отличается от (6.3.6) заменой s на $-s$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \beta_1 = -\operatorname{tg} \beta_2, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = -\operatorname{tg} \beta_1, \quad \beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Расположение главных осей $\overset{s}{\mathbf{e}}, \overset{s}{\mathbf{e}}$ тензоров \hat{G}^\times и \hat{g}^\times показано на рис. 10. Угол, на который надо повернуть вокруг \mathbf{i}_3 оси $\overset{s}{\mathbf{e}}$, чтобы совместить их с осями $\overset{s}{\mathbf{e}}$, равен

$$\chi = \beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2} - 2\beta_1, \quad \operatorname{tg} \chi = \operatorname{ctg} 2\beta_1 = -\frac{1}{2}s. \quad (6.3.8)$$

С другой стороны, в формулах (6.2.6) и (6.2.8) имеем теперь $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1$, $\lambda_{12} = s$, $\lambda_{21} = 0$, так что

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{s^2 + 4}, \quad \cos \chi = \frac{2}{\sqrt{s^2 + 4}}, \quad \sin \chi = -\frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}}, \quad \operatorname{tg} \chi = -\frac{1}{2}s,$$

что подтверждается формулой (6.3.8); тензор поворота \hat{A} в задаче о простом сдвиге оказывается представленным в виде

$$\hat{A} = \frac{q^2}{\sqrt{s^2 + 4}} (2\hat{E}_2 + s\hat{i}_3 \times \hat{E}_2) + \hat{i}_3\hat{i}_3. \quad (6.3.9)$$

6.4. Кручение круглого цилиндра. Осуществляемое при этой деформации преобразование координат можно описать как конечный поворот среды вокруг оси цилиндра \hat{i}_3 , в котором угол

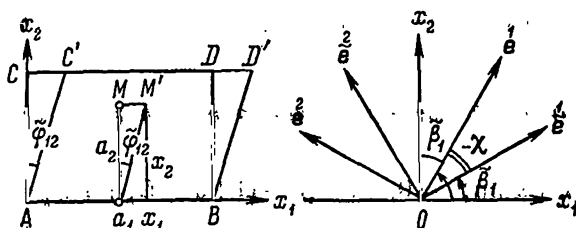


Рис. 10.

поворота χ представляет линейную функцию абсциссы, отсчитываемой вдоль этой оси:

$$\chi = \chi_0 + \psi a_3. \quad (6.4.1)$$

Здесь ψ — относительный угол поворота двух поперечных сечений, отстоящих на единицу длины друг от друга. Тензор поворота определяется формулой (6.2.12), так что

$$R = r \cdot \hat{A}, \quad dR = dr \cdot \hat{A} + r \cdot \hat{A}' da_3 = \hat{A}^* \cdot dr + \hat{A}'^* \cdot r da_3, \quad (6.4.2)$$

причем штрихом отмечено дифференцирование по a_3 . Имеем теперь

$$dS^2 = dR \cdot dR = dr \cdot \hat{A} \cdot \hat{A}^* \cdot dr + dr \cdot \hat{A} \cdot \hat{A}'^* \cdot r da_3 + r \cdot \hat{A}' \cdot \hat{A}^* \cdot dr da_3 + r \cdot \hat{A}' \cdot \hat{A}'^* \cdot r da_3^2. \quad (6.4.3)$$

Отметим соотношения

$$(\hat{i}_3 \times \hat{E}_2) \cdot \hat{E}_2 = \hat{i}_3 \times \hat{E}_2, \quad (\hat{i}_3 \times \hat{E}_2)^* = -\hat{i}_3 \times \hat{E}_2, \quad (\hat{i}_3 \times \hat{E}_2) \cdot (\hat{i}_3 \times \hat{E}_2)^* = \hat{E}_2^2$$

и учитывая равенства

$$\hat{A} \cdot \hat{A}^* = \hat{E}, \quad (\hat{A} \cdot \hat{A}^*)' = \hat{A}' \cdot \hat{A}^* + \hat{A} \cdot \hat{A}'^* = 0,$$

$$\hat{A}' = -\psi (\hat{E}_2 \sin \chi + \hat{i}_3 \times \hat{E}_2 \cos \chi),$$

имеем

$$\hat{A}' \cdot \hat{A}^* = -\psi \hat{i}_3 \times \hat{E}_2, \quad \hat{A}'^* \cdot \hat{A}' = \psi^2 \hat{E}_2$$

и после подстановки в (6.4.3) получим

$$dS^2 = G_{st} da_s da_t = \delta_{st} da_s da_t + \\ + \psi [dr \cdot (i_3 \times \hat{E}_2) \cdot r - r \cdot (i_3 \times \hat{E}_2) \cdot dr] da_3 + \psi^2 r \cdot \hat{E}_2 \cdot r da_3^2.$$

Итак,

$$dS^2 = \delta_{st} da_s da_t + 2\psi (a_1 da_2 - a_2 da_1) da_3 + \psi^2 (a_1^2 + a_2^2) da_3^2 \quad (6.4.4)$$

и по (3.3.5) компоненты меры деформации \hat{G}^\times оказываются равными

$$G_{11} = G_{22} = 1, G_{33} = \psi^2 (a_1^2 + a_2^2) + 1, G_{12} = 0, G_{23} = \psi a_1, G_{31} = -\psi a_2. \quad (6.4.5)$$

Отличны от нуля компоненты тензора деформации

$$\mathcal{E}_{23} = \frac{1}{2} \psi a_1, \quad \mathcal{E}_{31} = -\frac{1}{2} \psi a_2, \quad \mathcal{E}_{33} = \frac{1}{2} \psi^2 (a_1^2 + a_2^2). \quad (6.4.6)$$

Наличие компоненты \mathcal{E}_{33} , обусловленное «стремлением цилиндра» изменить длину, указывает на необходимость приложения осевой силы для осуществимости предположенного поля перемещения, в котором сохраняется длина цилиндра (отсутствует u_3). Тогда

$$u = R \cdot r = r \cdot (\hat{A} - \hat{E}).$$

Это — одно из проявлений эффектов, экспериментально установленных Пойнтингом (1909). Его нельзя было бы объяснить, основываясь на линейной теории деформаций.

Объем цилиндра при рассмотренной деформации кручения сохраняется; действительно,

$$G = |G_{st}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\psi a_2 \\ 0 & 1 & \psi a_1 \\ -\psi a_2 & \psi a_1 & 1 + \psi^2 (a_1^2 + a_2^2) \end{vmatrix} = 1$$

и по (5.5.1) объемное расширение $D = 0$.

6.5. Цилиндрический изгиб прямоугольной плиты. Рассматривается преобразование

$$x_1 = C(a_1) \cos \frac{a a_2}{b}, \quad x_2 = C(a_1) \sin \frac{a a_2}{b}, \quad x_3 = e a_3, \quad (6.5.1)$$

с помощью которого область параллелепипеда

$$a_1^0 \leq a_1 \leq a_1^0 + h, \quad -b \leq a_2 \leq b, \quad -l \leq a_3 \leq l, \quad (6.5.2)$$

представляющая прямоугольную плиту толщины h , ширины $2b$ и длины $2l$ (рис. 11), деформируется в цилиндрическую

панель — в область, ограниченную поверхностями коаксиальных цилиндров с радиусами

$$r_0 = C(a_1^0), \quad r_1 = C(a_1^0 + h), \quad (6.5.3)$$

плоскостями

$$x_2 = \pm x_1 \operatorname{tg} \alpha \quad (6.5.4)$$

и плоскостями $x_3 = \pm el$. Предполагается, что эта деформация происходит с сохранением объема материала.

Компоненты меры деформации \hat{G}^\times определяются по (3.3.6), причем декартовы координаты v -объема принимаются за материальные; отличными от нуля оказываются лишь диагональные компоненты тензора \hat{G}^\times

$$G_{11} = C'^2(a_1), \quad G_{22} = \frac{\alpha^2}{b^2} C^2(a_1), \quad G_{33} = e^2. \quad (6.5.5)$$

Из условия сохранения объема имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{G} &= C' C \frac{\alpha e}{b} = 1, \\ C' C &= \frac{b}{\alpha e}, \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

откуда после интегрирования, учитывая (6.5.3), находим

$$C = \sqrt{\frac{2b}{\alpha e} (a_1 - a_1^0) + r_0^2}, \quad \frac{2b}{\alpha e} h = r_1^2 - r_0^2, \quad (6.5.7)$$

так что

$$C = \sqrt{(r_1^2 - r_0^2) \frac{a_1 - a_1^0}{h} + r_0^2}. \quad (6.5.8)$$

Примем, далее, что в изгибаемой плите имеется плоскость $a_1 = a_1^*$ такая, что отрезки прямых $-b \leq a_2 \leq b$ на ней, которые были параллельны в v -объеме оси i_2 , сохраняют в V -объеме длину. Тогда по (6.5.5.) и (6.5.8)

$$G_{22}(a_1^*) = \left[(r_1^2 - r_0^2) \frac{a_1^* - a_1^0}{h} + r_0^2 \right] \frac{\alpha^2}{b^2} = 1 \quad (6.5.9)$$

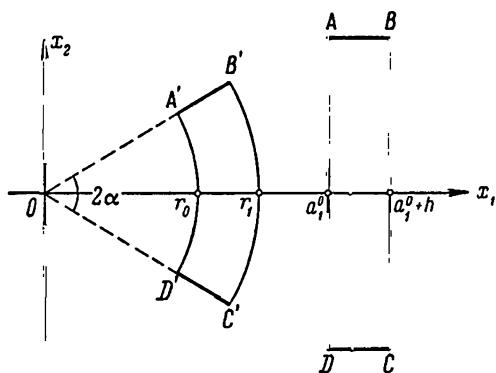


Рис. 11.

и выражения компонент меры деформации представляются в виде

$$G_{11} = \frac{1}{e^2} \frac{1 + \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} \frac{a_1^* - a_1^0}{h}}{1 + \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} \frac{a_1 - a_1^0}{h}}, \quad G_{22} = \frac{1}{e^2 G_{11}}, \quad G_{33} = e^2. \quad (6.5.10)$$

Учитывая (6.5.7), можно записать равенство (6.5.9) в форме квадратного уравнения относительно $\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2}$, положительное решение которого дается формулой

$$\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2} = \frac{2h}{r_0 e} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{a_1^* - a_1^0}{r_0 e} \right)^2} + \frac{a_1^* - a_1^0}{r_0 e} \right]. \quad (6.5.11)$$

Из нее и из (6.5.7) получаем отношение высоты прямоугольной полосы к длине дуги поперечного сечения внутреннего цилиндра:

$$\frac{b}{r_0 \alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{a_1^* - a_1^0}{r_0 e} \right)^2} + \frac{a_1^* - a_1^0}{r_0 e}. \quad (6.5.12)$$

Из приведенных формул следует, что при $e \approx 1$ компоненты меры деформации отличаются от единицы слагаемыми порядка h/b , весьма малыми для тонкой плиты. Компоненты тензора деформации имеют этот же порядок, тогда как перемещения отнюдь не малы.

6.6. Радиально-симметричная деформация полой сферы. За материальные координаты принимаются сферические координаты v -объема

$$q^1 = r, \quad q^2 = \vartheta, \quad q^3 = \lambda.$$

Тогда, сославшись на п. III. 8, имеем

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} = \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} = r \mathbf{e}_\vartheta, \quad \mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} = e_\lambda r \sin \vartheta,$$

и отличными от нуля ковариантными компонентами единичного тензора v -объема \hat{g} будут

$$g_{11} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = 1, \quad g_{22} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = r^2, \quad g_{33} = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (6.6.1)$$

Далее, имеем

$$g = g_{11} g_{22} g_{33} = r^4 \sin^2 \vartheta, \quad (6.6.2)$$

и контравариантными компонентами этого тензора по (V. 5.7) будут

$$g^{11} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{11}} = \frac{1}{g_{11}} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (6.6.3)$$

При радиально-симметричной деформации сферы, ограниченной в v -объеме поверхностями концентрических сфер $r = r_0$ и $r = r_1$, в V -объеме имеем

$$\mathbf{R} = R(r) \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{R}_1 = R'(r) \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{R}_2 = R(r) \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{R}_3 = R(r) \mathbf{e}_\lambda \sin \theta, \quad (6.6.4)$$

так что

$$G_{11} = R'^2, \quad G_{22} = R^2, \quad G_{33} = R^2 \sin^2 \theta; \quad G = R^4 R'^2 \sin \theta.$$

Для материала, сохраняющего при деформации объем (несжимаемого), по (5.5.1)

$$\frac{G}{g} = 1, \quad R'^2 = \frac{r^4}{R^4}, \quad (6.6.5)$$

и, интегрируя это соотношение, имеем, как следовало ожидать,

$$R^3(r) - r^3 = \text{const} = R_1^3 - r_1^3 = R_0^3 - r_0^3,$$

где R_1, R_0 — радиусы сфер в конечном состоянии (в V -объеме). Отличные от нуля ковариантные и контравариантные компоненты единичного тензора \hat{G} равны

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \frac{r^4}{R^4}, & G_{22} &= R^2, & G_{33} &= R^2 \sin^2 \theta, \\ G^{11} &= \frac{R^4}{r^4}, & G^{22} &= \frac{1}{R^2}, & G^{33} &= \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.6)$$

Главные инварианты меры деформации \hat{G}^\times вычисляются по (5.2.6), (5.2.8):

$$I_1(\hat{G}^\times) = \frac{r^4}{R^4} + 2 \frac{R^2}{r^2}, \quad I_2(\hat{G}^\times) = \frac{R^4}{r^4} + 2 \frac{r^2}{R^2}, \quad I_3(\hat{G}^\times) = 1. \quad (6.6.7)$$

6.7. Осесимметричная деформация полого цилиндра. Вычисление аналогично проведенному в п. 6.6. Материальными координатами служат цилиндрические координаты v -объема

$$q^1 = r, \quad q^2 = \varphi, \quad q^3 = z.$$

Сославшись на формулы п. III. 7, имеем

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_2 = r \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{k}, \quad (6.7.1)$$

так что в согласии с (III. 7.1) и (V. 5.7)

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{22} &= r^2, & g_{33} &= 1, & g &= r^2, \\ g^{11} &= 1, & g^{22} &= \frac{1}{r^2}, & g^{33} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.2)$$

При осесимметричной деформации вектор-радиус \mathbf{R} в V -объеме определим равенством

$$\mathbf{R} = R(r) \mathbf{e}_r + \alpha z \mathbf{k},$$

так что

$$R_1 = R'(r) e_r, \quad R_2 = R(r) e_\varphi, \quad R_3 = \alpha k, \quad (6.7.3)$$

далее,

$$G_{11} = R'^2, \quad G_{22} = R^2, \quad G_{33} = \alpha^2; \quad G = R'^2 R^2 \alpha^2.$$

Для несжимаемого материала

$$\frac{G}{g} = 1, \quad R'^2 R^2 \alpha^2 = r^2, \quad \alpha R^2 - r^2 = \text{const} = \alpha R_0^2 - r_0^2 = \alpha R_1^2 - r_1^2, \quad (6.7.4)$$

где r_0, r_1 — радиусы концентрических цилиндров в v -объеме, R_0 и R_1 — в V -объеме; ко- и контравариантные компоненты тензора \hat{G} равны

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \frac{r^2}{R^2 \alpha^2}, & G_{22} &= R^2, & G_{33} &= \alpha^2, \\ G^{11} &= \frac{R^2 \alpha^2}{r^2}, & G^{22} &= \frac{1}{R^2}, & G^{33} &= \frac{1}{\alpha^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.7.5)$$

и главные инварианты тензора меры деформации \hat{G}^\times будут

$$I_1(\hat{G}^\times) = \frac{r^2}{R^2 \alpha^2} + \frac{R^2}{r^2} + \alpha^2, \quad I_2(\hat{G}^\times) = \frac{\alpha^2 R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{\alpha^2}, \quad I_3(\hat{G}^\times) = 1. \quad (6.7.6)$$

ЧАСТЬ II

УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГЛАВА III

ЗАКОН СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Изотропная сплошная среда

1.1. Постановка задачи линейной теории упругости. Как неоднократно указывалось (пп. 3.6, 3.9 гл. II), возможность замены тензоров конечной деформации линейным тензором деформации $\hat{\epsilon}$ обусловлена малостью компонент тензора-градиента вектора перемещения ∇u или, что то же самое, компонент тензора $\hat{\epsilon}$ и вектора поворота ω

$$\left| \frac{\partial u_s}{\partial a_k} \right| \ll 1, \quad |e_{sk}| \ll 1, \quad |\omega_s| \ll 1. \quad (1.1.1)$$

При этих условиях отпадает необходимость различения производных по координатам начального состояния a_s и конечного состояния x_s . Действительно, для некоторой функции f в той и другой системе независимых переменных имеем

$$\frac{\partial f}{\partial a_k} = \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial a_k} = \frac{\partial f}{\partial x_s} \left(\delta_{sk} + \frac{\partial u_s}{\partial a_k} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_s} \frac{\partial u_s}{\partial a_k}$$

и в принятом приближении

$$\frac{\partial f}{\partial a_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}. \quad (1.1.2)$$

В линейной теории упругости, если не оговорено противное, за начальное состояние среды принимается ее состояние при отсутствии напряжений — натуральное состояние. Декартовы координаты точки в напряженном состоянии обозначаются x_1, x_2, x_3 , а в начальном — через a_1, a_2, a_3 (п. 1.1 гл. I):

$$x_s = a_s + u_s, \quad (1.1.3)$$

но их нет нужды явно вводить в рассмотрение. При разыскании напряженного состояния принимают, что размеры и форма тела

такие же, что и в начальном состоянии, не различая v - и V -объемов и поверхностей O и o , их ограничивающих.

Тензор напряжения, в отличие от основного соотношения (1.3.2) гл. I, вводится соотношением

$$t_n = n \cdot \hat{T}. \quad (1.1.4)$$

Здесь $t_n do$ — вектор силы, действующей на ориентированную площадку $n do$, причем n — единичный вектор нормали этой площадки в начальном состоянии тела, do — ее площадь. Уравнения равновесия в объеме сохраняют вид (1.5.4) или (1.5.6) гл. I но, относя массу к начальному объему, принимают в выражении объемной силы ρK плотность равной ее значению в начальном состоянии ($\rho = \rho_0$). Уравнение равновесия на поверхности в соответствии с (1.1.4) записывается в виде

$$F = n \cdot \hat{T}, \quad (1.1.5)$$

где F — поверхностная сила, рассчитанная на единицу начальной площади поверхности o , а n — единичный вектор внешней нормали к ней.

В линейной теории равновесия сплошной среды отпадает также необходимость в различении тензоров деформации Коши — Грина $\hat{\mathcal{E}}$ и Альманзи — Гамеля $\hat{\tilde{\mathcal{E}}}$. Как следует из (3.6.5) и (4.3.5) гл. II, тот и другой тензоры должны быть по (1.1.1) и (1.1.2) заменены линейным тензором деформации

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{\tilde{\mathcal{E}}} = \hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^*], \quad (1.1.6)$$

причем безразлично, какими независимыми переменными (x_s или a_s) пользоваться при вычислении набла-оператора. Далее принимаются обозначения x_s для этих переменных, через V и O обозначаются объем тела и ограничивающая его поверхность. При применении криволинейных координат q^s принимается обозначение \hat{g} для метрического тензора, g_{sk} , g^{sk} , $g_s^k = \delta_s^k$ — для его компонент. Первый инвариант линейного тензора деформации в соответствии с (5.5.5) гл. II (объемное расширение в линейном приближении) обозначается

$$\vartheta = I_1(\hat{\mathcal{E}}) = \text{div } u. \quad (1.1.7)$$

В п. 1.5 гл. I уже говорилось, что задачей статики сплошной среды является разыскание во множестве статически возможных напряженных состояний (удовлетворяющих уравнениям статики в объеме и на поверхности) фактически реализуемого в принятой физической модели среды состояния. Эта модель определяется законом состояния; для большого числа сред он состоит в задании связи между тензорами напряжения и деформации;

в линейной теории сплошной среды это — линейное соотношение связи тензора напряжения с линейным тензором деформации. В линейно-упругом теле оно представляет систему линейных уравнений, связывающих компоненты этих тензоров; они выражают обобщенный закон Гука для линейно-упругого тела*). В выражение закона состояния входит также температура тела.

Задание закона состояния приводит к замкнутой системе дифференциальных уравнений, по которой определяется реализуемое в теле напряженное состояние и вектор перемещения точек среды. Из сказанного следует, что в линейной постановке задача определения формы и размеров упругого тела в конечном состоянии отодвигается на второй план — их находят после того, как задача решена в предположении неизменности начальной формы тела. Этот прием позволяет избежать серьезной трудности нелинейной теории упругости, когда напряженное состояние приходится разыскивать в V -объеме — в теле с неизвестной наперед границей O . Его законность подтверждается тем, что при решении задач нелинейной теории упругости методом последовательных приближений, например в форме ряда по степеням параметра малости, характеризующего малость градиента вектора перемещения, исходное приближение, получаемое при пренебрежении слагаемыми, содержащими этот параметр, представляет решение задачи для линейно-упругого тела, когда определяющие уравнения отнесены к начальному объему и начальной форме его границы.

Дальнейшее изложение ведется преимущественно в декартовой системе координат $OX_1X_2X_3$; однако все результативные соотношения формулируются в инвариантной форме зависимостей между векторами или тензорами и инвариантами тензоров. Поэтому переход к криволинейным координатам нигде не составляет труда.

1.2. Элементарная работа. Выражение удельной элементарной работы внешних сил $\delta'A_{(e)}$ или равной ей по величине, но противоположной по знаку удельной элементарной работы внутренних сил $\delta'A_{(i)}$, получим, заменив в формулах пп. 3.5, 3.6 гл. I отношение G/g единицей, а тензор деформации — линейным тензором деформации. В линейной теории отпадает необходимость различения метрик v - и V -объемов; поэтому энергетический тензор напряжения тождественен тензору напряжений \hat{T} . Итак, по (3.6.4) гл. I имеем

$$\delta'A_{(e)} = -\delta'A_{(i)} = \hat{T} \cdot \delta\hat{e} = I_1(\hat{T} \cdot \delta\hat{e}) = t_{sk} \delta e_{sk}, \quad (1.2.1)$$

*) Ниже станет ясно, что линейность соотношений между тензорами не равнозначна с линейностью связи их компонент.

причем t_{sk} , e_{sk} — компоненты тензоров \hat{T} и \hat{e} в декартовой прямоугольной системе координат.

Первый инвариант тензора напряжений далее обозначается σ ; это — сумма трех главных напряжений или трех нормальных напряжений на ортогональных площадках:

$$\sigma = t_{11} + t_{22} + t_{33} = t_1 + t_2 + t_3. \quad (1.2.2)$$

При обозначении (1.1.7) представление удельной элементарной работы (3.6.6) гл. I через шаровые и девятаторные части тензоров \hat{T} и \hat{e} записывается в виде

$$\delta' A_{(e)} = \frac{1}{3} \sigma \delta \theta + I_1 (\text{Dev } \hat{T} \cdot \delta \text{Dev } \hat{e}). \quad (1.2.3)$$

Переход от удельной элементарной работы к элементарной работе во всем объеме тела, конечно, осуществляется интегрированием

$$\delta' a_{(e)} = \int \int \int_V \delta' A_{(e)} d\tau, \quad \delta' a_{(t)} = \int \int \int_V \delta' A_{(t)} d\tau. \quad (1.2.4)$$

1.3. Изотропная однородная среда Генки. Мы ограничимся рассмотрением сред, в которых тензор напряжения определен заданием тензора деформации и температуры θ , отсчитываемой от температуры начального состояния. Компоненты этих тензоров связываются соотношениями вида

$$t_{sk} = f_{sk}(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}; x_1, x_2, x_3, \theta), \quad (1.3.1)$$

на которые накладываются некоторые требования инвариантности — сохранения вида при преобразовании координатной системы. Этим исключаются физические модели сред, в которых тензору напряжения сопоставляются тензоры деформации и скоростей деформации, когда он предполагается зависящим от предшествующей истории деформирования и «возраста» материала, и т. д. Далее не рассматриваются также неоднородные среды, когда координаты x_1, x_2, x_3 явно входят в зависимости (1.3.1).

Изотропными упругими средами будем называть среды, в которых тензоры деформации и напряжений соосны (п. 1.12). Кубик, выделенный из такой среды, одинаково деформируется под действием приложенных сил при любой ориентации ребер. Из теоремы Кейли — Гамильтона следует, что два соосных тензора связываются друг с другом квадратичной зависимостью вида (1.12.4). Одним из затруднений нелинейной теории упругости является указание той из мер деформации, которой должен быть сопоставлен тензор напряжения. В линейной постановке задачи оно отпадает, а квадратичная зависимость заменяется линейной вида

$$\hat{T} = a\hat{E} + b\hat{e}, \quad (1.3.2)$$

причем a, b — зависят от инвариантов тензора $\hat{\epsilon}$ и, возможно, от температуры; через \hat{E} обозначается единичный тензор.

Изотропную однородную среду, подчиняющуюся закону состояния (1.3.2), называют средой Генки. Запись этого закона через компоненты тензоров \hat{T} и $\hat{\epsilon}$ имеет вид

$$t_{sh} = a\delta_{sh} + b\epsilon_{sh}, \quad (1.3.3)$$

и поскольку a и b зависят от инвариантов $\hat{\epsilon}$, эти соотношения нелинейны. Среда Генки линейна геометрически, но физически нелинейна. Частным случаем ее является линейная и геометрически и физически упругая среда — среда Гука; описание поведения ее составляет основное содержание этой книги *).

По (1.3.2) имеем

$$\sigma = I_1(\hat{T}) = 3a + b\theta, \quad (1.3.4)$$

так что

$$\text{Dev } \hat{T} = \hat{T} - \frac{1}{3}\sigma\hat{E} = b\left(\hat{\epsilon} - \frac{1}{3}\theta\hat{E}\right) = b \text{Dev } \hat{\epsilon} \quad (1.3.5)$$

и зависимость между вторыми (квадратичными) инвариантами девиаторов \hat{T} и $\hat{\epsilon}$ записывается в виде

$$I_2(\text{Dev } \hat{T}) = b^2 I_2(\text{Dev } \hat{\epsilon}).$$

Сославшись на формулы (2.2.11) гл. I и (3.7.4) гл. II:

$$\tau^2 = -I_2(\text{Dev } \hat{T}), \quad \frac{\Gamma^2}{4} = -I_2(\text{Dev } \hat{\epsilon}), \quad (1.3.6)$$

где τ — интенсивность касательных напряжений, Γ — интенсивность деформации сдвига, вводим новое обозначение

$$b = 2\mu = \frac{2\tau}{\Gamma}, \quad \mu = \frac{\tau}{\Gamma}. \quad (1.3.7)$$

Еще раз изменяя обозначения, представим коэффициент a суммой двух слагаемых:

$$a = \lambda\theta + a',$$

причем второе a' зависит от температуры θ и обращается в нуль вместе с θ (при температуре тела, равной температуре натурального состояния). Тогда по (1.3.4) и (1.3.7)

$$\frac{1}{3}\sigma = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\theta + a' = k\theta + a'. \quad (1.3.8)$$

*) В этой книге вопросы теории упругости анизотропных сред не рассматриваются. Линейной теории упругости анизотропной среды посвящена книга С. Г. Лехницкого «Теория упругости анизотропной среды» (Гостехиздат, 1950). Нелинейным задачам поведения анизотропных упругих тел уделено большое место в книге А. Грина и Дж. Адкинса «Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды» (изд-во «Мир», 1965).

Здесь обозначено

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (1.3.9)$$

Величины k и μ называются соответственно модулем объемного сжатия и модулем сдвига. В дальнейшем, ссылаясь на большое число экспериментальных данных о поведении материалов при гидростатическом давлении (всестороннем равномерном сжатии), примем, что модуль объемного сжатия не зависит от инвариантов деформации; его зависимость от изменения объема испытуемого образца была обнаружена в известных опытах Бриджмена только при сверхвысоких давлениях.

При температуре θ и при отсутствии внешних сил (тогда $\sigma = 0$) тензор деформации $\hat{\epsilon}$ в испытуемом кубике является шаровым и определяется равенством

$$\hat{\epsilon} = \alpha\theta\hat{E}, \quad I_1(\hat{\epsilon}) = \vartheta = 3\alpha\theta, \quad (1.3.10)$$

где α — коэффициент линейного расширения. Подстановка в (1.3.8) теперь дает

$$3k\alpha\theta + a' = 0, \quad a' = -3k\alpha\theta.$$

Приходим к равенству

$$a = \lambda\vartheta - 3k\alpha\theta = \lambda\vartheta - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta,$$

и теперь закон состояния Генки (1.3.2) записывается в виде

$$\hat{T} = \lambda\vartheta\hat{E} + 2\mu\hat{\epsilon} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\hat{E} \quad (1.3.11)$$

или в эквивалентной форме

$$\frac{1}{3}\sigma = \frac{1}{3}I_1(\hat{T}) = k(\vartheta - 3\alpha\theta), \quad \text{Dev } \hat{T} = 2\mu \text{Dev } \hat{\epsilon}. \quad (1.3.12)$$

Возвращаясь к выражению (1.2.3) удельной элементарной работы, имеем теперь

$$\text{Dev } \hat{T} \cdot \delta \text{Dev } \hat{\epsilon} = 2\mu \text{Dev } \hat{\epsilon} \cdot \delta \text{Dev } \hat{\epsilon} = \mu\delta (\text{Dev } \hat{\epsilon})^2$$

и по (I.11.9), (1.3.6)

$$I_1[(\text{Dev } \hat{\epsilon})^2] = -2I_2(\text{Dev } \hat{\epsilon}) = \frac{\Gamma^2}{2}, \quad \delta I_1[(\text{Dev } \hat{\epsilon})^2] = \Gamma \delta \Gamma.$$

Теперь формула удельной элементарной работы внешних сил представляется в таком выразительном виде:

$$\delta' A_{(e)} = k(\vartheta - 3\alpha\theta)\delta\vartheta + \mu\Gamma\delta\Gamma = \frac{\sigma}{3}\delta\vartheta + \tau\delta\Gamma. \quad (1.3.13)$$

Первое слагаемое представляет элементарную удельную работу изменения объема, второе — изменения формы.

Напомним еще, что по формулам (I. 11.6), (I. 10.4), (I. 10.5)

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= -4I_2(\text{Dev } \hat{\epsilon}) = 4 \left[\frac{1}{3} I_1^2(\hat{\epsilon}) - I_2(\hat{\epsilon}) \right] = \\ &= 4 \left[\frac{1}{3} \vartheta^2 - (\epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{22}\epsilon_{33} + \epsilon_{33}\epsilon_{11}) + \frac{1}{4} (\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

§ 2. Потенциальная энергия деформации

2.1. Внутренняя энергия линейно-деформируемого тела. За независимые параметры состояния однородной изотропной среды Генки принимаются первый инвариант тензора деформации *) — объемное расширение ϑ , интенсивность деформации сдвига Γ и температура θ . Термодинамическая величина (потенциал), называемая удельной внутренней энергией E , представляется функцией этих параметров:

$$E = E(\vartheta, \Gamma, \theta). \quad (2.1.1)$$

В соответствии с первым законом термодинамики ее приращение (вариация) δE определяется суммой удельной элементарной работы внешних сил $\delta' A_{(e)}$ и подведенного к единице объема количества тепла $\delta' Q$. Последнее задается соотношением

$$\delta' Q = c\delta\theta + \chi\delta\vartheta. \quad (2.1.2)$$

Здесь c — теплоемкость при постоянном объеме (при $\delta\vartheta = 0$), а $\chi\delta\vartheta$ — количество тепла, затраченного на изменение этого объема. В дальнейшем через Θ обозначается абсолютная температура; очевидно, что

$$\Theta = \Theta_0 + \theta, \quad \delta\Theta = \delta\theta, \quad (2.1.3)$$

где Θ_0 — абсолютная температура тела в натуральном состоянии.

Теперь по (2.1.2) и (1.3.13) имеем

$$\delta E = \delta' A_{(e)} + \delta' Q = [k(\vartheta - 3\alpha\theta) + \chi]\delta\vartheta + c\delta\theta + \mu\Gamma\delta\Gamma. \quad (2.1.4)$$

Условия интегрируемости этого выражения — существования E как функции перечисленных выше параметров — записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} (\vartheta - 3\alpha\theta) \frac{\partial k}{\partial \Gamma} + \frac{\partial \chi}{\partial \Gamma} &= \Gamma \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta}, & \frac{\partial c}{\partial \Gamma} &= \Gamma \frac{\partial \mu}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - 3k\alpha + (\vartheta - 3\alpha\theta) \frac{\partial k}{\partial \theta} &= \frac{\partial c}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

*) На всем протяжении глав, посвященных линейной теории упругости, линейный тензор деформации для сокращения речи называется тензором деформации.

Вторым законом термодинамики утверждается существование еще одной функции параметров состояния системы — энтропии S ; в обратимом равновесном процессе вариация этой величины определяется равенством

$$\delta S = \frac{\delta' Q}{\Theta} = \frac{c}{\Theta} \delta \theta + \frac{\chi}{\Theta} \delta \vartheta = \frac{\partial S}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \delta \vartheta + \frac{\partial S}{\partial \Gamma} \delta \Gamma, \quad (2.1.6)$$

и условия интегрируемости этого выражения представляются в виде

$$\frac{\partial c}{\partial \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\chi}{\Theta}. \quad (2.1.7)$$

Поскольку k не зависит от инвариантов деформации, из первых двух равенств (2.1.5) и (2.1.7) имеем

$$\frac{\partial \mu}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} = 0, \quad \mu = \mu(\Gamma). \quad (2.1.8)$$

Остающиеся равенства дают

$$\chi = \left[3k\alpha - (\vartheta - 3\alpha\theta) \frac{\partial k}{\partial \vartheta} \right] \Theta. \quad (2.1.9)$$

Здесь и далее принимается, что $\alpha\theta$ — величина того же порядка малости, что ϑ ; это позволяет в соответствии с принимаемыми в линейной теории пренебрежениями и вследствие слабой зависимости k от температуры заменить (2.1.9) соотношением

$$\chi = 3k\alpha\Theta. \quad (2.1.10)$$

Теперь по (2.1.5) и (2.1.7) имеем

$$\frac{\partial c}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \Gamma} = 0, \quad c = c(\theta) \quad (2.1.11)$$

— теплоемкость при постоянном объеме зависит в принятом приближении только от температуры.

Выражения $\delta' Q$ и δE теперь записываются в виде

$$\delta' Q = 3k\alpha\Theta \delta \vartheta + c(\theta) \delta \theta, \quad (2.1.12)$$

$$\delta E = k(\vartheta + 3\alpha\Theta_0) \delta \vartheta + \mu\Gamma \delta \Gamma + c(\theta) \delta \theta, \quad (2.1.13)$$

и при сделанных пренебрежениях следует считать k не зависящим от температуры.

2.2. Изотермический процесс деформирования. Если температура в процессе деформирования поддерживается неизменной, то $\theta = 0$, $\Theta = \Theta_0$ и по (1.3.13)

$$\delta' A_{(e)} = k\vartheta \delta \vartheta + \mu\Gamma \delta \Gamma = \frac{1}{3} \sigma \delta \vartheta + \tau \delta \Gamma. \quad (2.2.1)$$

Обратившись же к (2.1.2), (2.1.4), (2.1.6), имеем

$$\delta E = \delta' A_e + \Theta \delta S = \delta' A_{(e)} + \delta(\Theta S) - S \delta \Theta. \quad (2.2.2)$$

Термодинамическая функция (потенциал)

$$F = E - \Theta S \quad (2.2.3)$$

называется свободной энергией системы. Ее вариация по (2.2.2) равна

$$\delta F = \delta' A_{(e)} - S \delta \Theta, \quad (2.2.4)$$

и, следовательно, в изотермическом процессе удельная элементарная работа внешних сил равна вариации свободной энергии:

$$\delta F = \delta' A_{(e)} = k \vartheta \delta \vartheta + \mu \Gamma \delta \Gamma. \quad (2.2.5)$$

2.3. Адиабатический процесс. В этом процессе $\delta' Q = 0$ и по (2.1.12)

$$c(\theta) \delta \theta = -3k\alpha \Theta \delta \vartheta. \quad (2.3.1)$$

В соответствии с ранее допущенными пренебрежениями полагаем

$$\begin{aligned} \frac{c(\theta)}{\Theta} &= \frac{1}{\Theta_0 \left(1 + \frac{\theta}{\Theta_0}\right)} [c(0) + \theta c'(0) + \dots] = \\ &= \frac{c(0)}{\Theta_0} + \frac{\theta}{\Theta_0} \left[c'(0) - \frac{c(0)}{\Theta_0} + \dots \right] \approx \frac{c_0}{\Theta_0}, \end{aligned}$$

где $c_0 = c(0)$ — теплоемкость при температуре начального состояния ($\theta = 0$, $\Theta = \Theta_0$). Учитывая также, что $\vartheta = 0$ при $\theta = 0$, приходим к соотношению

$$3k\alpha \delta \vartheta \approx - \frac{c_0}{\Theta_0} \delta \theta, \quad \theta = - \frac{3k\alpha \Theta_0}{c_0} \vartheta, \quad (2.3.2)$$

определяющему изменение температуры при адиабатическом процессе деформирования.

Теперь по (2.1.4) и (2.3.2) имеем

$$\begin{aligned} \delta E = \delta' A_{(e)} &= k(\vartheta - 3\alpha\theta) \delta \vartheta + \mu \Gamma \delta \Gamma = \\ &= k\vartheta \left(1 + \frac{9k\alpha^2 \Theta_0}{c_0}\right) \delta \vartheta + \mu \Gamma \delta \Gamma. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

При обозначении

$$k' = k \left(1 + \frac{9k\alpha^2 \Theta_0}{c_0}\right) \quad (2.3.4)$$

это равенство записывается в виде

$$\delta E = \delta' A_{(e)} = k' \vartheta \delta \vartheta + \mu \Gamma \delta \Gamma. \quad (2.3.5)$$

Величина k' называется адиабатическим, k — изотермическим модулем объемного сжатия. Модуль сдвига μ имеет одинаковое значение в адиабатическом и изотермическом процессах.

При свободном тепловом расширении, когда $\delta \vartheta = 3\alpha \delta \theta$, сообщаемое единице объема количество тепла $\delta' Q = c_p \delta \theta$, где

c_p — определяемая в обычных опытах теплоемкость при отсутствии напряжений (теплоемкость при постоянном давлении). Поэтому по (2.1.2) и (2.1.10)

$$\delta'Q = c_p \delta\theta = c \delta\theta + 3k\alpha\Theta \cdot 3\alpha \delta\theta \approx c \delta\theta \left(1 + \frac{9k\alpha^2\Theta_0}{c}\right),$$

так что по (2.3.4)

$$\frac{c_p}{c} = \frac{k'}{k}. \quad (2.3.6)$$

В приводимой табл. 1 даны значения этого отношения для некоторых металлов (при 20°С). Из нее следует, что с приемлемой для технических расчетов точностью можно не делать различия между адиабатическим и изотермическим модулями.

Таблица 1

Элемент	c_p/c	Элемент	c_p/c
Алюминий . . .	1,043	Железо	1,016
Молибден . . .	1,007	Медь	1,028
Вольфрам . . .	1,006	Кобальт	1,020
Серебро	1,004	Никель	1,021
Марганец	1,044	Платина	1,020
Свинец	1,067	Золото	1,038

2.4. Удельная энергия деформации. Среды Генки. Основываясь на равенствах (2.2.5) и (2.3.5), введем в рассмотрение функцию инвариантов деформации $A(\vartheta, \Gamma)$, вариация которой определяется равенством

$$\delta A = k\vartheta\delta\vartheta + \mu\Gamma\delta\Gamma = k\vartheta\delta\vartheta + \tau\delta\Gamma. \quad (2.4.1)$$

В изотермическом процессе A отождествляется со свободной энергией F , а в адиабатическом — с внутренней энергией E , и в этом случае k следует заменить на k' — адиабатический модуль объемного сжатия. Но в том и другом процессах может быть определена функция состояния, называемая далее удельной потенциальной энергией деформации,

$$A = \frac{1}{2} k\vartheta^2 + \int_{\Gamma_0}^{\Gamma} \tau \delta\Gamma \quad (2.4.2)$$

с отличием (практически несущественным) в определении величины k для изотермического или адиабатического процессов деформирования. В этих процессах удельная потенциальная энергия деформации равна удельной работе внешних сил на

непрерывной последовательности равновесных состояний, по которой среда переходит из натурального состояния в рассматриваемое равновесное.

Конкретизация выражения (2.4.2) требует знания экспериментально устанавливаемой зависимости

$$\tau = \mu(\Gamma) \Gamma. \quad (2.4.3)$$

Частными случаями изотропных сред Генки являются: а) линейно-упругая гукова среда

$$\mu(\Gamma) = \text{const}; \quad (2.4.4)$$

б) среда в состоянии текучести, когда

$$\tau = \mu(\Gamma) \Gamma = \text{const} = \tau_s. \quad (2.4.5)$$

Через τ_s обозначен предел текучести материала.

Общий случай определяет упрочняющуюся среду. Один и тот же материал при постоянном росте нагружения может пере-

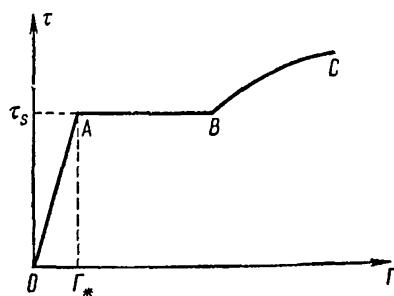


Рис. 12.

ходить через все три стадии. Это показано на диаграмме (Γ, τ) , схематически иллюстрирующей поведение, например, литой стали (рис. 12). Участок OA соответствует линейно-упругому поведению, AB — участок текучести, на котором деформация растет при неизменном $\tau = \tau_s$; с некоторого $\Gamma = \Gamma_*$ начинается участок упрочнения BC , на котором дальнейший рост Γ требует роста τ . Для жестко-пластических материалов линейный участок практически отсутствует — материал до нагружения, соответствующего $\tau = \tau_s$, не деформируется, а при $\tau = \tau_s$ начинается его течение, которое далее может смениться упрочнением. Для нелинейно-упругих материалов (например, меди) отсутствуют участки OA и AB .

В одноосном напряженном состоянии, приближенно реализуемом в опытах на растяжение стержня осевыми силами, отлична от нуля единственная компонента σ_x тензора напряжений. По (2.2.11) гл. I в этом случае

$$\tau^2 = \frac{1}{3} \sigma_x^2, \quad \tau = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}},$$

так что, называя σ_s значение σ_x , при котором достигается предел текучести, имеем

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}. \quad (2.4.6)$$

В случае чистого сдвига отлично от нуля только одно касательное напряжение и τ равно этому напряжению. Определив τ_s из опыта на чистый сдвиг, реализуемого при кручении тонкой трубки, можно поэтому предсказать, что предел текучести в опыте на растяжение стержня из того ж материала наступит при $\sigma_x = \sqrt{3} \tau_s$. Это подтверждается опытами над мягкими металлами (Рош и Эйхингер и др.).

В развернутом виде условия (2.4.5), его называют условием текучести Мизеса, записывается в виде *)

$$\tau^2 = -I_2(\text{Dev } \hat{T}) = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \tau_s^2. \quad (2.4.7)$$

В п. 4.9 гл. I даны оценки внешних сил, позволившие сформулировать достаточный критерий наличия зон пластичности в нагруженном теле и необходимый критерий их отсутствия.

Сказанное в этом пункте применимо к гипотетическому материалу — физической модели, обладающей способностью, накопив энергию за счет работы внешних сил при нагружении, возвращать ее без потерь при восстановлении исходного (натурального) состояния. Одним из предположений при построении этой модели была обратимость процесса. Поведение множества реальных материалов необратимо, накопленная энергия при разгрузке частично рассеивается; это делает предложенную модель приемлемой лишь для рассмотрения процессов, в которых интенсивность касательных напряжений τ монотонно растет. Рассеивание энергии при разгрузке линейно-упругого (гукова) тела незначительно, и необратимостью процесса «нагружение — разгрузка» в нем пренебрегают.

§ 3. Обобщенный закон Гука

3.1. Модули упругости. Закон состояния линейно-упругого тела в изотермическом процессе деформирования ($\theta = 0$) по (1.3.11) записывается в виде

$$\hat{T} = \lambda \vartheta \hat{E} + 2\mu \hat{\epsilon}. \quad (3.1.1)$$

Здесь λ , μ — постоянные модули упругости, называемые коэффициентами Ляме. Форма закона сохраняется и в адиабатическом процессе, но по (1.3.9) и (2.3.4) следует заменить в нем λ

*) Здесь применены и часто ниже будут применяться обозначения компонент тензора напряжения \hat{T} , указанные в матрице (1.4.8) гл. I; для компонент тензора деформации используются аналогичные обозначения $\epsilon_x = \epsilon_{11}$, $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{12}$ и т. д.

мало отличающимся от него адиабатическим модулем λ' :

$$\lambda' = \lambda + \frac{9k\alpha^2\Theta_0}{c}. \quad (3.1.2)$$

Из (3.1.1) легко также выразить тензор деформации $\hat{\epsilon}$ через тензор напряжений \hat{T} . Имеем

$$I_1(\hat{T}) = \sigma = (3\lambda + 2\mu)\vartheta = 3k\vartheta, \quad \vartheta = \frac{\sigma}{3\lambda + 2\mu}, \quad (3.1.3)$$

так что

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma \hat{E} \right). \quad (3.1.4)$$

Равенства (3.1.1), (3.1.4) выражают обобщенный закон Гука. Поведение материала в нем задается двумя постоянными; это является следствием предположений об изотропности среды и малости компонент тензора ∇u , позволивших в общей квадратичной зависимости между соосными тензорами \hat{T} , $\hat{\epsilon}$ сохранить только линейное слагаемое.

Запись законов состояния (3.1.1), (3.1.4) через компоненты тензоров \hat{T} , $\hat{\epsilon}$ в декартовой системе осей имеет вид

$$\sigma_x = \lambda\vartheta + 2\mu\epsilon_x, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \quad \text{и т. д.}, \quad (3.1.5)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{\mu} \tau_{xy} \quad \text{и т. д.} \quad (3.1.6)$$

Обозначения Ляме применяются преимущественно в теоретических работах, в технической литературе их заменяют другими модулями упругости, чаще всего модулем Юнга E (модуль нормальной упругости) и коэффициентом Пуассона ν . Чтобы ввести эти величины, выделим в формуле (3.1.6) для ϵ_x слагаемое σ_x из суммы σ :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_x \left(1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_y + \sigma_z) \right] = \\ &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left[\sigma_x - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_y + \sigma_z) \right]. \end{aligned}$$

При обозначениях

$$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = E, \quad \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \nu \quad (3.1.7)$$

запись обобщенного закона Гука (3.1.6) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu} \tau_{xy}, \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{\mu} \tau_{yz}, \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{1}{\mu} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

В одноосном напряженном состоянии, когда отлична от нуля только компонента σ_x , имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \varepsilon_x, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \quad (3.1.9)$$

и в этой записи легко узнать элементарный закон деформирования растягиваемого осевой силой стержня — его относительное удлинение в осевом направлении пропорционально напряжению с коэффициентом пропорциональности E^{-1} ; это осевое удлинение сопровождается пропорциональным ему поперечным сокращением размеров стержня, определяемым коэффициентом Пуассона ν . Общий случай трехосного растяжения можно истолковать как результат наложения трех последовательно налагаемых одноосных напряженных состояний. Это рассуждение, конечно, предполагает линейность закона деформирования.

Вторая группа формул (3.1.8) выражает пропорциональность сдвига касательному напряжению при чистом сдвиге — при отличном от нуля только τ_{xy} имеет место только соответствующий ему сдвиг γ_{xy} . Учет нелинейности деформации вносит существенный корректив в это простое представление (п. 6.3 гл. II).

Выражения коэффициентов Ляме через E и ν по (3.1.7) записываются в виде

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu}. \quad (3.1.10)$$

Модуль сдвига μ часто обозначают G , а вместо коэффициента Пуассона вводят обратную ему величину, обозначаемую m :

$$\mu = G, \quad m = \frac{1}{\nu}. \quad (3.1.11)$$

Первая формула (3.1.10), дающая выражение модуля сдвига через E , ν , может быть истолкована с помощью известного геометрического построения, в котором рассматривается удлинение диагоналей квадрата, по сторонам которого действуют касательные напряжения, сообщающие изменение прямому углу между этими сторонами.

В записи обобщенного закона Гука может быть, конечно, использована любая пара из введенных выше модулей

$$k, \lambda, \mu = G, E, \nu = \frac{1}{m}.$$

Часто за такую пару принимают μ , ν . Тогда соотношения (3.1.1), (3.1.4) принимают вид, в котором они преимущественно используются в этой книге:

$$\hat{T} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \hat{E} + \hat{\varepsilon} \right), \quad (3.1.12)$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right). \quad (3.1.13)$$

В табл. 2 дается сводка формул, выражающих модули упругости через основную пару модулей.

Т а б л и ц а 2

Мо- дули	Основная пара				
	λ, μ	k, μ	μ, ν	E, ν	E, μ
λ	λ	$k - \frac{2}{3} \mu$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{(E-2\mu)\mu}{3\mu-E}$
$\mu = G$	μ	μ	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	μ
k	$\lambda + \frac{2}{3} \mu$	k	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E\mu}{3(3\mu-E)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{9k\mu}{3k+\mu}$	$2\mu(1+\nu)$	E	E
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3k-2\mu}{6k+2\mu}$	ν	ν	$\frac{1}{2} \frac{E}{\mu} - 1$

3.2. Удельная потенциальная энергия деформации линейно-упругого тела. Ее выражение по (2.4.2) и (2.4.4) в изотермическом и с заменой k на k' в адиабатическом процессах записывается в виде

$$A = \frac{1}{2} (k\vartheta^2 + \mu\Gamma^2) \quad (3.2.1)$$

или, если использовать формулы преобразования (I.10.10), (I.11.6) и ввести модули λ, μ , в виде

$$A = \frac{1}{2} [\lambda I_1^2(\hat{\epsilon}) + 2\mu I_1(\hat{\epsilon}^2)]. \quad (3.2.2)$$

Учитывая теперь, что

$$I_1(\hat{\epsilon}^2) = \epsilon_{ts}\epsilon_{st} = \epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2),$$

приходим к следующему выражению удельной потенциальной энергии деформации через компоненты тензора $\hat{\epsilon}$, обозначаемому далее $A(\epsilon)$:

$$A(\epsilon) = \frac{1}{2} [\lambda\vartheta^2 + 2\mu(\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2) + \mu(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2)]. \quad (3.2.3)$$

В рассматриваемых процессах, напомним, вариация удельной потенциальной энергии (равная вариации свободной энергии в

первом из них и внутренней энергии — во втором) равна элементарной работе внешних сил и может быть по (1.2.1) записана в виде

$$\delta A = \delta' A_{(e)} = \hat{T} \cdot \delta \hat{e} = \\ = t_{11} \delta e_{11} + t_{22} \delta e_{22} + t_{33} \delta e_{33} + t_{12} \delta \gamma_{12} + t_{23} \delta \gamma_{23} + t_{31} \delta \gamma_{31}. \quad (3.2.4)$$

Из этого представления следуют формулы

$$t_{st} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial e_{st}} + \frac{\partial A}{\partial e_{ts}} \right) = \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial e_{ss}}, & t = s, \\ \frac{\partial A}{\partial \gamma_{st}}, & t \neq s, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

выполняющиеся не только для изотропного линейно-упругого тела, но и для всякой среды, когда может быть введено понятие о потенциальной энергии деформации как функции от компонент деформации, определяемой работой внешних сил.

В линейно-упругом (гуковом) теле A — однородная квадратичная форма компонент деформации, и по известной теореме Эйлера

$$2A = \frac{\partial A}{\partial e_{st}} e_{st} = t_{st} e_{st} = \hat{T} \cdot \hat{e}.$$

Пришли к билинейному представлению удельной потенциальной энергии (в этом представлении она будет обозначаться $A(e, \sigma)$)

$$A(e, \sigma) = \frac{1}{2} \hat{T} \cdot \hat{e} = \\ = \frac{1}{2} (\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.2.6)$$

Из него, используя закон Гука в форме (3.1.13), получим выражение удельной потенциальной энергии деформации через тензор напряжений, обозначаемое $A(\sigma)$:

$$A(\sigma) = \frac{1}{4\mu} \hat{T} \cdot \left[\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \hat{E} I_1(\hat{T}) \right] = \frac{1}{4\mu} \left[I_1(\hat{T}^2) - \frac{\nu}{1+\nu} I_1^2(T) \right] \quad (3.2.7)$$

или, в развернутой форме,

$$A(\sigma) = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \\ + \frac{1}{2\mu} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (3.2.8)$$

Соосные тензоры входят вполне равноправно в билинейное выражение удельной потенциальной энергии деформации (3.2.6);

поэтому, наряду с (3.2.4), может быть записано представление ее вариации в виде

$$\delta A = \hat{T} \cdot \delta \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} \cdot \delta \hat{T} = \\ = \epsilon_x \delta \sigma_x + \epsilon_y \delta \sigma_y + \epsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}. \quad (3.2.9)$$

Отсюда получаем соотношения, обратные (3.2.5):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \sigma_x} &= \epsilon_x, & \frac{\partial A}{\partial \sigma_y} &= \epsilon_y, & \frac{\partial A}{\partial \sigma_z} &= \epsilon_z, & \frac{\partial A}{\partial \tau_{xy}} &= \gamma_{xy}, \\ \frac{\partial A}{\partial \tau_{yz}} &= \gamma_{yz}, & \frac{\partial A}{\partial \tau_{zx}} &= \gamma_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

справедливые, однако, как и (3.2.6), только для гукова тела.

3.3. Формула Клапейрона. Область значений модулей упругости. Потенциальная энергия деформации упругого тела определяется интегралом по объему от удельной потенциальной энергии

$$a = \int_V \int A \, d\tau. \quad (3.3.1)$$

Эта величина равна половине работы внешних сил на последовательности равновесных состояний линейно-упругого тела из его натурального состояния. Доказательство основано на равенстве

$$\int_V \int u \cdot (\operatorname{div} \hat{T} + \rho K) \, d\tau + \int_O \int (F - n \cdot \hat{T}) \cdot u \, do = 0. \quad (3.3.2)$$

Действительно, по (II. 3.10) и (3.2.6)

$$\int_V \int u \cdot \operatorname{div} \hat{T} \, d\tau = \int_V \int \operatorname{div} (\hat{T} \cdot u) \, d\tau - \int_V \int \hat{T} \cdot \hat{\epsilon} \, d\tau = \\ = \int_O \int n \cdot \hat{T} \cdot u \, do - \int_V \int 2A \, d\tau$$

и подстановка в (3.3.2) приводит к искомому соотношению

$$a = \frac{1}{2} \left(\int_V \int \rho K \cdot u \, d\tau + \int_O \int F \cdot u \, do \right). \quad (3.3.3)$$

Это — формула Клапейрона. В ней утверждается, что работа внешних сил затрачена на сообщение рассматриваемому объему линейно-упругой среды потенциальной энергии, возвращаемой в виде работы при постепенном разгрузении тела (или кинетической энергии при внезапной разгрузке). Из этих энергетических представлений следует, что $a > 0$. Такое утверждение

эквивалентно локальному (осуществляемому в любой части V -объема) свойству

$$A > 0, \quad (3.3.4)$$

вследствие произвольности объема V .

Утверждение (3.3.4) является свойством, приписываемым упругому телу, — в нем отсутствуют зоны, в которых $A < 0$. В линейно-упругом изотропном теле оно должно обеспечиваться требованиями, накладываемыми на модули упругости:

$$k > 0, \quad \mu > 0. \quad (3.3.5)$$

Отчетливее всего это видно из формулы (3.2.1): при отсутствии сдвигов ($\Gamma = 0$) выполнение неравенства (3.3.4) требует положительности модуля объемного сжатия ($k > 0$), а при неизменности объема ($\Phi = 0$) — положительности модуля сдвига. Неравенства (3.3.5) соответствуют и привычным статическим представлениям о поведении упругого тела: в напряженном состоянии чистого сдвига (п. 2.4 гл. I) деформация сдвига имеет знак касательного напряжения ($\mu > 0$), а при гидростатическом сжатии объем кубика уменьшается ($k > 0$).

Из выражения k через μ , ν :

$$k = \frac{2}{3} \mu \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu},$$

следует, что первое неравенство выполняется для значений коэффициента Пуассона в промежутке

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}. \quad (3.3.6)$$

Растяжение стержня из материала с отрицательным (но большим, чем -1) ν сопровождалось бы увеличением его поперечных размеров. Энергетически существование таких упругих материалов не исключено.

Заметим, что неравенства (3.3.5) могут быть записаны еще в виде

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0. \quad (3.3.7)$$

З а м е ч а н и е. Известно, что квадраты скоростей распространения волн сдвига и сжатия — расширения в упругой среде равны соответственно

$$\frac{\mu}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho} (\lambda + 2\mu) = \frac{2\mu}{\rho} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}.$$

Поэтому $\mu > 0$, $\nu < 1/2$ — распространение волн сжатия — расширения представляется возможным в среде с любым $\nu < 0$. Ограничение $\nu > -1$ является следствием независимого требования (3.3.4). В гипотетическом материале с $\nu < -1$ гидростатическое сжатие кубика сопровождалось бы увеличением его объема.

3.4. Учет температурных слагаемых. Свободная энергия. Отбросим предположение, что процесс деформирования происходит изотермически или адиабатически. Тогда отпадает возможность отождествления удельной элементарной работы внешних сил с вариацией удельной потенциальной энергии деформации; само это понятие приходится отбросить. Его роль отходит к одному из термодинамических потенциалов — или к свободной энергии, или к потенциалу Гиббса (п. 3.5).

Запишем, сославшись на (2.1.13) и (1.3.13), выражение вариации удельной внутренней энергии δE в виде

$$\begin{aligned}\delta E &= k\theta\delta\theta + \mu\Gamma\delta\Gamma + 3k\alpha\Theta_0\delta\theta + c\delta\theta = \\ &= \delta'A_{(e)} + 3k\alpha(\Theta_0 + \theta)\delta\theta + c\delta\theta\end{aligned}$$

или, вспомнив также (1.2.1), (2.1.3),

$$\delta E = \delta'A_{(e)} + 3k\alpha\Theta\delta\theta + c\delta\theta = t_{st}\delta\varepsilon_{st} + 3k\alpha\Theta\delta\theta + c\delta\theta. \quad (3.4.1)$$

С другой стороны, рассматривая внутреннюю энергию и энтропию как функции компонент деформации и температуры, имеем

$$\delta E = \delta'A_{(e)} + \delta'Q = t_{st}\delta\varepsilon_{st} + \Theta\delta S = t_{st}\delta\varepsilon_{st} + \Theta\left(\frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{st}}\delta\varepsilon_{st} + \frac{\partial S}{\partial\Theta}\delta\Theta\right),$$

или

$$\delta E = \left(t_{st} + \Theta\frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{st}}\right)\delta\varepsilon_{st} + \Theta\frac{\partial S}{\partial\Theta}\delta\Theta. \quad (3.4.2)$$

Сравнение с (3.4.1) приводит к формулам

$$\frac{\partial S}{\partial\varepsilon_{st}} = \begin{cases} 0, & s \neq t, \\ 3k\alpha, & s = t, \end{cases} \quad \frac{\partial S}{\partial\Theta} = \frac{c}{\Theta}, \quad (3.4.3)$$

из которых получаем выражение энтропии

$$S = 3k\alpha\theta + \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{c(\Theta)}{\Theta} d\Theta, \quad (3.4.4)$$

где за Θ_0 можно принять абсолютную температуру в натуральном состоянии тела.

По (2.1.13) в случае линейно-упругого тела имеем

$$E = \frac{1}{2}(k\theta^2 + \mu\Gamma^2) + 3k\alpha\Theta_0\theta + \int_{\Theta_0}^{\Theta} c(\Theta) d\Theta,$$

или

$$E = A(\varepsilon) + 3k\alpha\Theta_0\theta + \int_{\Theta_0}^{\Theta} c(\Theta) d\Theta, \quad (3.4.5)$$

причем $A(\varepsilon)$ — квадратичная форма компонент деформации, не отличающаяся по виду от удельной потенциальной энергии в изотермическом процессе.

Теперь по (3.4.5), (3.4.4) и по определению удельной свободной энергии (2.2.3) имеем

$$F = A(\epsilon) - 3k\alpha\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{c(\xi)}{\xi} (\theta - \xi) d\xi. \quad (3.4.6)$$

Производные этой функции по компонентам деформации определяют компоненты тензора напряжения; действительно, по (3.2.3) и (1.3.9) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon_x} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_x - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \gamma_{xy}} = \mu\gamma_{xy} \quad (3.4.7)$$

и т. д. Это уже ранее установленное соотношение (1.3.11) для случая гукера тела

$$\hat{T} = \lambda\theta\hat{E} + 2\mu\hat{\epsilon} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta\hat{E}. \quad (3.4.8)$$

Дифференцирование выражения F по θ приводит к ранее полученному выражению энтропии

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = - \left(3k\alpha\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{c(\xi)}{\xi} d\xi \right) = -S. \quad (3.4.9)$$

По (3.4.8) имеем

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right) + \alpha\theta\hat{E}. \quad (3.4.10)$$

Слагаемое

$$\hat{\epsilon}' = \alpha\theta\hat{E} \quad (3.4.11)$$

представляет тензор деформации отделенного от среды элементарного кубика, нагретого до температуры θ . Но поскольку окружающая среда препятствует изменению размеров этого кубика, создается напряженное состояние, определяемое тензором \hat{T} ; оно в свою очередь создает, налагаемую на температурную деформацию (3.4.11), деформацию, определяемую законом Гука для изотермического процесса *)

$$\hat{\epsilon}'' = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right). \quad (3.4.12)$$

Этим поясняется структура формулы (3.4.10). Заметим еще, что по (3.4.10)

$$\theta = I_1(\hat{\epsilon}) = \frac{1}{2\mu} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma + 3\alpha\theta. \quad (3.4.13)$$

*) Именовать тензоры $\hat{\epsilon}'$, $\hat{\epsilon}''$ «деформациями», строго говоря, нельзя, поскольку условия сплошности выполняются для тензора $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}' + \hat{\epsilon}''$, а не для каждого слагаемого этой суммы по отдельности.

3.5. Термодинамический потенциал Гиббса. Эта термодинамическая функция, обозначаемая через G , в которой за независимые переменные приняты компоненты тензора напряжения \hat{T} и температура θ , связана со свободной энергией преобразованием Лежандра

$$G = t_{sk} e_{sk} - F = \hat{T} \cdot \hat{\varepsilon} - F.$$

Здесь по (3.4.10)

$$\hat{T} \cdot \hat{\varepsilon} = I_1(\hat{T} \cdot \hat{\varepsilon}) = \frac{1}{2\mu} \left[I_1(\hat{T}^2) - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma^2 \right] + \alpha \theta \sigma = 2A(\sigma) + \alpha \theta \sigma, \quad (3.5.1)$$

где $A(\sigma)$ — квадратичная форма компонент тензора напряжения (3.2.8). Через эти компоненты остается выразить также свободную энергию F , в первую очередь входящую в нее форму $A(\varepsilon)$. Имеем

$$I_1(\hat{\varepsilon}) = I_1(\hat{\varepsilon}') + I_1(\hat{\varepsilon}''); \quad I_1^2(\hat{\varepsilon}) = I_1^2(\hat{\varepsilon}'') + \frac{1-2\nu}{\mu(1+\nu)} 3\alpha\theta\sigma + 9\alpha^2\theta^2;$$

$$\hat{\varepsilon}^2 = \hat{\varepsilon}''^2 + \frac{1}{\mu} \alpha \theta \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right) + \alpha^2 \theta^2 \hat{E};$$

$$I_1(\hat{\varepsilon}^2) = I_1(\hat{\varepsilon}''^2) + \frac{1}{\mu} \alpha \theta \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sigma + 3\alpha^2 \theta^2,$$

так что по (3.2.2), используя представление λ через μ и ν , найдем

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \left[\lambda I_1^2(\hat{\varepsilon}'') + 2\mu I_1(\hat{\varepsilon}'') \right] + \alpha \theta \sigma + \mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} 3\alpha^2 \theta^2 = \\ &= A(\sigma) + \alpha \theta \sigma + \mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} 3\alpha^2 \theta^2 \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

и далее по (3.4.13) и (3.4.6)

$$F = A(\sigma) + \alpha \theta \sigma + \mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} 3\alpha^2 \theta^2 - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \theta \alpha \theta - \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{c(\xi)}{\xi} (\Theta - \xi) d\xi,$$

или

$$F = A(\sigma) - \mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} 3\alpha^2 \theta^2 - \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{c(\xi)}{\xi} (\Theta - \xi) d\xi. \quad (3.5.3)$$

Подстановка приводит к следующему выражению потенциала Гиббса:

$$G = A(\sigma) + \alpha \theta \sigma + \mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} 3\alpha^2 \theta^2 + \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{c(\xi)}{\xi} (\Theta - \xi) d\xi. \quad (3.5.4)$$

По свойству преобразования Лежандра приходим к соотношениям, обратным (3.4.7):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial G}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \theta, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial G}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{\mu} \tau_{xy} \quad (3.5.5)$$

и т. д. Энтропия определяется соотношением

$$S = \frac{\partial G}{\partial \theta} = \alpha \sigma + 6\mu \alpha^2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \theta + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{c(\xi)}{\xi} d\xi. \quad (3.5.6)$$

Конечно, это же выражение следует из (3.4.4) и (3.4.13).

В задачах о тепловых напряжениях к свободной энергии и к потенциалу Гиббса отходит роль потенциальной энергии деформации, выраженной соответственно через компоненты деформации и компоненты напряжения.

Считая теплоемкость c при постоянном объеме не зависящей от температуры, а изменение последней $\theta = \Theta - \Theta_0$ малым, имеем

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{c(\xi)}{\xi} d\xi = c \ln \frac{\Theta}{\Theta_0} = c \ln \left(1 + \frac{\theta}{\Theta_0} \right) \approx c \frac{\theta}{\Theta_0},$$

так что, сославшись еще на таблицу п. 3.1 формул, связывающих модули, получаем

$$S = \alpha \sigma + 9k\alpha^2 \theta + c \frac{\theta}{\Theta_0}. \quad (3.5.7)$$

В натуральном состоянии $S = 0$, а в адиабатическом процессе она остается равной нулю. Поэтому изменение температуры упругого тела в этом процессе оказывается равным [см. также (2.3.2), (2.3.4), (2.3.6)]

$$\theta = - \frac{\alpha \sigma}{9k\alpha^2 + \frac{c}{\Theta_0}} = - \frac{\alpha \Theta_0}{c_p} \sigma, \quad (3.5.8)$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении. В п. 4.12 гл. I даны оценки снизу максимума модуля этой величины.

3.6. Уравнение теплопроводности. В рассмотрение вводится вектор теплового потока \mathbf{q} , пропорциональный градиенту температуры и направленный в сторону падения температуры:

$$\mathbf{q} = -K \text{grad } \theta, \quad (3.6.1)$$

где K — коэффициент теплопроводности. Этим вектором определяется количество тепла, выходящее в единицу времени вследствие теплопроводности из произвольного объема V через ограничивающую его поверхность O :

$$\int_O \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} d\sigma = - \int_O \mathbf{n} \cdot K \text{grad } \theta d\sigma = - \int_V \text{div } K \text{grad } \theta d\tau. \quad (3.6.2)$$

Вместе с тем сообщаемое единице объема в единицу времени количество тепла можно представить в виде

$$\frac{\delta Q}{dt} = \Theta \frac{\delta S}{dt} = \Theta \dot{S}. \quad (3.6.3)$$

Поэтому

$$\int_V \int (\Theta \dot{S} - \operatorname{div} K \operatorname{grad} \theta) d\tau = 0$$

и вследствие произвольности объема V

$$\Theta \dot{S} - \operatorname{div} K \operatorname{grad} \theta = 0. \quad (3.6.4)$$

Заменив здесь энтропию S ее значением (3.4.4), получим

$$(3\lambda + 2\mu)\alpha\Theta\dot{\theta} + c(\Theta)\dot{\theta} - \operatorname{div} K \operatorname{grad} \theta = 0. \quad (3.6.5)$$

Как и выше, величину $\alpha\theta$ считаем малой того же порядка, что и θ . Считая еще K постоянным, приходим к уравнению теплопроводности

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{a} \dot{\theta} - \frac{\alpha\Theta_0}{K} (3\lambda + 2\mu) \dot{\theta} = 0, \quad (3.6.6)$$

где

$$a = \frac{K}{c(\Theta_0)}$$

— коэффициент температуропроводности. Другой формой записи уравнения теплопроводности, получаемой при замене S в (3.6.4) значением (3.5.7), служит

$$\nabla^2 \dot{\theta} - \frac{1}{a'} \dot{\theta} - \frac{\alpha\Theta_0}{K} \dot{\sigma} = 0, \quad (3.6.7)$$

где теперь $a' = K/c_p$, что следует из (2.3.6), (2.3.4).

Использование понятия энтропии в равновесном стационарном процессе для вывода уравнения нестационарного распределения температуры основывается на предположении о локально-равновесных и медленно протекающих процессах.

Уравнения (3.6.6), (3.6.7) отличаются от классического уравнения теплопроводности Фурье

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{a} \dot{\theta} = 0 \quad (3.6.8)$$

слагаемыми, обусловленными учетом деформации среды. При нестационарном температурном режиме задачи теплопроводности и теории упругости оказываются связанными: распределение температуры зависит от деформации, а последняя — от распределения температуры. Вместе с тем уравнения равновесия

упругой среды должны быть заменены уравнениями движения ее. Этот эффект может стать заметным при весьма резких изменениях температуры (при «тепловом ударе»), а в обычных условиях он пренебрежимо мал. Уравнения равновесия сохраняют в форме Фурье (3.6.8), а среду считают остающейся в условиях равновесия, пренебрегая ускорениями ее точек («квазистатическое» рассмотрение). Задача теплопроводности решается независимо от задачи теории упругости.

При стационарном распределении температуры

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (3.6.9)$$

ГЛАВА IV

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Дифференциальные уравнения линейной теории упругости

1.1. Перечень исходных соотношений. Основные уравнения теории упругости задаются тремя группами соотношений. Первая группа представлена уравнениями статики в объеме

$$\operatorname{div} \hat{T} + \rho K = 0, \quad (1.1.1)$$

связывающими тремя соотношениями шесть компонент симметричного тензора напряжений \hat{T} .

Вторая группа уравнений содержит определение линейного тензора деформации $\hat{\varepsilon}$ через вектор перемещения u :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^*]. \quad (1.1.2)$$

Здесь имеется шесть уравнений, определяющих компоненты тензора деформации по первым производным трех компонент вектора перемещения.

В третьей группе шести уравнений формулируется закон состояния линейно-упругого тела. Для изотропного тела и в изотермическом или адиабатическом процессах этот закон — обобщенный закон Гука — записывается в форме

$$\hat{T} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \hat{E} + \hat{\varepsilon} \right) \quad (1.1.3)$$

или в форме обратного соотношения

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right). \quad (1.1.4)$$

Пятнадцать уравнений трех групп содержат такое же число неизвестных: двенадцать компонент двух симметричных тензоров второго ранга \hat{T} , $\hat{\varepsilon}$ и три компоненты вектора u .

1.2. Краевые условия. К системе уравнений (1.1.1)—(1.1.3), определяющих поведение линейно-упругого тела в точках его объема, добавляются условия на ограничивающей его поверх-

ности. Они определяют задание или внешних поверхностных сил, или перемещений точек поверхности. Здесь различают также внутреннюю задачу для упругого тела, ограниченного извне, и внешнюю, когда речь идет о бесконечно простирающейся среде, снабженной полостью (или полостями). Для каждой из них обычно формулируют три типа задач.

В первой задаче ставится кинематическое краевое условие: в объеме V разыскивается вектор перемещения, принимающий на поверхности O , ограничивающей этот объем, заданное значение

$$u|_O = u_*(x_1, x_2, x_3). \quad (1.2.1)$$

Конечно, здесь координаты x_1, x_2, x_3 связаны уравнением поверхности.

Вторая краевая задача — статическая. задается распределение поверхностных сил F , и краевым условием является уравнение равновесия на поверхности

$$n \cdot \hat{T}|_O = F. \quad (1.2.2)$$

Третья краевая задача — смешанная. На части O_1 поверхности задается кинематическое, а на другой ее части O_2 — статическое краевое условие:

$$\left. \begin{aligned} u|_{O_1} &= u_*(x_1, x_2, x_3), \\ n \cdot \hat{T}|_{O_2} &= F. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

Этим, конечно, не исчерпывается многообразие постановок задач теории упругости. Например, на некотором участке границы могут быть заданы не все три компоненты вектора u или силы F . Так, краевые условия на площадке, по которой тело опирается на твердое гладкое основание, записываются в виде

$$u \cdot n = 0, \quad n \times (F \times n) = 0, \quad (1.2.4)$$

где, как всегда, n — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела; первое условие выражает отсутствие нормальной компоненты перемещения, а второе — касательной составляющей вектора силы, тогда как ее проекция на нормаль $n \cdot F$ — распределенная реакция гладкого основания — наперед неизвестна. Задача значительно усложняется в случае неупругой связи: площадка не препятствует перемещению тела в направлении $-n$. Тогда к (1.2.4) надо добавить условие $F \cdot n \leq 0$, а на той (наперед неизвестной) части границы, где оно нарушается, заменить условием $F = 0$.

Известны два способа решения задач теории упругости. В первом начинают с разыскания вектора перемещения u , по которому уже не представляет затруднения вычислить тензор деформации $\hat{\epsilon}$, а по последнему — тензор напряжения. Это

естественный путь, особенно если речь идет о первой краевой задаче. Но он не всегда является наиболее простым, и ему во многих случаях следует предпочесть способ решения задачи в напряжениях. Тогда ставится вопрос о разыскании такого статически возможного тензора напряжения \hat{T} , что определяемый по нему тензор деформации $\hat{\epsilon}$ удовлетворяет условию сплошности (2.1.5) гл. II. Вектор перемещения u находится по формуле Чезаро (2.2.2) гл. II.

Оба описанных способа основываются на дифференциальных уравнениях теории упругости, но ими не исчерпываются возможные подходы к решению задач. Еще одна возможность заключена в использовании минимальных энергетических принципов и в применении основанных на них прямых методов решения вариационных задач.

1.3. Дифференциальные уравнения теории упругости в перемещениях. Основываясь на перечисленных в п. 1.1 исходных соотношениях, легко получить дифференциальные уравнения для вектора u . Достаточно для этого в уравнение статики подставить выражение тензора напряжений через этот вектор. Приходим к равенству

$$\mu \operatorname{div} \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \vartheta \hat{E} + \nabla u + (\nabla u)^* \right] + \rho K = 0, \quad (1.3.1)$$

которое после подстановок (см. также II.4)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vartheta \hat{E} &= \hat{E} \cdot \operatorname{grad} \vartheta = \operatorname{grad} \operatorname{div} u, \quad \operatorname{div} \nabla u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u, \\ \operatorname{div} (\nabla u)^* &= \nabla \cdot (\nabla u)^* = i_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot i_k i_t \frac{\partial u_k}{\partial x_t} = i_t \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_t \partial x_s} = \operatorname{grad} \operatorname{div} u \end{aligned}$$

приводит к искомому дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \nabla^2 u + \frac{\rho}{\mu} K = 0. \quad (1.3.2)$$

Проектируя его на оси декартовой системы, приходим к трем уравнениям, называемым дифференциальными уравнениями теории упругости в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \nabla^2 u + \frac{\rho}{\mu} K_x &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \nabla^2 v + \frac{\rho}{\mu} K_y &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \nabla^2 w + \frac{\rho}{\mu} K_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.3.3)$$

где

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} u. \quad (1.3.4)$$

Они были впервые даны Навье (1827), правда, в «одноконстантной» теории (коэффициент Пуассона $\nu = 1/4$), и одновременно с ним Коши (1827—28).

Следствием уравнений (1.3.3) является дифференциальное уравнение для объемного расширения

$$\nabla^2 \vartheta + \frac{\rho}{2\mu} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{K} = 0. \quad (1.3.5)$$

Вспомнив преобразование (II.4.5), можно придать уравнению (1.3.2) другую, иногда применяемую форму:

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \operatorname{grad} \vartheta - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{\rho}{\mu} \mathbf{K} = 0. \quad (1.3.6)$$

Еще одна запись основана на легко проверяемом соотношении

$$\nabla^2 \mathbf{R} \vartheta = \mathbf{R} \nabla^2 \vartheta + 2 \operatorname{grad} \vartheta = - \frac{\rho}{2\mu} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{K} + 2 \operatorname{grad} \vartheta, \quad (1.3.7)$$

где $\mathbf{R} = i_s x_s$ — вектор-радиус; заменив теперь $\operatorname{grad} \vartheta$ в (1.3.2) его значением из (1.3.7), получаем уравнение в перемещениях в форме, предложенной Тедоне:

$$\nabla^2 \left(\mathbf{u} + \frac{1}{2(1-2\nu)} \mathbf{R} \vartheta \right) + \frac{\rho}{\mu} \left(\mathbf{K} + \frac{1}{4(1-\nu)} \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{K} \right) = 0. \quad (1.3.8)$$

При отсутствии объемных сил объемное расширение ϑ по (1.3.5) является гармонической функцией, а \mathbf{u} — бигармоническим вектором:

$$\nabla^2 \vartheta = 0; \quad \nabla^4 \mathbf{u} = 0; \quad \nabla^4 u = 0, \quad \nabla^4 v = 0, \quad \nabla^4 w = 0. \quad (1.3.9)$$

Последнее сразу же следует из (1.3.3), но надо заметить, что три бигармонические функции u , v , w не независимы; действительно, по (1.3.8) вектор \mathbf{u} представим (при $\mathbf{K} = 0$) через четыре гармонические функции — гармонический вектор \mathbf{a} и гармонический скаляр ϑ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \mathbf{R} \vartheta, \quad (1.3.10)$$

связанные условием (1.3.4).

Краевое условие (1.2.2) на части границы, на которой заданы поверхностные силы, записывается через вектор перемещения в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}} &= 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}} \right) = \\ &= 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} \right). \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Здесь использованы равенства (1.2.13) и (1.2.12) гл. II. В проекциях на оси декартовой системы эти краевые условия имеют вид

$$F_\alpha = 2\mu \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta n_\alpha + \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{2} \left[n_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (1.3.12)$$

и т. д. Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

— производная u по нормали к поверхности.

1.4. Представление решения в форме Папковича — Нейбера. Трудность разыскания частных решений системы уравнений теории упругости в перемещениях обусловлена тем, что каждая из искоемых функций u , v , w входит во все три уравнения (1.3.3). Эта трудность устранена в предложенном П. Ф. Папковичем (1932) и Г. Нейбером (1934) представлении перемещений через гармонические функции; этим достигается возможность использования хорошо известного «каталога» частных решений уравнения Лапласа, а иногда даже удается привести задачу теории упругости, если не целиком, то частично, к одной из классических задач теории гармонических функций (теории потенциала).

Можно предложить большое число представлений вида (1.3.10) для решения однородной ($K = 0$) системы уравнений теории упругости через гармонические функции; их недостатком, устраненным в решении Папковича — Нейбера, является независимость вводимых гармонических функций.

Пусть \mathbf{B} — гармонический вектор, вектор — лапласиан которого равен нулю:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0. \quad (1.4.1)$$

Тогда и проекции этого вектора на оси декартовой системы координат также удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 B_x = 0, \nabla^2 B_y = 0, \nabla^2 B_z = 0. \quad (1.4.2)$$

Было бы, однако, ошибкой распространить это на случай осей криволинейной системы координат; проекции лапласиана от вектора на оси переменного направления отнюдь не равны лапласианам от его проекций на эти оси.

Предполагая, что объемные силы потенциальны:

$$\rho \mathbf{K} = -\text{grad } \Pi, \quad (1.4.3)$$

разыскиваем решение уравнения (1.3.2) в виде

$$\mathbf{u} = 4(1 - \nu) \mathbf{B} + \text{grad } \chi. \quad (1.4.4)$$

Тогда, замечая, что

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{u} &= 4(1 - \nu) \text{div } \mathbf{B} + \nabla^2 \chi, \quad \text{grad div } \mathbf{u} = \\ &= \text{grad } [4(1 - \nu) \text{div } \mathbf{B} + \nabla^2 \chi], \end{aligned}$$

и учитывая (1.4.1), приходим к соотношению

$$\text{grad} \left[4(1 - \nu) \text{div } \mathbf{B} + 2(1 - \nu) \nabla^2 \chi - \frac{1 - 2\nu}{\mu} \Pi \right] = 0,$$

которому можно удовлетворить, подчинив выбор χ уравнению

$$\nabla^2 \chi = -2 \operatorname{div} \mathbf{B} + \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \Pi. \quad (1.4.5)$$

Общее решение этого уравнения представляется суммой решения уравнения

$$\nabla^2 \chi = -2 \operatorname{div} \mathbf{B} \quad (1.4.6)$$

и какого-либо частного решения χ_0 уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \chi_0 = \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \Pi. \quad (1.4.7)$$

Частное решение уравнения (1.4.6) может быть взято в виде

$$\chi = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = -(xB_x + yB_y + zB_z), \quad (1.4.8)$$

что легко проверить непосредственным вычислением

$$\nabla^2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla^2 \mathbf{R} + 2 \operatorname{div} \mathbf{B} = 2 \operatorname{div} \mathbf{B}, \quad (1.4.9)$$

так как $\nabla^2 \mathbf{R} = 0$. Общее решение этого уравнения получим, добавив к (1.4.8) произвольный гармонический скаляр, обозначаемый $-B_0$. Итак,

$$\chi = -(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0)$$

и искомое представление решения уравнений теории упругости записывается в виде

$$\mathbf{u} = 4(1-\nu)\mathbf{B} - \operatorname{grad}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0) + \operatorname{grad} \chi_0 \quad (1.4.10)$$

причем последнее слагаемое отбрасывается, если объемные силы отсутствуют, а при наличии непотенциальных объемных сил его следует заменить каким-либо частным решением исходных уравнений (1.3.3). Обычно такое частное решение легко найти; существует также общий прием его построения (п. 3.7 этой главы).

По (II.2.12), (II.2.9) имеем

$$\nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot (\nabla \mathbf{B})^* + \mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot \operatorname{def} \mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B},$$

и это позволяет записать решение Папковича — Нейбера (1.4.10) в видах

$$\mathbf{u} = (3-4\nu)\mathbf{B} - \mathbf{R} \cdot (\nabla \mathbf{B})^* - \operatorname{grad} B_0 + \operatorname{grad} \chi_0, \quad (1.4.11)$$

$$\mathbf{u} = (3-4\nu)\mathbf{B} - \mathbf{R} \cdot \operatorname{def} \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} - \operatorname{grad} B_0 + \operatorname{grad} \chi_0. \quad (1.4.12)$$

Тензор деформации, вычисляемый по решению (1.4.10), равен

$$\varepsilon = 4(1-\nu) \operatorname{def} \mathbf{B} - \operatorname{def} \operatorname{grad}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0) + \operatorname{def} \operatorname{grad} \chi_0.$$

Замечая, что градиент вектора, являющегося градиентом скаляра ψ , является симметричным тензором, имеем

$$\text{def grad } \psi = \frac{1}{2} [\nabla \nabla \psi + (\nabla \nabla \psi)'] = \nabla \nabla \psi.$$

Поэтому

$$\hat{\varepsilon} = 4(1 - \nu) \text{def } \mathbf{B} - \nabla \nabla (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0) + \nabla \nabla \chi_0 \quad (1.4.13)$$

и, далее,

$$\vartheta = I_1(\hat{\varepsilon}) = 4(1 - \nu) \text{div } \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + \nabla^2 \chi_0$$

или, если сослаться на (1.4.9) и (1.4.7),

$$\vartheta = 2(1 - 2\nu) \text{div } \mathbf{B} + \frac{1 - 2\nu}{2\mu(1 - \nu)} \Pi. \quad (1.4.14)$$

По (1.1.3) теперь записывается выражение тензора напряжений:

$$\hat{T} = 2\mu [2\nu \hat{E} \text{div } \mathbf{B} + 4(1 - \nu) \text{def } \mathbf{B} - \nabla \nabla (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0)] + \hat{T}^0, \quad (1.4.15)$$

где \hat{T}^0 определяется по объемным силам:

$$\hat{T}^0 = \frac{\nu}{1 - \nu} \Pi \hat{E} + 2\mu \nabla \nabla \chi_0. \quad (1.4.16)$$

Воспользовавшись еще соотношением

$$\nabla \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = i_s i_t \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_t} x_k B_k = 2 \text{def } \mathbf{B} + x_k \nabla \nabla B_k,$$

можно представить тензор \hat{T} еще в виде

$$\hat{T} = 2\mu [2\nu \hat{E} \text{div } \mathbf{B} + 2(1 - 2\nu) \text{def } \mathbf{B} - x_k \nabla \nabla B_k - \nabla \nabla B_0] + \hat{T}^0. \quad (1.4.17)$$

З а м е ч а н и я. 1. Исходная система однородных уравнений равновесия в перемещениях содержит три неизвестные функции u , v , w . Поэтому приемлемо предположение, что достаточно удержать в решении лишь три из входящих в него гармонических функций B_s , B_0 . Откинув B_0 (с целью сохранить симметрию относительно координат), придем к решению

$$u = 4(1 - \nu) \mathbf{B} - \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.4.18)$$

Однако может быть доказано, что в случае односвязной конечной области общее решение уравнений равновесия в перемещениях может быть представлено в таком виде лишь при условии $\nu \neq 0,25$.

2. Из уравнений равновесия непосредственно следует, что решением их может служить градиент гармонического скаляра ($\mathbf{u} = \nabla B_0$, $\nabla^2 B_0 = 0$), а также ротор гармонического вектора ($\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{C}$, $\nabla^2 \mathbf{C} = 0$). Эти решения малосодержательны, так как ими описываются только деформированные состояния с сохранением объема ($\vartheta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 B_0 = 0$, $\vartheta = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{C} = 0$).

3. Легко проверяется, что задание вектора перемещения в форме, предложенной И. С. Аржаных и М. Г. Слободянским,

$$u = 4(1 - \nu)B + R \cdot \nabla B - R \nabla \cdot B, \quad (1.4.19)$$

где B — гармонический вектор, также является решением уравнения равновесия в перемещениях.

Представление (1.4.19) переписывается в виде

$$u = 4(1 - \nu)B + R \cdot \text{def } B - \frac{1}{2}R \times \text{rot } B - R \nabla \cdot B \quad (1.4.20)$$

и будет решением, если разность его и решения Папковича — Нейбера в форме (1.4.12)

$$A = 2R \cdot \text{def } B + B - R \nabla \cdot B$$

также являются решением уравнений теории упругости в перемещениях; тогда она представима в форме ротора некоторого гармонического вектора ($A = \text{rot } C, \nabla^2 A = 0$). Итак, надо проверить, что

$$\nabla \cdot A = 0, \quad \nabla^2 A = 0.$$

Это следует из соотношений

$$\nabla \cdot 2R \cdot \text{def } B = 2R \cdot \nabla \cdot \text{def } B + I_1(\text{def } B) = R \cdot \nabla^2 B + R \cdot \nabla \nabla \cdot B + 2\nabla \cdot B,$$

$$\nabla \cdot (R \nabla \cdot B) = 3\nabla \cdot B + R \cdot \nabla \nabla \cdot B,$$

$$\nabla^2 R \cdot \text{def } B = 2(\nabla^2 B + \nabla \nabla \cdot B), \quad \nabla^2 R \nabla \cdot B = 2\nabla \nabla \cdot B$$

и условия $\nabla^2 B = 0$.

М. Г. Слободянским доказано, что (1.4.19) представляет общее решение уравнений теории упругости для односвязной конечной области при любом ν (не исключая $\nu = 0.25$); в случае бесконечной области, внешней по отношению к замкнутой поверхности, общим (не исключая $\nu = 0.25$) является решение (1.4.18).

1.5. Решение в напряжениях. Зависимости Бельтрами. Тензор напряжений \hat{T} , удовлетворяющий уравнениям статики в объеме, должен быть так выбран, чтобы вычисленный по нему тензор деформации удовлетворял условиям совместности (2.1.5) гл. II:

$$\text{Ink } \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \text{Ink } \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right) = 0. \quad (1.5.1)$$

Используя уравнение статики, можно преобразовать это соотношение к более обзримому и запоминаемому виду. Прделавав это, придем к зависимостям Бельтрами (1892).

По (2.3.2) гл. II

$$\text{Ink } \sigma \hat{E} = \hat{E} \nabla^2 \sigma - \nabla \nabla \sigma. \quad (1.5.2)$$

Далее, сославшись на формулы (II.4.15) и уравнения равновесия (1.5.6) гл. I, можно представить компоненты $(\text{Ink } \hat{T})_{ik}$ тензора $\text{Ink } \hat{T}$ в виде

$$\begin{aligned} (\text{Ink } \hat{T})_{11} &= \frac{\partial^2 t_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 t_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 t_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \\ &= \frac{\partial^2 t_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 t_{33}}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 t_{13}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 t_{33}}{\partial x_3^2} + \rho \frac{\partial K_3}{\partial x_3} \right) + \left(\frac{\partial^2 t_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 t_{22}}{\partial x_2^2} + \rho \frac{\partial K_2}{\partial x_2} \right) = \\ &= \nabla^2 (t_{22} + t_{33}) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (t_{22} + t_{33}) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} \right) + \rho \left(\frac{\partial K_2}{\partial x_2} + \frac{\partial K_3}{\partial x_3} \right) = \\ &= \nabla^2 (\sigma - t_{11}) - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \rho \text{div } K - 2\rho \frac{\partial K_1}{\partial x_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{Ink } \hat{T})_{12} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial t_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial t_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 t_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial t_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \rho K_2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{21}}{\partial x_2} + \rho K_1 \right) - \\ &\quad - \frac{\partial^2 t_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 t_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = - \left[\nabla^2 t_{12} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} + \rho \left(\frac{\partial K_2}{\partial x_1} + \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

В единой записи этим равенствам можно придать вид

$$(\text{Ink } \hat{T})_{sk} = \delta_{sk} (\nabla^2 \sigma + \rho \text{div } K) - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_s \partial x_k} - \nabla^2 t_{sk} - \rho \left(\frac{\partial K_s}{\partial x_k} + \frac{\partial K_k}{\partial x_s} \right),$$

откуда следует инвариантное (бескоординатное) представление

$$\text{Ink } \hat{T} = (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) \sigma - \nabla^2 \hat{T} + \hat{E} \rho \text{div } K - 2\rho \text{def } K. \quad (1.5.3)$$

Вообще для симметричного тензора второго ранга \hat{Q}

$$\text{Ink } \hat{Q} = - \nabla^2 \hat{Q} + 2 \text{def div } \hat{Q} + (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) I_1(\hat{Q}) - \hat{E} \nabla \cdot \nabla \cdot \hat{Q}. \quad (1.5.4)$$

Теперь, подставив (1.5.2), (1.5.3) в исходное соотношение (1.5.1), получим

$$- \nabla^2 \hat{T} + \hat{E} \rho \text{div } K - 2\rho \text{def } K + \frac{1}{1+\nu} (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) \sigma = 0. \quad (1.5.5)$$

Отсюда, образуя первый инвариант тензора в левой части этого равенства, придем к соотношению

$$\nabla^2 \sigma = - \frac{1+\nu}{1-\nu} \rho \text{div } K, \quad (1.5.6)$$

которое, конечно, можно получить из (1.3.5), заменив ϑ его выражением (3.1.3) гл. III через σ .

Приходим к обычно принимаемой форме записи зависимостей Бельтрами:

$$\nabla^2 \hat{T} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \sigma + 2\rho \operatorname{def} K + \hat{E} \frac{\nu}{1-\nu} \rho \operatorname{div} \hat{K} = 0. \quad (1.5.7)$$

При отсутствии массовых сил они принимают без труда запоминаемый вид

$$\nabla^2 \hat{T} + \frac{\nabla \nabla \sigma}{1+\nu} = 0 \quad (1.5.8)$$

или, в компонентах в декартовой системе координат,

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= 0, & \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= 0, & \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0, & \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.9)$$

1.6. Преобразование Ю. А. Круткова. Рассматривая случай отсутствия массовых сил, представим, следуя (1.6.6) гл. I, тензор напряжений \hat{T} через тензор функций напряжений:

$$\hat{T} = \operatorname{Ink} \hat{\Phi}. \quad (1.6.1)$$

Этим тождественно удовлетворяются уравнения статики, и остается подчинить выбор $\hat{\Phi}$ зависимости Бельтрами (1.5.8).

Сославшись на (1.5.2) и (1.5.6), имеем

$$\nabla \nabla \sigma = -\operatorname{Ink} \sigma \hat{E}, \quad (1.6.2)$$

и это позволяет записать (1.5.8) в виде

$$\operatorname{Ink} \left(\nabla^2 \hat{\Phi} - \frac{\sigma}{1+\nu} \hat{E} \right) = 0. \quad (1.6.3)$$

Но обращение в нуль операции Ink над симметричным тензором означает, что этот тензор является деформацией некоторого вектора (п. 2.1 гл. II); итак,

$$\nabla^2 \hat{\Phi} - \frac{\sigma}{1+\nu} \hat{E} = \operatorname{def} c. \quad (1.6.4)$$

Вместе с тем

$$\sigma = I_1 (\operatorname{Ink} \hat{\Phi}) = I_1 (\nabla^2 \hat{\Phi}) - \operatorname{div} \operatorname{div} \hat{\Phi}, \quad (1.6.5)$$

что нетрудно проверить сложением диагональных элементов тензора $\operatorname{Ink} \hat{\Phi}$ [см. (II. 4.15)]. Поэтому, обозначая для сокращения письма

$$I_1 (\hat{\Phi}) = \Phi, \quad \operatorname{div} \hat{\Phi} = b, \quad (1.6.6)$$

приходим к иной записи соотношения (1.6.4):

$$\nabla^2 \hat{\Phi} - \frac{1}{1+\nu} \hat{E} (\nabla^2 \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}) = \operatorname{def} \mathbf{c}. \quad (1.6.7)$$

Вектор \mathbf{c} можно исключить, выразив равенство следов тензоров в левой и правой частях этого соотношения; имеем

$$I_1(\nabla^2 \hat{\Phi}) = \nabla^2 \Phi, \quad I_1(\operatorname{def} \mathbf{c}) = \operatorname{div} \mathbf{c}, \quad \nabla^2 \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi, \quad I_1(\hat{E}) = 3.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \left(\frac{3}{1+\nu} \mathbf{b} - \frac{2-\nu}{1+\nu} \operatorname{grad} \Phi - \mathbf{c} \right) = 0, \quad (1.6.8)$$

и вектор в скобках является ротором некоторого вектора, так что

$$\mathbf{c} = \frac{3}{1+\nu} (\mathbf{b} - \operatorname{rot} \mathbf{q}) - \frac{2-\nu}{1+\nu} \operatorname{grad} \Phi.$$

Считая, что $\operatorname{rot} \mathbf{q}$ включен в вектор \mathbf{b} , имеем теперь

$$\mathbf{c} = \frac{3}{1+\nu} \mathbf{b} - \frac{2-\nu}{1+\nu} \operatorname{grad} \Phi, \quad \operatorname{def} \mathbf{c} = \frac{3}{1+\nu} \operatorname{def} \mathbf{b} - \frac{2-\nu}{1+\nu} \nabla \nabla \Phi,$$

и подстановка в (1.6.7) приводит к дифференциальному уравнению, содержащему только операции над тензором $\hat{\Phi}$:

$$\nabla^2 \hat{\Phi} = \frac{1}{1+\nu} \hat{E} (\nabla^2 \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}) + \frac{3}{1+\nu} \operatorname{def} \mathbf{b} - \frac{2-\nu}{1+\nu} \nabla \nabla \Phi. \quad (1.6.9)$$

Теперь выражение тензора напряжений \hat{T} через тензор функций напряжений, основываясь на формуле (1.5.4), можно записать в виде

$$\hat{T} = \operatorname{Ink} \hat{\Phi} = -\nabla^2 \hat{\Phi} + 2 \operatorname{def} \mathbf{b} + (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) \Phi - \hat{E} \operatorname{div} \mathbf{b}$$

или, после исключения $\nabla^2 \hat{\Phi}$ с помощью (1.6.9), в виде

$$\hat{T} = \frac{\nu}{1+\nu} \hat{E} (\nabla^2 \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}) - \frac{1-2\nu}{1+\nu} (\operatorname{def} \mathbf{b} - \nabla \nabla \Phi). \quad (1.6.10)$$

Отсюда

$$\sigma = I_1(\hat{T}) = \nabla^2 \Phi - \operatorname{div} \mathbf{b}, \quad (1.6.11)$$

так что выражение тензора деформации получает следующее представление:

$$2\mu \hat{\varepsilon} = \hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma E = -\frac{1-2\nu}{1+\nu} (\operatorname{def} \mathbf{b} - \nabla \nabla \Phi)$$

или

$$2\mu \hat{\varepsilon} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \operatorname{def} (\nabla \Phi - \mathbf{b}). \quad (1.6.12)$$

Из него с точностью до перемещения среды как твердого тела находим вектор перемещения \mathbf{u} :

$$2\mu \mathbf{u} = \frac{1-2\nu}{1+\nu} (\nabla \Phi - \mathbf{b}) = \frac{1-2\nu}{1+\nu} [\nabla I_1(\hat{\Phi}) - \operatorname{div} \hat{\Phi}]. \quad (1.6.13)$$

Полученные Ю. А. Крутковым (1949) формулы (1.6.10), (1.6.13) представляют одну из форм общего решения задачи линейной теории упругости; ими определяются по тензору функций напряжений, удовлетворяющему дифференциальному уравнению (1.6.9), тензор напряжения \hat{T} и вектор перемещения u . Они оказались зависящими лишь от первого инварианта Φ и дивергенции b тензора $\hat{\Phi}$. Поэтому нет нужды в знании всех компонент этого тензора, а достаточно лишь связать b и Φ соотношением, являющимся следствием (1.6.9).

1.7. Решение Буссинека—Галеркина. Искомое выражение вектора b через Φ можно получить, приравнявая дивергенции обеих частей равенства (1.6.9). Имеем

$$\operatorname{div} \nabla^2 \hat{\Phi} = \nabla^2 b, \quad \operatorname{div} \hat{E} (\nabla^2 \Phi - \operatorname{div} b) = \operatorname{grad} \nabla^2 \Phi - \operatorname{grad} \operatorname{div} b,$$

$$\operatorname{div} \nabla \nabla \Phi = \nabla^2 \nabla \Phi = \operatorname{grad} \nabla^2 \Phi, \quad \operatorname{div} \operatorname{def} b = \frac{1}{2} (\nabla^2 b + \operatorname{grad} \operatorname{div} b)$$

и после подстановки в (1.6.9) получим

$$\nabla^2 b + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} b = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \operatorname{grad} \nabla^2 \Phi. \quad (1.7.1)$$

Можно удовлетворить этому соотношению, введя представление b и Φ через вектор G в виде

$$b = \nabla^2 G, \quad \Phi = \frac{1}{2(1-\nu)} \operatorname{div} G. \quad (1.7.2)$$

Вектор G по (1.7.1) оказывается бигармоническим:

$$\nabla^4 G = 0. \quad (1.7.3)$$

Выражения вектора перемещения и тензора напряжений через вектор G по (1.6.13) и (1.6.10) записываются в виде

$$2\mu u = \operatorname{grad} \operatorname{div} G - 2(1-\nu) \nabla^2 G, \quad (1.7.4)$$

$$\hat{T} = \nabla \nabla \operatorname{div} G - 2(1-\nu) \operatorname{def} \nabla^2 G - \nu \hat{E} \operatorname{div} \nabla^2 G. \quad (1.7.5)$$

Эта форма решения уравнений теории упругости была дана Б. Г. Галеркиным (1930) и ранее была известна Буссинеку (1878).

Основываясь на (1.7.1) и (1.6.13), можно сразу же получить и решение в форме Папковича—Нейбера. Достаточно заметить, что уравнение (1.7.1) не отличается от уравнения в перемещениях (1.3.2), если отождествить $\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \mu \nabla^2 \Phi$ с потенциалом объемной силы P . Тогда по (1.4.7) $\chi_0 = \Phi$, и, записав решение уравнения (1.7.1) в виде (1.4.10):

$$b = -\frac{1+\nu}{1-2\nu} [4(1-\nu) B - \operatorname{grad} (R \cdot B + B_0)] + \nabla \Phi, \quad (1.7.6)$$

по (1.6.13) придем к представлению вектора перемещения в упомянутой форме (при отсутствии массовых сил).

Нетрудно также установить связь между векторами \mathbf{B} и \mathbf{G} . По (1.7.6) и (1.7.2) имеем

$$\nabla^2 \mathbf{G} = -\frac{1+\nu}{1-2\nu} [4(1-\nu) \mathbf{B} - \text{grad} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0)] + \frac{1}{2(1-\nu)} \text{grad div } \mathbf{G},$$

так что по (1.7.3), (1.4.9)

$$\frac{1+\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{2(1-\nu)} \text{div } \nabla^2 \mathbf{G}, \quad \text{div} \left[4(1-\nu) \mathbf{B} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^2 \mathbf{G} \right] = 0,$$

и можно принять

$$4(1-\nu) \mathbf{B} = -\frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla^2 \mathbf{G}. \quad (1.7.7)$$

1.8. Криволинейные координаты. В предшествующих пунктах основные соотношения были представлены в инвариантной форме зависимостей между векторными или тензорными величинами; поэтому запись формул в криволинейных координатах требует лишь внимательного соблюдения правил тензорного исчисления (Приложения III—V).

В линейной теории отпадает потребность различения базисов начального и конечного состояний. Это позволяет представить тензор напряжений \hat{T} через его контравариантные компоненты в векторном базисе \mathbf{r}_s , вместо (3.1.1) гл. I, формулой

$$\hat{T} = t^{sk} \mathbf{r}_s \mathbf{r}_k. \quad (1.8.1)$$

Уравнения равновесия в объеме по (3.3.4) гл. I записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{g} t^{sq} + \left\{ \begin{matrix} q \\ mn \end{matrix} \right\} t^{mn} + \rho \sqrt{g} K^q = 0. \quad (1.8.2)$$

Линейный тензор деформации представляется через его ковариантные компоненты

$$\hat{e} = e_{st} \mathbf{r}^s \mathbf{r}^t, \quad e_{st} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial q^t} + \frac{\partial u_t}{\partial q^s} \right) - \left\{ \begin{matrix} r \\ st \end{matrix} \right\} u_r \quad (1.8.3)$$

— это формулы (3.6.7) гл. II, в них u_r — ковариантные компоненты вектора перемещения. По (IV.7.5) и (V.4.4) объемное расширение может быть выражено в одном из видов

$$\vartheta = g^{sk} e_{sk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} g^{rq} u_q}{\partial q^r} \quad (1.8.4)$$

Записывая формулы, связывающие контравариантные компоненты тензора напряжений с ковариантными компонентами тензора деформации, следует иметь в виду, что роль тензора \hat{E} в выра-

жении обобщенного закона Гука (1.1.3) отходит к тензору \hat{g} . Поэтому, сославшись также на (1.8.4), имеем

$$t^{sk} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} g^{sk} \vartheta + g^{sm} g^{kn} \varepsilon_{mn} \right) = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} g^{sk} g^{mn} + g^{sm} g^{kn} \right) \varepsilon_{mn}. \quad (1.8.5)$$

Обратные соотношения записываются в виде

$$\varepsilon_{sk} = \frac{1}{2\mu} \left(g_{sm} g_{kn} t^{mn} - \frac{\nu}{1+\nu} g_{sk} \sigma \right) = \frac{1}{2\mu} \left(g_{sm} g_{kn} - \frac{\nu}{1+\nu} g_{sk} g_{mn} \right) t^{mn}. \quad (1.8.6)$$

Билинейное представление удельной потенциальной энергии деформации (3.2.6) гл. III записывается в виде

$$A(\varepsilon, \sigma) = \frac{1}{2} t^{sk} \varepsilon_{sk}, \quad (1.8.7)$$

так что по (1.8.5), (1.8.6) ее представления $A(\varepsilon)$ и $A(\sigma)$ через тензоры деформаций и напряжений будут

$$A(\varepsilon) = \mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} g^{sk} g^{mn} + g^{sm} g^{kn} \right) \varepsilon_{sk} \varepsilon_{mn}, \quad (1.8.8)$$

$$A(\sigma) = \frac{1}{4\mu} \left(g_{sm} g_{kn} - \frac{\nu}{1+\nu} g_{sk} g_{mn} \right) t^{sk} t^{mn}. \quad (1.8.9)$$

Запись уравнений равновесия в перемещениях (1.3.2) получаем, сославшись на (V.4.9), в виде

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial q^t} + g^{sk} \nabla_s \nabla_k u_t + \frac{\rho}{\mu} K_t = 0. \quad (1.8.10)$$

По (V.3.5), (V.3.4) имеем

$$\nabla^2 \hat{T} = \nabla \cdot \nabla \hat{T} = r^m \frac{\partial}{\partial q^m} \cdot r^q r_s r_t \nabla_q t^{st} = g^{mq} r_s r_t \nabla_m \nabla_q t^{st},$$

$$\nabla \nabla \sigma = r^n \frac{\partial}{\partial q^n} r^k \frac{\partial \sigma}{\partial q^k} = r^n r^k \nabla_n \frac{\partial \sigma}{\partial q^k},$$

и зависимости Бельтрами (1.5.8) при отсутствии массовых сил представляются в виде

$$g^{mq} \nabla_m \nabla_q t^{st} + \frac{g^{nq} t^{tk}}{1+\nu} \nabla_n \frac{\partial \sigma}{\partial q^k} = 0. \quad (1.8.11)$$

Развернутые выражения операций двукратного ковариантного дифференцирования в уравнениях (1.8.10), (1.8.11) весьма громоздки.

1.9. Ортогональные координаты. В этом пункте индексами (снизу) обозначаются физические (а не ковариантные) компоненты векторов и тензоров. Выражения используемых далее дифференциальных операций приведены в п. III.5.

Обобщенный закон Гука (в физических компонентах) записывается в виде

$$t_{sk} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \delta_{sk} + \varepsilon_{sk} \right), \quad (1.9.1)$$

причем выражения ϑ , ε_{sk} даются формулами (III.5.3), (III.5.8), (III.5.9); в них надо лишь заменить a_s на u_s — проекции вектора перемещения на направления единичных векторов e_s базисного триэдра. Уравнение равновесия (1.1.1) по (III.5.10) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^s} \left(\frac{\sqrt{g}}{H_s} t_{st} e_t \right) + \rho \sqrt{g} K = 0. \quad (1.9.2)$$

В цилиндрических координатах (пп. III.1, III.7) компоненты тензора деформации и объемное расширение записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_\varphi = \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \vartheta &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9.3)$$

где u , v , w — проекции вектора перемещения на оси e_r , e_φ , k цилиндрической системы. Уравнения равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \rho K_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \rho K_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho K_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9.4)$$

Выражения компонент тензора деформации в сферических координатах (пп. III.1, III.8) более громоздки. Обозначая u_R , u_ϑ , u_λ проекции вектора перемещения на базисные векторы

$e_R, e_\vartheta, e_\lambda$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_R &= \frac{\partial u_R}{\partial R}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{R} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_R}{R}, \quad \varepsilon_\lambda = \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_\vartheta}{R} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{u_R}{R}, \\ \gamma_{\vartheta\lambda} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \lambda} - u_\lambda \operatorname{ctg} \vartheta \right), \quad \gamma_{\lambda R} = \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial u_R}{\partial \lambda} + \frac{\partial u_\lambda}{\partial R} - \frac{u_\lambda}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{R\vartheta} &= \frac{\partial u_\vartheta}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{R}, \\ \vartheta &= \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R^2 u_R \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (R u_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (R u_\lambda) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.9.6)$$

Уравнения равновесия записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \tau_{R\lambda}}{\partial \lambda} + \\ + \frac{1}{R} (2\sigma_R - \sigma_\vartheta - \sigma_\lambda + \tau_{R\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta) + \rho K_R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{R\vartheta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \tau_{\vartheta\lambda}}{\partial \lambda} + \\ + \frac{1}{R} [(\sigma_\vartheta - \sigma_\lambda) \operatorname{ctg} \vartheta + 3\tau_{R\vartheta}] + \rho K_\vartheta &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{R\lambda}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\vartheta\lambda}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \sigma_\lambda}{\partial \lambda} + \\ + \frac{1}{R} (3\tau_{R\lambda} + 2\tau_{\vartheta\lambda} \operatorname{ctg} \vartheta) + \rho K_\lambda &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9.7)$$

1.10. Аксиально-симметричные задачи. Решение Лява.

В задаче о равновесии тел вращения (п. III.9) при наличии аксиальной симметрии нагружения (независимости объемных и поверхностных сил от азимутального угла φ) тензор напряжения и вектор перемещения не зависят от φ , а являются функциями координат q^1, q^2 — напряженное состояние одинаково во всех меридиональных плоскостях.

Через $u_1, u_2, v = u_\varphi$ обозначаются проекции вектора перемещения на направления e_1, e_2, e_φ базисного триэдра. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q^1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial q^2} + \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^2}, \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial q^1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial q^2} - \frac{u_1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2} - \frac{u_2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1}, \end{aligned} \right\} \quad (1.10.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{r H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} (u_1 H_2 r) + \frac{\partial}{\partial q^2} (u_2 H_1 r) \right], \\ \gamma_{1\varphi} &= \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial v}{\partial q^1} - v \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} \right), \quad \gamma_{2\varphi} = \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial v}{\partial q^2} - v \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.10.2)$$

Компоненты тензора деформации распались на две группы — группу относительных удлинений и сдвига γ_{12} и группу двух компонент $\gamma_{1\varphi}$, $\gamma_{2\varphi}$. Распадаются также и уравнения статики — на два уравнения, в которые входят напряжения σ_1 , σ_2 , τ_{12} , σ_φ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2 r} \left(\frac{\partial H_2 r \sigma_1}{\partial q^1} + \frac{\partial H_1 r \tau_{12}}{\partial q^2} \right) + \frac{\tau_{12}}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2} - \frac{\sigma_2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1} - \\ - \frac{\sigma_\varphi}{H_1} \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} + \rho K_1 = 0, \\ \frac{1}{H_1 H_2 r} \left(\frac{\partial H_1 r \sigma_2}{\partial q^2} + \frac{\partial H_2 r \tau_{12}}{\partial q^1} \right) + \frac{\tau_{12}}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1} - \frac{\sigma_1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2} - \\ - \frac{\sigma_\varphi}{H_2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} + \rho K_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.10.3)$$

и уравнение для напряжений $\tau_{\varphi 1}$, $\tau_{\varphi 2}$:

$$\frac{1}{H_1 H_2 r} \left(\frac{\partial H_2 r \tau_{\varphi 1}}{\partial q^1} + \frac{\partial H_1 r \tau_{\varphi 2}}{\partial q^2} \right) + \frac{\tau_{\varphi 1}}{H_1} \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} + \frac{\tau_{\varphi 2}}{H_2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} + \rho K_\varphi = 0.$$

Нормальные напряжения и касательное напряжение τ_{12} выражаются с помощью обобщенного закона Гука через деформации (1.10.1) первой группы, а касательные напряжения $\tau_{\varphi 1}$, $\tau_{\varphi 2}$ — через деформации (1.10.2) второй группы. Поэтому аксиально-симметричная задача распадается на две независимые задачи — во-первых, задачу о деформации в меридиональной плоскости, в которой отсутствует компонента перемещения v (но, конечно, имеется нормальное напряжение σ_φ), во-вторых, на задачу кручения. Ею определяется перемещение $v(q^1, q^2)$, перпендикулярное меридиональному сечению, не зависящее от азимутального угла φ .

Общее решение задачи о меридиональной аксиально-симметричной деформации может быть выражено через одну бигармоническую функцию — функцию Лява χ . Оно представляет частный случай решения Буссинеска — Галеркина (1.7.4), (1.7.5), когда бигармонический вектор \mathbf{G} задается одной лишь компонентой, направленной по оси симметрии.

$$\mathbf{G} = k\chi(r, z). \quad (1.10.4)$$

В цилиндрических координатах при обозначениях п. 1.9 имеем

$$2\mu u = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \quad v = 0, \quad 2\mu w = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \nabla^2 \chi, \quad (1.10.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\nu \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\nu \nabla^2 \chi + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[- (2 - \nu) \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right], \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[- (1 - \nu) \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.10.6)$$

Здесь

$$\nabla^2 \chi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}, \quad \nabla^4 \chi = 0. \quad (1.10.7)$$

Легко, основываясь на этих формулах, сделать переход к общим координатам тел вращения (п. III.9). По (III.9.8) получаем

$$2\mu u_s = \frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial q^s} \left(\frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \chi}{\partial q^1} \frac{\partial z}{\partial q^1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \chi}{\partial q^2} \frac{\partial z}{\partial q^2} \right) - 2(1-\nu) \frac{1}{H_s} \frac{\partial z}{\partial q^s} \nabla^2 \chi$$

$$(s=1, 2), \quad (1.10.8)$$

причем теперь по (III.5.5)

$$\nabla^2 \chi = \frac{1}{H_1 H_2 r} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{r H_2}{H_1} \frac{\partial \chi}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{r H_1}{H_2} \frac{\partial \chi}{\partial q^2} \right) \right]. \quad (1.10.9)$$

1.11. Кручение тела вращения. В решении Папковича—Нейбера (1.4.10) достаточно принять, что гармонический вектор имеет лишь компоненту по направлению e_φ :

$$\mathbf{B} = B_\varphi e_\varphi. \quad (1.11.1)$$

Тогда

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = (re_r + zk) \cdot \mathbf{B} = 0,$$

и при отсутствии объемных сил перемещение v оказывается пропорциональным B_φ , а перемещения u_1, u_2 обращаются в нуль, что и требуется. Итак, ve_φ — гармонический вектор и по (II.4.19), (III.7.5)

$$\nabla^2 ve_\varphi = e_\varphi \nabla^2 v + v \nabla^2 e_\varphi + 2 \nabla v \cdot \nabla e_\varphi = e_\varphi \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) = 0,$$

так как по (III.7.4), (III.7.5)

$$\nabla v \cdot \nabla e_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{e_s}{H_s} \frac{\partial v}{\partial q^s} \cdot e_\varphi e_r = 0, \quad \nabla^2 e_\varphi = -\frac{1}{r^2} e_\varphi.$$

Итак, v определяется из дифференциального уравнения

$$\nabla_*^2 v = \nabla^2 v - \frac{1}{r^2} v = \frac{1}{H_1 H_2 r} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{r H_2}{H_1} \frac{\partial v}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{r H_1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial q^2} \right) \right] - \frac{v}{r^2} = 0, \quad (1.11.2)$$

так что не v , а $ve^{i\varphi}$ — гармоническая функция [см. (III.5.5)]. По (1.10.2) напряжения определяются из формул

$$\tau_{1\varphi} = \mu \frac{r}{H_1} \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{v}{r}, \quad \tau_{2\varphi} = \mu \frac{r}{H_2} \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{v}{r}. \quad (1.11.3)$$

1.12. Деформация тела вращения. Величины, характеризующие деформацию тела вращения (предположение об аксиальной симметрии нагружения отбрасывается), являются периодическими функциями угла φ . Поэтому перемещение можно представить в форме рядов Фурье по переменной φ ; общий член этого ряда представляется формулами (сначала в цилиндрических координатах)

$$u = u_*(r, z) \cos n\varphi, \quad v = v_*(r, z) \sin n\varphi, \quad w = w_*(r, z) \cos n\varphi. \quad (1.12.1)$$

(Конечно, можно было бы w и u считать пропорциональными

$\sin n\varphi$, а v пропорциональным $-\cos n\varphi$). В решении Буссинеска — Галеркина теперь вместо (1.10.4) полагаем

$$\mathbf{G} = k\chi(r, z) \cos n\varphi.$$

Тогда по (1.7.4)

$$2\mu u_* = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \quad 2\mu w_* = \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \nabla_*^2 \chi, \quad 2\mu v_* = -\frac{n}{r} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad (1.12.2)$$

причем теперь

$$\nabla_*^2 \chi = \nabla^2 \chi - \frac{n^2}{r^2} \chi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - \frac{n^2}{r^2} \chi, \quad (1.12.3)$$

то есть бигармонической является функция $\chi e^{in\varphi}$. По (1.7.5) имеем, далее,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^* &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\nu \nabla_*^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), & \sigma_\varphi^* &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\nu \nabla_*^2 \chi + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \chi \right), \\ \sigma_z^* &= \frac{\partial}{\partial z} \left[-(2-\nu) \nabla_*^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right], & \tau_{rz}^* &= \frac{\partial}{\partial r} \left[-(1-\nu) \nabla_*^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.12.4)$$

причем эти величины являются множителями при $\cos n\varphi$ в выражениях соответствующих компонент тензора напряжений ($\sigma_r = \sigma_r^* \cos n\varphi$ и т. д.). Остаточные компоненты пропорциональны $\sin n\varphi$:

$$\tau_{r\varphi}^* = -\frac{n}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} + \frac{n}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \tau_{z\varphi}^* = -\frac{n}{r} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - (1-\nu) \nabla_*^2 \chi \right]. \quad (1.12.5)$$

Здесь в противоположность аксиально-симметричному нагружению разбиение задачи на деформацию в меридиональной плоскости и на деформацию кручения не имеет места.

В общих координатах тел вращения формулы для перемещений записываются в виде ($s = 1, 2$)

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u_s^* &= \frac{1}{H_s} \frac{\partial}{\partial q^s} \left(\frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \chi}{\partial q^1} \frac{\partial z}{\partial q^1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \chi}{\partial q^2} \frac{\partial z}{\partial q^2} \right) - \frac{2(1-\nu)}{H_s} \frac{\partial z}{\partial q^s} \nabla_*^2 \chi, \\ 2\mu v^* &= -\frac{n}{r} \left(\frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \chi}{\partial q^1} \frac{\partial z}{\partial q^1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \chi}{\partial q^2} \frac{\partial z}{\partial q^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.12.6)$$

причем по (III. 5.5)

$$\nabla_*^2 \chi = \left(\nabla^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \chi = \frac{1}{H_1 H_2 r} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{H_2 r}{H_1} \frac{\partial \chi}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{H_1 r}{H_2} \frac{\partial \chi}{\partial q^2} \right) \right] - \frac{n^2}{r^2} \chi. \quad (1.12.7)$$

По (1.7.5) тензор напряжения представляется в виде

$$\hat{T} = \nabla \nabla \frac{\partial \chi}{\partial z} \cos n\varphi - 2(1-\nu) \operatorname{def} k \nabla^2 (\chi \cos n\varphi) - \nu \hat{E} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 (\chi \cos n\varphi). \quad (1.12.8)$$

Задавая бигармоническую функцию $\chi \cos n\varphi$ через две гармонические $\chi_0 \cos n\varphi$ и $\chi_3 \cos n\varphi$:

$$\chi \cos n\varphi = (\chi_0 + z\chi_3) \cos n\varphi, \quad (1.12.9)$$

и полагая

$$\left(\frac{\partial \chi_0}{\partial z} + \chi_3 \right) \cos n\varphi = -2\mu B_0, \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial z} \cos n\varphi = -2\mu B_3, \quad (1.12.10)$$

придем к представлению тензора напряжений \hat{T} в форме Папковича — Нейбера (1.4.17), в котором сохранены лишь две гармонические функции B_3, B_0 :

$$\frac{1}{2\mu} \hat{T} = 2(1-2\nu) \operatorname{def} \mathbf{k} B_3 + 2\nu \hat{E} \frac{\partial B_3}{\partial z} - z \nabla \nabla B_3 - \nabla \nabla B_0. \quad (1.12.11)$$

Приняв теперь

$$B_0 = b_0 \cos n\varphi, \quad B_3 = b_3 \cos n\varphi, \quad (1.12.12)$$

получим следующие значения множителей при $\cos n\varphi$ в выражениях компонент $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_\varphi, \tau_{12}$ тензора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_1^* &= 2(1-\nu) \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial z}{\partial q^1} \frac{\partial b_3}{\partial q^1} + 2\nu \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial z}{\partial q^2} \frac{\partial b_3}{\partial q^2} - \\ &\quad - \frac{1}{H_1^2} \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial q^{1^2}} + z \frac{\partial^2 b_3}{\partial q^{1^2}} \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^1} \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^1} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^1} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^2} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^2} \right), \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_2^* &= 2(1-\nu) \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial z}{\partial q^2} \frac{\partial b_3}{\partial q^2} + 2\nu \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial z}{\partial q^1} \frac{\partial b_3}{\partial q^1} - \\ &\quad - \frac{1}{H_1^2} \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial q^{2^2}} + z \frac{\partial^2 b_3}{\partial q^{2^2}} \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^2} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1} \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^1} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^1} \right), \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_\varphi^* &= 2\nu \left(\frac{1}{H_1^2} \frac{\partial z}{\partial q^1} \frac{\partial b_3}{\partial q^1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial z}{\partial q^2} \frac{\partial b_3}{\partial q^2} \right) + \frac{n^2}{r^2} (b_0 + z b_3) - \\ &\quad - \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^1} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^1} \right) - \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^2} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^2} \right), \\ \frac{1}{2\mu} \tau_{12}^* &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[(1-2\nu) \left(\frac{\partial z}{\partial q^1} \frac{\partial b_3}{\partial q^2} + \frac{\partial z}{\partial q^2} \frac{\partial b_3}{\partial q^1} \right) - \right. \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial q^1 \partial q^2} + z \frac{\partial^2 b_3}{\partial q^1 \partial q^2} \right) + \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^1} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^1} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1} \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^2} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.12.13)$$

Пропорциональные $\sin n\varphi$ множители при компонентах $\tau_{1\varphi}$, $\tau_{2\varphi}$ равны

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \tau_{1\varphi}^* &= \frac{n}{rH_1} \left[-(1-2\nu) \frac{\partial z}{\partial q^1} b_3 + \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^1} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} (b_0 + z b_3) \right], \\ \frac{1}{2\mu} \tau_{2\varphi}^* &= \frac{n}{rH_2} \left[-(1-2\nu) \frac{\partial z}{\partial q^2} b_3 + \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^2} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} (b_0 + z b_3) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.12.14)$$

Наконец, вектор перемещения, равный по (1.4.10)

$$u = 4(1-\nu) k B_3 - \left(\frac{e_k}{H_k} \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{e_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (z B_3 + B_0), \quad (1.12.15)$$

по (1.12.12) определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \cos n\varphi \left[(3-4\nu) \frac{1}{H_s} \frac{\partial z}{\partial q^s} b_3 - \frac{1}{H_s} \left(\frac{\partial b_0}{\partial q^s} + z \frac{\partial b_3}{\partial q^s} \right) \right], \\ v &= \frac{n}{r} (b_0 + z b_3) \sin n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.12.16)$$

1.13. Решение Папковича—Нейбера для тел вращения. Дополним решение, приведенное в предшествующем п. 1.12, слагаемыми, определяемыми проекциями B_x , B_y гармонического вектора. Полагая поэтому теперь

$$\mathbf{B} = i_1 B_x + i_2 B_y = e_r B_r + e_\varphi B_\varphi,$$

так что

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = (r e_r + z k) \cdot \mathbf{B} = r B_r,$$

имеем

$$u = 4(1-\nu) (e_r B_r + e_\varphi B_\varphi) - \text{grad } r B_r. \quad (1.13.1)$$

Подобно (1.12.12) вводим в рассмотрение функции $b_r(q^1, q^2)$, $b_\varphi(q^1, q^2)$:

$$B_r = b_r(q^1, q^2) \cos n\varphi, \quad B_\varphi = b_\varphi(q^1, q^2) \sin n\varphi. \quad (1.13.2)$$

Тогда выражения перемещений запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \cos n\varphi \left[(3-4\nu) \frac{1}{H_s} \frac{\partial r}{\partial q^s} b_r + \frac{r}{H_s} \frac{\partial b_r}{\partial q^s} \right], \\ v &= \sin n\varphi [4(1-\nu) b_\varphi + n b_r]. \end{aligned} \right\} \quad (1.13.3)$$

Система дифференциальных уравнений для функций b_r и b_φ по (III.7.4), (III.7.5) и (II.4.19) находится из соотношения

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{B} &= (e_r \nabla^2 B_r + 2 \nabla B_r \cdot \nabla e_r + B_r \nabla^2 e_r) + \\ &+ (e_\varphi \nabla^2 B_\varphi + 2 \nabla B_\varphi \cdot \nabla e_\varphi + B_\varphi \nabla^2 e_\varphi) = \\ &= e_r \left(\nabla^2 B_r - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right) + e_\varphi \left(\nabla^2 B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right).\end{aligned}$$

Получаем

$$\left. \begin{aligned}\nabla^2 b_r - \frac{n^2 + 1}{r^2} b_r - \frac{2n}{r^2} b_\varphi &= 0, \\ \nabla^2 b_\varphi - \frac{n^2 + 1}{r^2} b_\varphi - \frac{2n}{r^2} b_r &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (1.13.4)$$

Она распадается в аксиально-симметричном случае ($n = 0$) на два независимых уравнения, выражающих, что $b_r e^{i\varphi}$, $b_\varphi e^{i\varphi}$ — гармонические функции.

Компоненты тензора напряжений вычисляются по формулам: множители при $\cos n\varphi$

$$\left. \begin{aligned}\frac{1}{2\mu} \sigma_1^* &= 2(1 - \nu) \frac{r}{H_1^2} \frac{\partial b_r}{\partial q^1} \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} + 2\nu \frac{r}{H_2^2} \frac{\partial b_r}{\partial q^2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} + \\ &+ \frac{2\nu}{r} (nb_\varphi + b_r) - r \left(\frac{1}{H_1^2} \frac{\partial^2 b_r}{\partial q^1{}^2} - \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^1} \frac{\partial b_r}{\partial q^1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2} \frac{\partial b_r}{\partial q^2} \right), \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_2^* &= 2(1 - \nu) \frac{r}{H_2^2} \frac{\partial b_r}{\partial q^2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} + 2\nu \frac{r}{H_1^2} \frac{\partial b_r}{\partial q^1} \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} + \\ &+ \frac{2\nu}{r} (nb_\varphi + b_r) - r \left(\frac{1}{H_2^2} \frac{\partial^2 b_r}{\partial q^2{}^2} - \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^2} \frac{\partial b_r}{\partial q^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1} \frac{\partial b_r}{\partial q^1} \right), \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_\varphi^* &= -(1 - 2\nu) \left(\frac{r}{H_1^2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} \frac{\partial b_r}{\partial q^1} + \frac{r}{H_2^2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} \frac{\partial b_r}{\partial q^2} \right) + \\ &\quad + (n^2 - 1) \frac{b_r}{r} + 2(2 - \nu) \frac{1}{r} (nb_\varphi + b_r), \\ \frac{1}{2\mu} \tau_{12}^* &= \frac{r}{H_1 H_2} \left[(1 - 2\nu) \left(\frac{\partial b_r}{\partial q^1} \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} + \frac{\partial b_r}{\partial q^2} \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 b_r}{\partial q^1 \partial q^2} + \frac{\partial b_r}{\partial q^2} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1} + \frac{\partial b_r}{\partial q^1} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2} \right]\end{aligned} \right\} \quad (1.13.5)$$

и при $\sin n\varphi$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \tau_{1\varphi}^* &= 2(1-\nu) \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial b_\varphi}{\partial q^1} - \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} b_\varphi \right) + \\ &\quad + \frac{n}{H_1} \left[\frac{\partial b_r}{\partial q^1} - 2(1-\nu) \frac{\partial \ln r}{\partial q^1} b_r \right], \\ \frac{1}{2\mu} \tau_{2\varphi}^* &= 2(1-\nu) \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial b_\varphi}{\partial q^2} - \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} b_\varphi \right) + \\ &\quad + \frac{n}{H_2} \left[\frac{\partial b_\varphi}{\partial q^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial \ln r}{\partial q^2} b_r \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.13.6)$$

1.14. Учет температурных слагаемых. В системе исходных уравнений теории упругости п. 1.1 изменится только форма записи обобщенного закона Гука. Теперь по (3.4.8) гл. III, воспользовавшись таблицей связей между модулями упругости в п. 3.1 гл. III, имеем

$$\hat{T} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \theta \hat{E} + \hat{\varepsilon} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \hat{E} \right), \quad (1.14.1)$$

где, напомним, θ — температура, отсчитываемая от температуры натурального состояния. Обратное соотношение записывается в виде

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right) + \alpha \theta \hat{E}. \quad (1.14.2)$$

Далее принимается, что внешние силы (массовые и поверхностные) отсутствуют. В предположении, что задача теплопроводности может рассматриваться независимо от задачи теории упругости (см. п. 3.5 гл. III), это не идет в ущерб общности, так как линейность задачи для тела, подчиняющегося закону Гука, допускает наложение напряженных состояний, вызываемых действием объемных сил, поверхностных сил и изменением температуры и определяемых по отдельности для каждого из перечисленных факторов.

Повторив вывод уравнений в перемещениях (1.3.2) с учетом температурного члена в (1.14.1), получим

$$\frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{u} - 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \text{grad } \alpha \theta = 0. \quad (1.14.3)$$

Краевое условие (1.3.11) запишется в виде

$$\frac{\nu}{1-2\nu} n \text{ div } \mathbf{u} + n \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} n \times \text{rot } \mathbf{u} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} n \alpha \theta = 0. \quad (1.14.4)$$

Сравнение показывает, что влияние температурного слагаемого в выражении закона Гука можно формально свести к зада-

нию массовых сил с потенциалом, пропорциональным температуре:

$$\Pi = 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta, \quad (1.14.5)$$

и нормальных к поверхности тела O поверхностных сил

$$\mathbf{F} = 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \mathbf{n} = \mathbf{n} \Pi. \quad (1.14.6)$$

Из сопоставления выражений (1.14.5) и (1.4.7) следует, что уравнение (1.14.3) допускает частное решение

$$\mathbf{u}_* = \text{grad } \chi_0, \quad (1.14.7)$$

где χ_0 определяется из уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \chi_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta. \quad (1.14.8)$$

Перейдем к составлению дифференциальных уравнений в напряжениях. К уравнению статики при отсутствии массовых сил

$$\text{div } \hat{T} = 0 \quad (1.14.9)$$

добавляется по (1.5.1) и (1.14.2) условие

$$2\mu \text{Ink } \hat{\varepsilon} = \text{Ink} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right) + 2\mu \text{Ink } \alpha \theta \hat{E} = 0. \quad (1.14.10)$$

Но по (1.5.2)

$$\text{Ink } \alpha \theta \hat{E} = (\hat{E} \nabla^2 - \nabla \nabla) \alpha \theta,$$

и условие (1.14.10), сославшись на (1.5.3), можно записать в виде

$$\nabla^2 \hat{T} + (\nabla \nabla - \hat{E} \nabla^2) \left(\frac{\sigma}{1+\nu} + 2\mu \alpha \theta \right) = 0. \quad (1.14.11)$$

Из него, образуя первый инвариант, имеем

$$\nabla^2 \sigma = -4\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \nabla^2 \theta, \quad (1.14.12)$$

так что

$$\nabla^2 \hat{T} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \sigma = -2\mu \alpha \left(\nabla \nabla \theta + \frac{1+\nu}{1-\nu} \hat{E} \nabla^2 \theta \right). \quad (1.14.13)$$

Если температура — линейная функция координат (п. 2.3 гл. II):

$$\theta = \theta_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{R},$$

то зависящее от нее слагаемое в (1.14.13) отпадает. Поэтому, в предположении отсутствия поверхностных сил на всей поверхности тела:

$$\mathbf{n} \cdot \hat{T} = 0, \quad (1.14.14)$$

все уравнения (1.14.9), (1.14.14) и (1.14.13), определяющие тензор \hat{T} , однородны; им во всем объеме удовлетворяет решение

$$\hat{T} = 0,$$

и оно — единственное (п. 4.1). Итак, при линейном законе распределения температуры в упругом теле не возникает температурных напряжений. Вектор перемещения в этом случае вычисляется по формуле (2.3.5) гл. II, в которую можно внести еще слагаемые вида (2.2.6) гл. II, определяющие поворот среды как твердого тела (R — вектор-радиус):

$$u = \alpha \theta (R - R_0) - \frac{1}{2} \alpha q |R - R_0|^2 + u_0 + \omega_0 \times (R - R_0). \quad (1.14.15)$$

Сказанное имеет место лишь в предположении, что условие (1.14.14) выполнено на всей поверхности O . Если же на ее части u задан вектор перемещения, отличающийся от определяемого формулой (1.14.15), то возникнет напряженное состояние, обусловливаемое воздействием приспособлений (реакций связей), обеспечивающих сообщение требуемого перемещения.

Нетрудно также проверить, что вектор перемещения (1.14.15) удовлетворяет при линейном распределении температуры дифференциальному уравнению (1.14.3) и краевому условию (1.14.4).

§ 2. Вариационные принципы статики линейно-упругого тела

2.1. Стационарность потенциальной энергии системы. Элементарная работа внешних сил $\delta' a_{(e)}$ может быть отождествлена с вариацией потенциальной энергии деформации δa , равной вариации свободной энергии в изотермическом процессе и внутренней энергии в адиабатическом *):

$$\delta' a_{(e)} = \delta a = \delta \int \int \int_V A \, d\tau = \int \int \int_V \rho K \cdot \delta u \, d\tau + \int \int_O F \cdot \delta u \, dO. \quad (2.1.1)$$

Из этого равенства можно получить три отличающихся друг от друга энергетических принципа в зависимости от того, через какие переменные выражена удельная потенциальная энергия A . Задавая ее квадратичной формой $A(\epsilon)$ [см. (3.2.3) гл. III] компонент деформации, приходим к принципу минимума потенциальной энергии системы; исходя же из квадратичной формы $A(\sigma)$ компонент тензора напряжений [(3.2.8) гл. III], получим принцип минимума дополнительной работы. В первом принципе варьируются перемещения, во втором — компоненты напряжения. Наконец, в смешанном принципе стационарности удельная

*) Только эти процессы рассматриваются в пп. 2.1—2.6

потенциальная энергия задается билинейной формой $A(\epsilon, \sigma)$ и варьированию подлежат переменные той и другой группы.

В формуле (2.1.1) содержится утверждение, что работа внешних массовых и поверхностных сил на виртуальном перемещении δu точек упругого тела из положения равновесия, определяемого вектором u , равна вариации потенциальной энергии деформации. При этом на той части O_1 поверхности O , на которой заданы перемещения, следует принять $\delta u = 0$, так что

$$\int \int_{O_1} \mathbf{F} \cdot \delta u \, do = \int \int_{O_2} \mathbf{F} \cdot \delta u \, do.$$

Два состояния упругого тела — равновесное и бесконечно близкое к нему, когда точкам тела сообщено поле виртуальных перемещений, — рассматриваются при одних и тех же силах $\rho \mathbf{K}$ в объеме и \mathbf{F} на части поверхности O_2 , нигде не налегающей на O_1 . Иными словами, в объеме V

$$\delta \rho \mathbf{K} = 0, \quad \rho \mathbf{K} \cdot \delta u = \delta(\rho \mathbf{K} \cdot u)$$

и на O_2

$$\delta \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{F} \cdot \delta u = \delta(\mathbf{F} \cdot u).$$

Вынося еще знак вариации за знак интегралов, что законно, поскольку объем V и поверхность O_2 фиксированы, имеем по (2.1.1)

$$\delta \left[\int \int \int_V A \, d\tau - \int \int \int_V \rho \mathbf{K} \cdot u \, d\tau - \int \int_{O_2} \mathbf{F} \cdot u \, do \right] = 0. \quad (2.1.2)$$

Величину

$$\Phi = \int \int \int_V A \, d\tau - \int \int \int_V \rho \mathbf{K} \cdot u \, d\tau - \int \int_{O_2} \mathbf{F} \cdot u \, do \quad (2.1.3)$$

называют потенциальной энергией системы; она равна разности потенциальной энергии деформации и работы заданных внешних сил (на O_1 они не заданы), вычисляемой в предположении, что эти силы во всем процессе деформирования из натурального состояния имеют значение, которое они приобрели в рассматриваемом равновесном состоянии.

Потенциальная энергия Φ представляет функционал над u , численное значение которого меняется вместе с заданием u ; в этом множестве чисел Φ то, которое сопоставлено значению вектора u в положении равновесия упругого тела, обладает замечательным свойством стационарности:

$$\delta \Phi = 0. \quad (2.1.4)$$

Это значит, что вычисление Φ один раз для поля перемещений в положении равновесия, другой раз для поля перемещений

$u + \delta u$ приводит к одному и тому же значению при условии, что это вычисление проводилось с учетом лишь величин того же порядка малости δu . Приращение функционала Φ при сообщении упругому телу поля виртуальных перемещений δu из положения равновесия является величиной более высокого порядка малости, чем δu .

2.2. Принцип минимума потенциальной энергии системы. Теперь будет доказано, что стационарное значение функционала Φ в положении равновесия является его минимальным значением.

Для разъяснения последующего уточним понятие о приращении функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n ; зададим им приращения (вариации) $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$. Тогда приращение функции ΔF определяется величиной

$$\Delta F = F(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta F + \delta^2 F + \dots, \quad (2.2.1)$$

где первая вариация δF — линейное относительно δx_s слагаемое, вторая $\delta^2 F$ — квадратичное и т. д.:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x_s} \delta x_s, \quad \delta^2 F = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_s \partial x_k} \delta x_s \delta x_k.$$

Если теперь F — квадратичная форма переменных x_s , то

$$F = \frac{1}{2} a_{sk} x_s x_k, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_s \partial x_k} = a_{sk}, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x_k \partial x_s \partial x_l} = 0,$$

и поэтому

$$\delta^2 F = \frac{1}{2} a_{sk} \delta x_s \delta x_k = F(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n), \quad \delta^s F = 0 \quad (s > 2)$$

— вторая вариация квадратичной формы равна этой форме от вариаций переменных. Вместо (2.2.1) имеем

$$\Delta F = \delta F + F(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n), \quad (2.2.2)$$

а если форма F линейна, то, конечно,

$$\Delta F = \delta F. \quad (2.2.3)$$

Возвращаясь к функционалу Φ , имеем по (2.1.3)

$$\Delta \Phi = \int_V \int \Delta A \, d\tau - \int_V \int \Delta \rho K \cdot u \, d\tau - \int_{O_i} \Delta F \cdot u \, d\tau.$$

Но ρK и F не зависят от u , поэтому, сославшись на (2.2.3), имеем

$$\Delta \rho K \cdot u = \delta \rho K \cdot u, \quad \Delta F \cdot u = \delta F \cdot u.$$

Вместе с тем по (2.2.2)

$$\Delta A = A(\varepsilon + \delta \varepsilon) - A(\varepsilon) = \delta A + A(\delta \varepsilon),$$

так как A — квадратичная форма компонент тензора деформации. Приходим к равенству

$$\Delta\Phi = \delta \left(\int_V \int A \, d\tau - \int_V \int \rho K \cdot u \, d\tau - \int_{O_1} \int \mathbf{F} \cdot u \, do \right) + \int_V \int A (\delta\epsilon) \, d\tau,$$

так что по (2.1.2) или (2.1.4)

$$\Delta\Phi = \int_V \int A (\delta\epsilon) \, d\tau.$$

Но по (3.3.4) гл. III удельная потенциальная энергия A является положительно-определенной функцией, так что $A > 0$ при любом отличном от нуля $\delta\epsilon$. Этим доказано, что

$$\Delta\Phi > 0$$

— функционал Φ возрастает при сообщении точкам упругого тела отклонений из равновесного состояния, иными словами, он имеет минимум в этом состоянии. Пришли к принципу минимума потенциальной энергии системы: состояние равновесия линейно-упругого тела отличается от всех мыслимых его состояний тем, что в нем функционал Φ , называемый потенциальной энергией системы, имеет минимальное значение. Словом «мыслимый» указывается на то, что сравниваемые с вектором перемещения u непрерывные в объеме V перемещения $u + \delta u$ принимают то же, что u , значение на той части O_1 поверхности O , где перемещение задано.

Из формулы Клапейрона (3.3.3) гл. III и из (2.1.3) следует, что в положении равновесия

$$\Phi = \Phi_{\min} = \frac{1}{2} \left[- \int_V \int \rho K \cdot u \, d\tau - \int_{O_1} \int \mathbf{F} \cdot u \, do + \int_{O_1} \int \mathbf{F} \cdot u \, do \right]. \quad (2.2.4)$$

Задача разыскания равновесного состояния линейно-упругого тела сведена к вариационной задаче об определении вектора u , сообщающего минимум функционалу Φ над ним и принимающего заданные значения на O_1 . Известно, что задаче вариационного исчисления сопоставляется эквивалентная ей краевая задача. Дифференциальные уравнения и краевые условия последней получаются из рассмотрения вариации минимизируемого функционала — это уравнения Эйлера и натуральные краевые условия, соответствующие этому функционалу.

Переходим к составлению этой вариации. По (3.2.4) гл. III имеем

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \dots + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} = \sigma_x \delta \epsilon_x + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx},$$

где $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ — линейные формы компонент деформации, определяемые равенствами (3.1.5) гл. III. В другой записи [см. (II.3.10)]

$$\delta A = \hat{T} \cdot \delta \hat{\epsilon} = \operatorname{div} (\hat{T} \cdot \delta u) - \delta u \cdot \operatorname{div} \hat{T}. \quad (2.2.5)$$

Тензор \hat{T} здесь выражен через тензор деформации, а выражая последний через вектор перемещения u и сославшись на вывод уравнений теории упругости в перемещениях в п. 1.3 этой главы, имеем по (1.3.2)

$$\operatorname{div} \hat{T} = \mu \left(\frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \nabla^2 u \right) = L(u) \quad (2.2.6)$$

и вместе с тем по (1.3.12)

$$n \cdot \hat{T} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} n \operatorname{div} u + n \cdot \nabla u + \frac{1}{2} n \times \operatorname{rot} u \right) = M(u). \quad (2.2.7)$$

Заметим, что здесь только для сокращения записей и чтобы не повторять ранее проведенных преобразований, введены величины $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$, которым сопоставлен тензор \hat{T} , — это лишь обозначения, которым можно и не приписывать никакого наименования.

По (2.2.5) — (2.2.7) имеем теперь

$$\begin{aligned} \delta \int_V A d\tau &= \int_V \operatorname{div} (\hat{T} \cdot \delta u) d\tau - \int_V \delta u \cdot \operatorname{div} \hat{T} d\tau = \\ &= \int_{O_1} n \cdot \hat{T} \cdot \delta u d\sigma - \int_V \delta u \cdot L(u) d\tau = \\ &= \int_{O_2} M(u) \cdot \delta u d\sigma - \int_V L(u) \cdot \delta u d\tau. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Здесь учтено, что вектор u разыскивается в классе функций, принимающих на O_1 заданное значение

$$u|_{O_1} = u_*, \quad (2.2.9)$$

так что $\delta u = 0$ на O_1 .

Подстановка в (2.1.2) приводит к равенству

$$\delta \Phi = - \int_V [L(u) + \rho K] \cdot \delta u d\tau + \int_{O_2} [M(u) - F] \cdot \delta u d\sigma, \quad (2.2.10)$$

и вследствие произвольности δu в объеме и на той части O_2 поверхности, где перемещения не заданы, выполнение условия стационарности (2.1.4) требует обращения в нуль подынтегральных выражений в объемном и поверхностном интегралах. Приходим к дифференциальным уравнениям равновесия в перемещениях

$$L(u) + \rho K = 0 \quad (2.2.11)$$

и к краевому условию на O_2

$$M(u) = F. \quad (2.2.12)$$

Естественно, что получена именно эта форма уравнений, так как Φ — функционал над u . Выше уже отмечена несвязанность определения потенциальной энергии системы и формулировки принципа минимума ее с представлением о напряженном состоянии. О последнем нет речи в чисто энергетическом принципе, определяющем поведение линейно-упругого тела по заданию некоторого функционала над вектором перемещения. Подобно принципу Гамильтона в общей механике, принцип минимума потенциальной энергии системы синтезирует свойства физической модели упругого тела, включая экспериментальные данные о поведении его под нагрузкой.

2.3. Метод Ритца. Вариационная формулировка задачи о равновесии, заключающаяся в принципе минимума потенциальной энергии системы, подсказывает возможность применения для решения задач теории упругости прямых методов вариационного исчисления.

В методе Ритца (1909) дифференциальное уравнение (2.2.11) и статическое краевое условие (2.2.12) не рассматриваются, так как наперед известно, что они автоматически удовлетворяются, если найдется вектор u , точно минимизирующий функционал Φ . Прием, позволяющий определить приближенно этот вектор, состоит в задании его проекций аппроксимирующими представлениями вида

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x, y, z) + u_0(x, y, z), \\ v &= \sum_{k=1}^n a_{k+n} \varphi_{k+n}(x, y, z) + v_0(x, y, z), \\ w &= \sum_{k=1}^n a_{k+2n} \varphi_{k+2n}(x, y, z) + w_0(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

Здесь u_0, v_0, w_0 принимают на O_1 заданные значения (2.2.9), тогда как функции φ_s ($s = 1, 2, \dots, 3n$) выбираются равными нулю на O_1 ; этим удовлетворяется краевое условие для вектора u при любых значениях коэффициентов a_s . Система аппроксимирующих («координатных») функций φ_s должна быть взята в столь общей форме, чтобы при достаточно большом n всякая удовлетворяющая условию (2.2.9) система перемещений могла быть представлена приближенно в форме (2.3.1). Такую систему представляют, например, произведения целых степеней переменных вида $x^{q_1} y^{q_2} z^{q_3}$, умноженные на функцию, обращающуюся на O_1 в нуль.

После подстановки так или иначе назначенных представлений вида (2.3.1) для перемещений u, v, w в выражение потенциальной энергии системы Φ последняя представится суммой

квадратичной и линейной форм коэффициентов a_s и постоянного слагаемого

$$\Phi = \Phi_2(a_1, \dots, a_{3n}) - \Phi_1(a_1, \dots, a_{3n}) + \Phi_0, \quad (2.3.2)$$

причем квадратичная форма Φ_2 равна как раз потенциальной энергии деформации a , вычисляемой по вектору $u - u_0$:

$$\Phi_2 = \iiint_V A(\varepsilon - \varepsilon_0) d\tau = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{3n} \sum_{k=1}^{3n} C_{sk} a_s a_k, \quad (2.3.3)$$

и поскольку A — знакоопределенная положительная форма компонент деформации, то и Φ_2 — такая же форма от a_1, a_2, \dots, a_{3n} . Поэтому определитель матрицы ее компонент положителен:

$$|C_{sk}| > 0. \quad (2.3.4)$$

По теореме о минимуме потенциальной энергии системы наилучшее приближение в выбранном классе аппроксимирующих вектор u функций обеспечивается значениями коэффициентов, сообщающих минимум выражению (2.3.2). Это приводит к системе $3n$ линейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_t} (\Phi_2 - \Phi_1) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, 3n, \quad (2.3.5)$$

или

$$\sum_{s=1}^{3n} C_{st} a_s = B_t, \quad t = 1, 2, \dots, 3n, \quad (2.3.6)$$

с таким же числом неизвестных. Существование и единственность ее решения следует из неравенства (2.3.4).

Таким образом, строится приближенное решение задачи. Примем предположение, что при достаточной общности системы аппроксимирующих функций вычисленное значение потенциальной энергии системы будет все более с ростом n приближаться к ее минимуму. Но из этой «сходимости по энергии» не следует еще, что и последовательность приближений (2.3.1) сходится к искомому решению. Здесь нет места для этих рассуждений, которым посвящена обширная специальная литература*). Вычисление дает при разумном выборе вида и числа аппроксимирующих функций значения вектора u , достаточно близкие к точному решению; меньшей точности следует ожидать от вычисления по найденным методом Ритца перемещениям их производных, значит, и напряжений.

2.4. Способ Галеркина (1915). Для краевых задач, допускающих вариационную формулировку, в частности для задач теории упругости, этот приближенный способ интегрирования дифференциальных уравнений представляет упрощающее вычисление видоизменение метода Ритца. Приближение (2.3.1)

*) См., например, книгу С. Г. Михлина «Прямые методы в математической физике», Гостехиздат, 1950.

подставляется в выражение вариации потенциальной энергии системы (2.2.10), а не самой энергии (2.1.3); это исключает необходимость возводить в квадрат суммы (2.3.1) при вычислении A .

Заменив в (2.2.10) вариации δu , δv , δw их выражениями

$$\delta u = \sum_{k=1}^n \varphi_k \delta a_k, \quad \delta v = \sum_{k=1}^n \varphi_{k+n} \delta a_{k+n}, \quad \delta w = \sum_{k=1}^n \varphi_{k+2n} \delta a_{k+2n}, \quad (2.4.1)$$

в которых вариации искоемых коэффициентов δa_s произвольны, придем к равенству

$$\begin{aligned} -\delta\Phi = & \sum_{k=1}^n \delta a_k \left\{ \int \int_V [L_1(u) + \rho K_1] \varphi_k d\tau - \int \int_{O_2} [M_1(u) - F_1] \varphi_k do \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^n \delta a_{k+n} \left\{ \int \int_V [L_2(u) + \rho K_2] \varphi_{k+n} d\tau - \int \int_{O_2} [M_2(u) - F_2] \varphi_{k+n} do \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^n \delta a_{k+2n} \left\{ \int \int_V [L_3(u) + \rho K_3] \varphi_{k+2n} d\tau - \right. \\ & \left. - \int \int_{O_2} [M_3(u) - F_3] \varphi_{k+2n} do \right\} = 0, \quad (2.4.2) \end{aligned}$$

в котором L_s , M_s — проекции векторов \mathbf{L} и \mathbf{M} , определяемых формулами (2.2.6), (2.2.7), на координатные оси. Конечно, u , v , w в выражениях L_s , M_s заменяются их представлениями (2.3.1).

Теперь, приравняв нулю коэффициенты при произвольных вариациях δa_s , получим систему $3n$ линейных уравнений для неизвестных a_s :

$$\left. \begin{aligned} \int \int_V L_1(u) \varphi_k d\tau - \int \int_{O_2} M_1(u) \varphi_k do &= \\ &= - \int \int_V \rho K_1 \varphi_k d\tau - \int \int_{O_2} F_1 \varphi_k do, \\ \int \int_V L_2(u) \varphi_{k+n} d\tau - \int \int_{O_2} M_2(u) \varphi_{k+n} do &= \\ &= - \int \int_V \rho K_2 \varphi_{k+n} d\tau - \int \int_{O_2} F_2 \varphi_{k+n} do, \\ \int \int_V L_3(u) \varphi_{k+2n} d\tau - \int \int_{O_2} M_3(u) \varphi_{k+2n} do &= \\ &= - \int \int_V \rho K_3 \varphi_{k+2n} d\tau - \int \int_{O_2} F_3 \varphi_{k+2n} do. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

Конечно, это лишь другая запись уравнений (2.3.6). Отличается лишь последовательность, в которой проводилось вычисление.

Часто под уравнениями способа Галеркина понимают систему уравнений

$$\begin{aligned} \int_V \int (L_1 + \rho K_1) \varphi_k d\tau = 0, \quad \int_V \int (L_2 + \rho K_2) \varphi_{k+n} d\tau = 0, \\ \int_V \int (L_3 + \rho K_3) \varphi_{k+2n} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

при составлении которой используются только дифференциальные уравнения задачи. Но при этом выбор аппроксимирующих решение функций φ_s должен быть подчинен всем не только кинематическим, но и статическим краевым условиям (2.2.12). Тогда поверхностные интегралы в системе уравнений (2.4.3) отпадают и она переходит в систему (2.4.4).

2.5. Принцип минимума дополнительной работы. Принцип минимума потенциальной энергии системы был получен путем сравнения полей перемещений упругого тела в состоянии равновесия и в бесконечно близком к нему допускаемом связями состоянии. В принципе минимума дополнительной работы сравнению подвергаются два статически возможных напряженных состояния — истинное, задаваемое тензором напряжения \hat{T} , и бесконечно близкое к нему, с тензором напряжения $\hat{T} + \delta\hat{T}$. Оба состояния рассматриваются, конечно, при одном и том же задании внешних сил — объемных ρK и поверхностных, распределенных на части O_2 , ограничивающей тело поверхности O . Итак, в объеме V

$$\operatorname{div} \hat{T} + \rho K = 0, \quad \operatorname{div} (\hat{T} + \delta\hat{T}) + \rho K = 0 \quad (2.5.1)$$

и на O_2

$$n \cdot \hat{T} = F, \quad n \cdot (\hat{T} + \delta\hat{T}) = F, \quad (2.5.2)$$

так что

$$\operatorname{div} \delta\hat{T} = 0, \quad n \cdot \delta\hat{T}|_{O_2} = 0. \quad (2.5.3)$$

Рассматривая удельную потенциальную энергию деформации A как функцию компонент тензора напряжений, то есть в форме (3.2.8) гл. III, и учитывая (3.2.9) гл. III, а также (2.5.3), имеем [см. (II. 3.10)]

$$\delta A(\sigma) = \hat{\varepsilon} \cdot \delta\hat{T} = \operatorname{div} (\delta\hat{T} \cdot u) - u \cdot \operatorname{div} \delta\hat{T} = \operatorname{div} (\delta\hat{T} \cdot u). \quad (2.5.4)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\delta a &= \int_V \int \delta A \, d\tau = \int_V \int \operatorname{div} (\delta \hat{T} \cdot \mathbf{u}) \, d\tau = \\ &= \int_{O_1} \int \mathbf{n} \cdot \delta \hat{T} \cdot \mathbf{u} \, do = \int_{O_1} \int \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{F} \, do, \quad (2.5.5)\end{aligned}$$

где $\delta \mathbf{F}$ — вариация поверхностной силы на той части O_1 поверхности, на которой задан вектор перемещения; на ней

$$\delta \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{F} = \delta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}),$$

и равенство (2.5.5) переписывается в виде

$$\delta \left(\int_V \int A(\sigma) \, d\tau - \int_{O_1} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \, do \right) = 0. \quad (2.5.6)$$

Выражение

$$\Psi = \int_V \int A(\sigma) \, d\tau - \int_{O_1} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} \, do = \int_V \int A(\sigma) \, d\tau - \int_{O_1} \int \mathbf{n} \cdot \hat{T} \cdot \mathbf{u} \, do \quad (2.5.7)$$

называется дополнительной работой, а соотношение (2.5.6) выражает свойство стационарности в положении равновесия этого функционала над тензором напряжения \hat{T} :

$$\delta \Psi = 0 \quad (2.5.8)$$

Стационарное значение дополнительной работы является ее минимумом. Действительно, по (2.2.2), (2.2.3)

$$\begin{aligned}\Delta \Psi &= \int_V \int \delta A(\sigma) \, d\tau + \int_V \int A(\delta \sigma) \, d\tau - \int_{O_1} \int \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{F} \, do = \\ &= \delta \Psi + \int_V \int A(\delta \sigma) \, d\tau\end{aligned}$$

и по (2.5.8)

$$\Delta \Psi = \int_V \int A(\delta \sigma) \, d\tau > 0,$$

что и доказывает наличие минимума в состоянии равновесия.

Итак, состояние равновесия линейно-упругого тела отличается от всех статически возможных при заданных внешних силах состояний тем, что для него функционал Ψ над тензором напряжений \hat{T} , называемый «дополнительной работой», имеет минимум.

По (2.5.7) и формуле Клапейрона (3.3.3) гл. III этот минимум равен

$$\Psi_{\min} = \frac{1}{2} \left(\int_V \int \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \, d\tau - \int_{O_1} \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, do + \int_{O_1} \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, do \right). \quad (2.5.9)$$

В п. 2.2 было установлено, что уравнениями Эйлера и натуральными краевыми условиями вариационной задачи о минимуме потенциальной энергии системы служат уравнения равновесия в перемещениях и статические краевые условия. Естественно ожидать, что принципу минимума дополнительной работы — функционала над статически возможным тензором напряжений \hat{T} — должны соответствовать зависимости Бельтрами, а также кинематические краевые условия, как натуральные краевые условия вариационной задачи.

Для доказательства представим условие стационарности (2.5.8) в виде

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= \iiint_V \delta A(\sigma) d\tau - \int_{O_i} u \cdot \delta F do = \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \dots + \frac{\partial A}{\partial \tau_{zx}} \delta \tau_{zx} \right) d\tau - \int_{O_i} u \cdot \delta F do = \\ &= \iiint_V (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) - \int_{O_i} u \cdot \delta F do = \\ &= \iiint_V \hat{\varepsilon} \cdot \delta \hat{T} d\tau - \int_{O_i} u \cdot \delta F do = 0. \quad (2.5.10)\end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{zx}$ — линейные формы компонент тензора напряжений \hat{T} , определяемые по (3.2.8) гл. III и выражаемые формулами (3.1.8) гл. III; $\hat{\varepsilon}$ — тензор, задаваемый этими формами его компонент и, значит, представимый формулой (1.1.4). Вариации компонент тензора $\delta \hat{T}$ под знаком интегралов в (2.5.10) не независимы, а должны удовлетворять зависимостям (2.5.3). Пришли к связанной задаче вариационного исчисления и, следуя известному правилу, вводим в объеме V лагранжев вектор λ ; это позволяет, представив теперь (2.5.10) в виде

$$\delta\Psi = \iiint_V (\hat{\varepsilon} \cdot \delta \hat{T} + \lambda \cdot \operatorname{div} \delta \hat{T}) d\tau - \int_{O_i} u \cdot \delta F do = 0, \quad (2.5.11)$$

считать все шесть вариаций $\delta \sigma_x, \dots, \delta \tau_{zx}$, связанных тремя условиями (2.5.3), независимыми за счет надлежащего выбора трех компонент вектора λ .

Применив многократно использованное преобразование (II.3.10):

$$\lambda \cdot \operatorname{div} \delta \hat{T} = \operatorname{div} (\delta \hat{T} \cdot \lambda) - \operatorname{def} \lambda \cdot \delta \hat{T},$$

перепишем теперь (2.5.11) в виде

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= \int_V \int (\hat{\varepsilon} - \text{def } \lambda) \cdot \delta\hat{T} \, d\tau + \int_V \int \text{div}(\delta\hat{T} \cdot \lambda) \, d\tau - \int_{O_1} \int \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{F} \, do = \\ &= \int_V \int (\hat{\varepsilon} - \text{def } \lambda) \cdot \delta\hat{T} \, d\tau + \int_{O_2} \int \mathbf{n} \cdot \delta\hat{T} \cdot \lambda \, do + \\ &\quad + \int_{O_1} \int (\mathbf{n} \cdot \delta\hat{T} \cdot \lambda - \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{F}) \, do,\end{aligned}$$

так что, сославшись на (2.5.3), получаем

$$\delta\Psi = \int_V \int (\hat{\varepsilon} - \text{def } \lambda) \cdot \delta\hat{T} \, d\tau + \int_{O_1} \int \delta\mathbf{F} \cdot (\lambda - \mathbf{u}) \, do = 0. \quad (2.5.12)$$

Теперь, выразив условия обращения в нуль множителей в подинтегральных выражениях перед вариациями $\delta\hat{T}$ и $\delta\mathbf{F}$, приходим к соотношениям

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right) = \text{def } \lambda, \quad (\lambda - \mathbf{u})|_{O_1} = 0. \quad (2.5.13)$$

Первое показывает, что тензор, обозначенный $\hat{\varepsilon}$, есть деформация лагранжева вектора λ ; на O_1 последний должен быть равен заданному здесь вектору перемещения, и ничто не препятствует, отождествив λ с вектором перемещения \mathbf{u} в объеме V , вернуться к определению тензора $\hat{\varepsilon}$ как к величине, задаваемой полем перемещений. В самом принципе минимума дополнительной работы понятие о тензоре деформации отсутствует, поэтому отождествление векторов λ и \mathbf{u} должно быть привнесено нами, «так как принцип об этом не знает».

По (2.1.9) гл. II тензор, являющийся деформацией, должен удовлетворять условию

$$\text{Ink def } \lambda = 0, \quad (2.5.14)$$

и исключение λ из первого соотношения (2.5.13) приводит к соотношению

$$\text{Ink} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right) = 0, \quad (2.5.15)$$

что вместе с условием (1.1.1), выражающим, что \hat{T} — статически возможный тензор, приводит к зависимостям Бельтрами (см. п. 1.5). Это и требовалось доказать. Вектор $\lambda \equiv \mathbf{u}$, поскольку условие (2.5.14) выполнено, может быть вычислен по формулам Чезаро (2.2.2) гл. II.

2.6. Смешанный принцип стационарности (Е. Рейсснер, 1961). В формулировке принципа минимума потенциальной энергии рассматривается функционал над вектором \mathbf{u} ; от последнего требуется, чтобы он принимал предписанное значение на той

части O_1 поверхности, на которой он задан; тензор напряжений из рассмотрения исключен. Дифференциальными уравнениями Эйлера, естественно, оказываются уравнения равновесия в перемещениях, а натуральными краевыми условиями — выраженные через вектор перемещения условия равновесия на той части поверхности O_2 , на которой заданы внешние поверхностные силы. В противоположность этому в принципе минимума дополнительной работы речь идет о функционале над тензором напряжений \hat{T} , причем к сравнению допускаются статически возможные напряженные состояния, то есть тензоры \hat{T} , удовлетворяющие необходимым условиям статики сплошной среды в объеме и на той части O_2 поверхности, на которой заданы поверхностные силы. Получающаяся связанная краевая задача приводит к зависимостям Бельтрами (этим уравнения статики дополняются до достаточных условий) и краевым условиям на части поверхности O_1 , на которой задан вектор перемещения.

В рассматриваемом в этом пункте смешанном принципе стационарности вводится функционал над вектором перемещения u и над тензором напряжения \hat{T} , как над независимыми величинами. Этот функционал записывается в виде

$$J = \int_V \int [\hat{T} \cdot \hat{\varepsilon} - A(\sigma)] d\tau - \int_V \int \rho K \cdot u d\tau - \\ - \int_{O_1} \int n \cdot \hat{T} \cdot (u - u_*) do - \int_{O_2} \int F \cdot u do. \quad (2.6.1)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}$ — тензор, определяемый по вектору u формулами (1.1.2); F — поверхностная сила, заданная на O_2 ; u_* — вектор перемещения, заданный на O_1 . Через $A(\sigma)$ обозначена удельная потенциальная энергия деформации, задаваемая квадратичной формой (3.2.8) гл. III. Ее производные по компонентам тензора напряжения будут линейными формами этих компонент, определяемыми левыми частями соотношений (3.1.8) гл. III. Они представляют компоненты некоторого тензора, обозначаемого

$$\hat{\varepsilon}^* = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right), \quad (2.6.2)$$

так что по (3.2.9) гл. III

$$\delta A(\sigma) = \delta \hat{T} \cdot \hat{\varepsilon}^*. \quad (2.6.3)$$

Теперь имеем

$$\delta J = \int_V \int [\delta \hat{T} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^*) + \hat{T} \cdot \delta \hat{\varepsilon}] d\tau - \int_V \int \rho K \cdot \delta u d\tau - \\ - \int_{O_1} \int n \cdot \delta \hat{T} \cdot (u - u_*) do - \int_{O_1} \int n \cdot \hat{T} \cdot \delta u do - \int_{O_2} \int F \cdot \delta u do, \quad (2.6.4)$$

так как $\delta F = 0$ на O_2 . Остается применить хорошо известное преобразование

$$\begin{aligned} \int_V \int \hat{T} \cdot \delta \hat{\varepsilon} \, d\tau &= \int_V \int \operatorname{div} (\hat{T} \cdot \delta u) \, d\tau - \int_V \int \delta u \cdot \operatorname{div} \hat{T} \, d\tau = \\ &= \int_{O_1} \int n \cdot \hat{T} \cdot \delta u \, do + \int_{O_2} \int n \cdot \hat{T} \cdot \delta u \, do - \int_V \int \delta u \cdot \operatorname{div} \hat{T} \, d\tau, \end{aligned}$$

чтобы записать условие стационарности функционала J в виде

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_V \int [\delta \hat{T} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^*) - (\operatorname{div} \hat{T} + \rho K) \cdot \delta u] \, d\tau - \\ &- \int_{O_1} \int n \cdot \delta \hat{T} \cdot (u - u_*) \, do + \int_{O_2} \int (n \cdot \hat{T} - F) \cdot \delta u \, do = 0. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Отсюда, вследствие произвольности $\delta \hat{T}$ и δu в объеме, а также вариаций $n \cdot \delta \hat{T}$ на O_1 и δu на O_2 , приходим к уравнениям статики в объеме

$$\operatorname{div} \hat{T} + \rho K = 0, \quad (2.6.6)$$

к обобщенному закону Гука

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^* = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right) \quad (2.6.7)$$

и к краевым условиям

$$u|_{O_1} = u_*, \quad n \cdot \hat{T}|_{O_2} = F. \quad (2.6.8)$$

Уравнениями Эйлера вариационной задачи о стационарности функционала J оказываются исходные соотношения линейной теории упругости, перечисленные в п. 1.1, а натуральными краевыми условиями — кинематические и статические краевые условия.

2.7. Вариационные принципы при учете температурных слабых. Уравнение теплопроводности рассматривается в его классической форме Фурье (3.6.8) гл. III, а в задаче теории упругости сохраняется статическая постановка, то есть пренебрегают изменениями во времени напряженного состояния, вызываемыми нестационарностью температурного поля. Это позволяет рассматривать температуру как неварьируемый при варьировании напряженного состояния внешний фактор и в соответствии со сказанным в п. 1.14 формально трактовать наличие температурного поля как поля объемных сил с потенциалом (1.14.5) и поверхностных сил (1.14.6). Учитывается действие этих «сил» и реактивных сил на O_1 , создаваемых связями, обеспечивающими заданные перемещения на этой части поверхности тела.

Аналогом функционала Φ в принципе минимума потенциальной энергии в соответствии с (2.1.3), (1.14.5) и (1.14.6) служит функционал

$$\Phi_* = \int_V \int A(\epsilon) d\tau + 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left(\int_V \int \mathbf{u} \cdot \text{grad } \alpha \theta d\tau - \int_{O_1} \int \alpha \theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} do \right), \quad (2.7.1)$$

где $A(\epsilon)$ — квадратичная форма (3.2.3) гл. III компонент тензора деформации $\hat{\epsilon}$. Применяв легко проверяемое преобразование

$$\int_V \int \mathbf{u} \cdot \text{grad } \alpha \theta d\tau = \int_O \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \alpha \theta d\tau - \int_V \int \vartheta \alpha \theta d\tau, \quad (2.7.2)$$

приведем (2.7.1) к виду

$$\Phi_* = \int_V \int F d\tau + 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_{O_1} \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \alpha \theta do, \quad (2.7.3)$$

причем по (3.4.6) гл. III (см. также таблицу п. 3.1 гл. III) величина

$$F = A(\epsilon) - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \vartheta \alpha \theta$$

с точностью до не имеющего здесь значения слагаемого, зависящего только от температуры, представляет свободную энергию системы.

Повторив над функционалом (2.7.3) вычисление, которое привело к формуле (2.2.8), придем к соотношению

$$\begin{aligned} \delta \Phi_* &= \int_V \int \hat{T} \cdot \delta \hat{\epsilon} d\tau + 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_{O_1} \int \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \alpha \theta do = \\ &= \int_O \int \mathbf{n} \cdot \hat{T} \cdot \delta \mathbf{u} do - \int_V \int \delta \mathbf{u} \cdot \text{div } \hat{T} d\tau + 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_{O_1} \int \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \alpha \theta do. \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Здесь \hat{T} — тензор, определяемый формулами (3.4.7), (3.4.8) гл. III:

$$\hat{T} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \hat{E} + \hat{\epsilon} \right) - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \hat{E},$$

так что

$$\text{div } \hat{T} = \mathbf{L}(\mathbf{u}) - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \text{grad } \alpha \theta, \quad \mathbf{n} \cdot \hat{T} = \mathbf{M}(\mathbf{u}) - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \mathbf{n} \alpha \theta,$$

где введены обозначения (2.2.6), (2.2.7) дифференциальных операторов $L(u)$, $M(u)$.

После подстановок в (2.7.4) получаем

$$\delta\Phi_* = - \int_V \int \left[L(u) - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \operatorname{grad} \alpha\theta \right] \cdot \delta u \, d\tau + \\ + \int_{O_1} \int \left[M(u) - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} n\alpha\theta \right] \cdot \delta u \, d\tau + \int_{O_1} \int M(u) \cdot \delta u \, d\sigma = 0, \quad (2.7.5)$$

причем последнее слагаемое следует отбросить, поскольку $\delta u = 0$ на O_1 .

Приходим к дифференциальному уравнению равновесия в перемещениях (1.14.3) и к краевому условию (1.14.4), что и требовалось. Полностью повторив сказанное в п.2.2, убедимся, что функционал Φ_* в положении равновесия имеет минимум.

Аналогом функционала Ψ в принципе минимума дополнительной работы служит функционал

$$\Psi_* = \int_V \int G \, d\tau - \int_{O_1} \int F \cdot u \, d\sigma = \int_V \int G \, d\tau - \int_{O_1} \int n \cdot \hat{T} \cdot u \, d\sigma, \quad (2.7.6)$$

где G — потенциал Гиббса (3.5.4) гл. III, а F — вектор поверхностных реактивных сил на O_1 . Имеем

$$\delta G = \hat{\varepsilon} \cdot \delta \hat{T}, \quad (2.7.7)$$

где $\hat{\varepsilon}$ — тензор, компоненты которого, вычисляемые по (3.5.5) гл. III, представляют линейные формы компонент тензора напряжений и температуры; выражение тензора $\hat{\varepsilon}$ дается также формулой (3.4.10) гл. III.

Доказательство стационарности и минимальности функционала в положении равновесия, когда к сравнению допускаются статически возможные напряженные состояния, не отличается от приведенного в п.2.5.

2.8. Принцип Сен-Венана. Энергетическое рассмотрение. «Принцип упругой эквивалентности статически эквивалентных систем сил» был впервые сформулирован в применении к задаче о нагруженном состоянии нагруженного по торцам призматического стержня в классическом мемуаре Сен-Венана «О кручении призм» (1855). Более общую формулировку этого принципа, названного принципом Сен-Венана, дал Буссинек (1885); уточнению рассмотрений Буссинека посвящены работы Мизеса (1945) и Стернберга (1954).

Системы сил F и F' называются статически эквивалентными при равенстве их главных векторов и главных моментов относительно одного и того же центра приведения. Очевидно, что система сил $F - F'$ статически эквивалентна нулю — равны

нулям ее главный вектор и ее главный момент. Принцип Сен-Венана состоит в утверждении, что статически эквивалентная нулю система сил, распределенных по малому участку поверхности упругого тела, создает лишь локальное напряженное состояние; оно быстро затухает по мере удаления от этого участка и становится пренебрежимо малым на расстояниях, достаточно больших по сравнению с его размерами. Например, напряженное состояние в длинном призматическом стержне, нагруженном

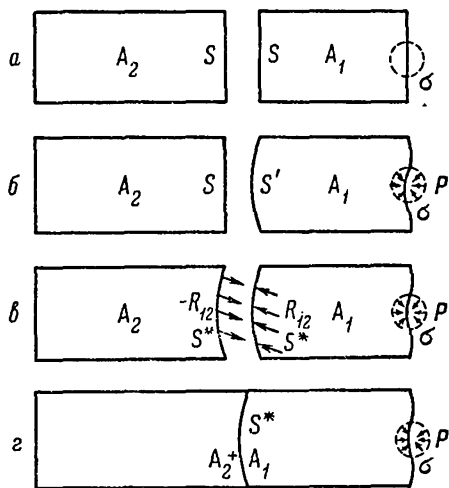


Рис. 13.

только по его конечным поперечным сечениям (торцам), практически не зависит от способа распределения по ним поверхностных сил — оно определяется на некотором расстоянии от торцов лишь их главным вектором и главным моментом.

Таким образом, речь идет о возможности замены, при оговоренных требованиях статической эквивалентности и «малости» участка нагружения, одних крайних условий другими. Сознательно или бессознательно та или иная идеализация крайних условий всегда используется при решении

(корректно поставленных) задач математической физики. В задачах теории упругости это тем более неизбежно, что детали распределения поверхностных сил чаще всего неизвестны, а возможность замены его другим распределением с теми же интегральными свойствами представляется интуитивно приемлемой. Вместе с тем ясно, что приведенную формулировку принципа Сен-Венана, имеющую лишь качественный характер, следует дополнить возможными количественными оценками.

Одна из таких попыток, принадлежащая Занабони (1937) и Локателли (1940, 1941), состоит в оценке доли потенциальной энергии деформации, заключенной в частях тела, нагруженного статически эквивалентной системой сил, примыкающих к месту нагружения и удаленных от него.

Рассматривается тело A_1 , нагруженное по участку поверхности статически эквивалентной нулю системой сил P ; потенциальная энергия деформации тела обозначается $a_1(P)$. К телу A_1 по участку его свободной поверхности S' присоединим ничем не нагруженное тело A_2 (рис. 13) и потенциальную энергию еди-

ного образовавшегося тела $A_1 + A_2$ назовем $a_{1+2}(P)$. Докажем, что

$$a_1(P) > a_{1+2}(P). \quad (2.8.1)$$

Действительно, назовем через R_{12} статически эквивалентную нулю систему сил в сечении S^* тела $A_1 + A_2$ — это та ранее свободная часть поверхности S тела A_1 , которую пришлось подвергнуть деформированию, чтобы слить A_1 и A_2 в единое тело $A_1 + A_2$. Потенциальная энергия деформации части A_2 тела $A_1 + A_2$ равна $a_2(R_{12})$, тогда как в части A_1 этого тела заключена потенциальная энергия

$$a_1(P) + a_1(R_{12}) + a'_1(R_{12}),$$

где $a'_1(R_{12})$ — работа ранее приложенных сил P , обусловленная тем, что участок тела A_1 , нагруженный этими силами, деформируется вследствие приложения по S^* сил R_{12} . Итак,

$$a_{1+2}(P) = a_1(P) + a_2(R_{12}) + a_1(R_{12}) + a'_1(R_{12}). \quad (2.8.2)$$

Этапы этого рассуждения иллюстрируются рис. 13, $a - z$.

С истинным состоянием равновесия, когда силами P создается напряженное состояние, дающее в сечении S^* систему сил R_{12} , сравнивается состояние, в котором эта система (при тех же P) заменена пропорционально измененной системой сил $(1 + \varepsilon)R_{12}$. Отметим, что система уравнений статики, описывающих поведение тела A_2 , нагруженного по S^* статически эквивалентной нулю системой R_{12} , линейна; поэтому и система $(1 + \varepsilon)R_{12}$ создается статически возможной системой напряжений, что делает допустимым применение принципа минимума дополнительной работы.

При указанном пропорциональном изменении сил R_{12} потенциальные энергии $a_1(R_{12})$, $a_2(R_{12})$ становятся равными $(1 + \varepsilon)^2 a_1(R_{12})$, $(1 + \varepsilon)^2 a_2(R_{12})$, тогда как $a'_1(R_{12})$ должно быть заменено на $(1 + \varepsilon) a'_1(R_{12})$, так как в отношении $1 + \varepsilon$ изменились лишь деформации, а силы P остались неизменными. Итак, варьированное выражение потенциальной энергии тела $A_1 + A_2$ должно быть записано в виде

$$a'_{1+2}(P) = a_1(P) + (1 + \varepsilon)^2 a_1(R_{12}) + (1 + \varepsilon)^2 a_2(R_{12}) + (1 + \varepsilon) a'_1(R_{12}),$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \Delta a_{1+2}(P) &= a'_{1+2}(P) - a_{1+2}(P) = \\ &= \varepsilon [2a_1(R_{12}) + 2a_2(R_{12}) + a'_1(R_{12})] + \varepsilon^2 [a_1(R_{12}) + a_2(R_{12})]. \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

Здесь $a_1(R_{12}) > 0$, $a_2(R_{12}) > 0$, а само выражение разности (2.8.3) по теореме о минимуме дополнительной работы должно оставаться положительным независимо от знака ε . Поэтому

$$2a_1(R_{12}) + 2a_2(R_{12}) + a'_1(R_{12}) = 0, \quad (2.8.4)$$

и выражение (2.8.2) записывается в виде

$$a_{1+2}(P) = a_1(P) - a_1(R_{12}) - a_2(R_{12}) < a_1(P). \quad (2.8.5)$$

Знак равенства невозможен, так как силы R_{12} всегда возникают при наличии P . Предложение (2.8.1) доказано. Продолжая процесс мысленного присоединения к телу $A_1 + A_2$ тела A_3 и т. д., имеем

$$a_1(P) > a_{1+2}(P) > a_{1+2+3}(P) > \dots \quad (2.8.6)$$

На втором этапе этого рассуждения сравниваются потенциальные энергии, создаваемые системами сил $R_{1,2+3}$ и $R_{1+2,3}$; как видно из этих обозначений и рис. 14, первая система сил развивается в сечении S_1^* тела A_1 , соединенного с ненагруженным те-

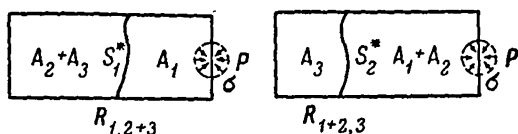


Рис. 14.

лом $A_2 + A_3$, а вторая — в более удаленном от места загрузки сечении S_2^* между телами $A_1 + A_2$ и A_3 .

По (2.8.5) имеем при втором способе образования тела

$$\begin{aligned} a_{1+2+3}(P) &= a_{1+2}(P) - a_{1+2}(R_{1+2,3}) - a_3(R_{1+2,3}) = \\ &= a_1(P) - a_1(R_{12}) - a_2(R_{12}) - a_{1+2}(R_{1+2,3}) - a_3(R_{1+2,3}), \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

а при первом

$$a_{1+2+3}(P) = a_1(P) - a_1(R_{1,2+3}) - a_{2+3}(R_{1,2+3}). \quad (2.8.8)$$

Из этих равенств имеем

$$a_1(R_{1,2+3}) + a_{2+3}(R_{1,2+3}) = a_{1+2}(R_{1+2,3}) + a_3(R_{1+2,3}) + a_1(R_{12}) + a_2(R_{12})$$

или, как следовало ожидать,

$$a_1(R_{1,2+3}) + a_{2+3}(R_{1,2+3}) > a_{1+2}(R_{1+2,3}) + a_3(R_{1+2,3}). \quad (2.8.9)$$

Определим функционал $a(R)$, равный потенциальной энергии деформации тела, вычисляемой по напряжениям, создаваемым силами R , развивающимися в сечении S от нагружения тела статически эквивалентной нулю системой сил P . Из доказанного неравенства (2.8.9) следует, что $a(R)$ уменьшается при удалении сечения от места нагружения. Поскольку $a(R)$ — положительно-определенный функционал, его можно принять за интегральную меру самих напряжений; найденные оценки указывают на уменьшение этой меры при удалении от места нагружения и служат подтверждением принципа Сен-Венана.

К другим оценкам самих напряжений мы вернемся ниже, в п. 2.12—2.14 гл. V.

§ 3. Теорема взаимности. Потенциалы теории упругости

3.1. Формулировка и доказательство теоремы взаимности (Бетти, 1872). Рассматриваются два состояния равновесия линейно-упругого тела, называемые далее первым и вторым. По векторам перемещений \mathbf{u}' , \mathbf{u}'' , задающих эти состояния, определяются тензоры деформации

$$\hat{\varepsilon}' = \text{def } \mathbf{u}', \quad \hat{\varepsilon}'' = \text{def } \mathbf{u}'', \quad (3.1.1)$$

а по ним — тензоры напряжений

$$\hat{T}' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta' \hat{E} + \hat{\varepsilon}' \right), \quad \hat{T}'' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta'' \hat{E} + \hat{\varepsilon}'' \right). \quad (3.1.2)$$

Теперь находим массовые и поверхностные силы, которые должны быть приложены к телу, чтобы осуществить эти состояния: $\rho \mathbf{K}' = -\text{div } \hat{T}'$, $\mathbf{F}' = \mathbf{n} \cdot \hat{T}'$; $\rho \mathbf{K}'' = -\text{div } \hat{T}''$, $\mathbf{F}'' = \mathbf{n} \cdot \hat{T}''$. (3.1.3)

Доказывается, что работа внешних сил первого состояния на перемещениях, соответствующих второму состоянию, равна работе сил второго состояния на перемещениях первого состояния:

$$\int_V \int \rho \mathbf{K}' \cdot \mathbf{u}'' d\tau + \int_O \int \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}'' d\sigma = \int_V \int \rho \mathbf{K}'' \cdot \mathbf{u}' d\tau + \int_O \int \mathbf{F}'' \cdot \mathbf{u}' d\sigma. \quad (3.1.4)$$

Заменив в левой части этого равенства силы их выражениями (3.1.3) и используя преобразования (II.3.10) и (II.5.5), имеем

$$\begin{aligned} & - \int_V \int \mathbf{u}'' \cdot \text{div } \hat{T}' d\tau + \int_O \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{u}'' d\sigma = \\ & = \int_V \int \int [-\mathbf{u}'' \cdot \text{div } \hat{T}' + \text{div}(\mathbf{u}'' \cdot \hat{T}')] d\tau = \int_V \int \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' d\tau, \end{aligned}$$

так что

$$\int_V \int \rho \mathbf{K}' \cdot \mathbf{u}'' d\tau + \int_O \int \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}'' d\sigma = \int_V \int \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' d\tau \quad (3.1.5)$$

и, конечно,

$$\int_V \int \rho \mathbf{K}'' \cdot \mathbf{u}' d\tau + \int_O \int \mathbf{F}'' \cdot \mathbf{u}' d\sigma = \int_V \int \hat{T}'' \cdot \hat{\varepsilon}' d\tau. \quad (3.1.6)$$

Остается убедиться в равенстве правых частей. Это следует из (3.1.2):

$$\hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta' \hat{E} + \hat{\varepsilon}' \right) \cdot \hat{\varepsilon}'' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta' \vartheta'' + \hat{\varepsilon}' \cdot \hat{\varepsilon}'' \right), \quad (3.1.7)$$

так как $\hat{E} \cdot \hat{\varepsilon}'' = I_1(\hat{\varepsilon}'') = \vartheta''$; вместе с тем

$$\hat{\varepsilon}' \cdot \hat{\varepsilon}'' = I_1(\hat{\varepsilon}' \cdot \hat{\varepsilon}'') = e'_{sk} e''_{ks}.$$

Итак, правая часть (3.1.6) одинаковым образом зависит от величин первого и второго состояний, что доказывает теорему.

Формулировка теоремы взаимности усложняется в применении к неоднозначному объему, если не исключается возможность неоднозначности перемещений. См. п. 5.3 этой главы.

3.2. Тензор влияния. Теорема Максвелла. Упругое тело нагружено в точке Q сосредоточенной силой \mathbf{e} единичной величины, уравновешенной реакциями связей — опорных устройств. Связи предполагаются идеальными — сумма работ их реакций на всяком перемещении точек упругого тела, находящихся в контакте с опорными устройствами, равна нулю.

Вектор перемещения точки M упругого тела, назовем его $\mathbf{u}(M, Q)$, представляется в виде

$$\mathbf{u}(M, Q) = \hat{G}(M, Q) \cdot \mathbf{e}. \quad (3.2.1)$$

Здесь $\hat{G}(M, Q)$ — тензор второго ранга, называемый тензором влияния. Его компонента $G_{sk}(M, Q)$ представляет проекцию на направление \mathbf{i}_s перемещения точки M , вызываемого единичной силой, направленной по \mathbf{i}_k .

Условившись называть Q, M точками истока и наблюдения, рассмотрим два состояния упругого тела — первое: Q — точка истока, M — наблюдения,

$$\mathbf{u}(M, Q) = \hat{G}(M, Q) \cdot \mathbf{e}_Q,$$

и второе: M — точка истока, Q — наблюдения,

$$\mathbf{u}(Q, M) = \hat{G}(Q, M) \cdot \mathbf{e}_M.$$

По теореме взаимности работа силы \mathbf{e}_M на перемещении в точке M , создаваемой силой \mathbf{e}_Q , равна работе силы \mathbf{e}_Q на перемещении в точке Q от силы \mathbf{e}_M :

$$\mathbf{e}_M \cdot \mathbf{u}(M, Q) = \mathbf{e}_Q \cdot \mathbf{u}(Q, M) \quad (3.2.2)$$

или, в другой записи,

$$\mathbf{e}^M \cdot (\hat{G}M, Q) \cdot \mathbf{e}_Q = \mathbf{e}_Q \cdot \hat{G}(Q, M) \cdot \mathbf{e}_M. \quad (3.2.3)$$

Этим выражается свойство тензора влияния, называемое теоремой Максвелла:

$$\hat{G}(M, Q) = \hat{G}^*(Q, M). \quad (3.2.4)$$

Здесь, как всегда, звездочка обозначает операцию транспонирования тензора, так что

$$G_{sk}(M, Q) = G_{ks}(Q, M), \quad (3.2.5)$$

что и требовалось.

Знание тензора влияния $\hat{G}(M, Q)$ позволяет представить в квадратурах вектор перемещения при любом задании массовых и поверхностных сил:

$$u(M) = \int \int_V \hat{G}(M, Q) \cdot \rho K(Q) d\tau_Q + \int \int_O \hat{G}(M, Q_O) \cdot F(Q_O) do_{Q_O}. \quad (3.2.6)$$

Ясно, что степень трудности эффективного построения тензора влияния такая же, как и решения краевых задач. Оно просто выполняется для неограниченного упругого пространства, когда краевые условия отпадают (п. 3.5 этой главы).

3.3. Применение теоремы взаимности. В качестве первого состояния задается обычно весьма простое напряженное состояние. Теорема взаимности позволяет по заданным внешним силам второго состояния (они, конечно, должны представлять статически эквивалентную нулю систему сил) определять некоторые осредненные величины, относящиеся к этому состоянию.

Зададим вектор перемещения первого состояния аффинным преобразованием:

$$u' = \hat{\Lambda} \cdot R, \quad (3.3.1)$$

где $\hat{\Lambda}$ — постоянный тензор второго ранга. Тогда по (1.2.3) — (1.2.5) гл. II

$$du' = (\nabla u')^* \cdot dR = dR \cdot \nabla u' = \hat{\Lambda} \cdot dR = dR \cdot \hat{\Lambda}^*,$$

так что, сославшись еще на (1.2.13) гл. II, имеем

$$\hat{\varepsilon}' = \frac{1}{2} (\hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}^*), \quad \hat{\Lambda} = \hat{\varepsilon}' + \hat{\Omega}' \quad (3.3.2)$$

и, далее,

$$\hat{T}' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \hat{E} \vartheta' + \hat{\varepsilon}' \right), \quad \rho K' = 0, \quad F' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} n \vartheta' + \hat{\varepsilon}' \cdot n \right). \quad (3.3.3)$$

По теореме взаимности (отбросив штрихи над величинами второго состояния), получим

$$\begin{aligned} \int \int_V \rho K \cdot \hat{\Lambda} \cdot R d\tau + \int \int_O F \cdot \hat{\Lambda} \cdot R do = \\ = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta' \int \int_O n \cdot u do + \int \int_O n \cdot \hat{\varepsilon}' \cdot u do \right). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Тензор $\hat{\Lambda}$ в левой части можно заменить на $\hat{\varepsilon}'$, так как

$$\begin{aligned} \int_V \int \rho \mathbf{K} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R} do = \\ = \int_V \int \rho \mathbf{K} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) do = \\ = \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\int_V \int \mathbf{R} \times \rho \mathbf{K} d\tau + \int_O \int \mathbf{R} \times \mathbf{F} do \right) = 0, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — сопутствующий тензору $\hat{\Lambda}$ вектор (п. I.4), а величина в скобках — равный нулю главный момент внешних сил (второго состояния). Вместе с тем

$$\begin{aligned} \int_O \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} do = \int_V \int \operatorname{div} \mathbf{u} d\tau = \int_V \int \vartheta d\tau, \\ \int_O \int \mathbf{n} \cdot \hat{\varepsilon}' \cdot \mathbf{u} do = \int_V \int \operatorname{div} (\hat{\varepsilon}' \cdot \mathbf{u}) d\tau = \\ = \int_V \int \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \hat{\varepsilon}' d\tau + \hat{\varepsilon}' \cdot \cdot \int_V \int \hat{\varepsilon} d\tau. \end{aligned}$$

Обозначая индексом m среднее значение величины в объеме, имеем

$$\frac{1}{V} \int_V \int \vartheta d\tau = \vartheta_m, \quad \hat{\varepsilon}' \cdot \cdot \frac{1}{V} \int_V \int \hat{\varepsilon} d\tau = \hat{\varepsilon}' \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_m = I_1 (\hat{\varepsilon}' \cdot \hat{\varepsilon}_m).$$

Приходим к равенству

$$\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta' \vartheta_m + I_1 (\hat{\varepsilon}' \cdot \hat{\varepsilon}_m) = \frac{1}{2\mu V} \left(\int_V \int \rho \mathbf{K} \cdot \hat{\varepsilon}' \cdot \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \cdot \hat{\varepsilon}' \cdot \mathbf{R} do \right), \quad (3.3.5)$$

преобразуемому с помощью тождества

$$\hat{Q} \cdot \cdot \mathbf{a} \mathbf{b} = I_1 (\hat{Q} \cdot \mathbf{a} \mathbf{b}) = I_1 (\mathbf{a} \cdot \hat{Q}' \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \hat{Q}' \cdot \mathbf{b}$$

к виду

$$\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta' \vartheta_m + \hat{\varepsilon}' \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_m = \frac{1}{2\mu V} \hat{\varepsilon}' \cdot \cdot \left(\int_V \int \rho \mathbf{K} \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \mathbf{R} do \right). \quad (3.3.6)$$

Полагая здесь $\hat{\varepsilon} = \hat{L}$ имеем $\vartheta' = 3$, $\hat{\varepsilon}' \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_m = \vartheta$, $\hat{\varepsilon}' \cdot \cdot \rho \mathbf{K} \mathbf{R} = \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}$ и т. д. Приходим к следующему выражению среднего объемного расширения:

$$\vartheta_m = \frac{1-2\nu}{2\mu V(1+\nu)} \left(\int_V \int \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} do \right). \quad (3.3.7)$$

Подстановка в (3.3.6) приводит теперь к соотношению

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}' \cdot \left[\hat{\epsilon}_m - \frac{1}{2\mu V} \left(\int_V \int \rho \mathbf{K} \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \mathbf{R} do \right) \right] + \\ + \frac{\nu \vartheta'}{1+\nu} \frac{1}{2\mu V} \left(\int_V \int \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} do \right) = 0. \quad (3.3.8) \end{aligned}$$

Например, при $\epsilon' = i_1 i_1$, $\vartheta' = 1$ придем к выражению среднего относительного удлинения

$$\begin{aligned} (\epsilon_{11})_m = \frac{1}{2\mu V} \left[\int_V \int \rho \left(x K_x - \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{R} \cdot \mathbf{K} \right) d\tau + \right. \\ \left. + \int_O \int \left(x F_x - \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \right) do \right], \quad (3.3.9) \end{aligned}$$

тогда как, полагая $\hat{\epsilon}' = i_1 i_2 + i_2 i_1$, $\vartheta' = 0$, получим среднее значение сдвига

$$(\gamma_{12})_m = \frac{1}{2\mu V} \left(\int_V \int \rho (x K_y + y K_x) d\tau + \int_O \int (x F_y + y F_x) do \right). \quad (3.3.10)$$

Отсюда теперь легко найти средние значения напряжений:

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_m &= \frac{1}{V} \left(\int_V \int x K_x d\tau + \int_O \int x F_x do \right), \\ (\tau_{xy})_m &= \frac{1}{V} \left(\int_V \int \rho y K_x d\tau + \int_O \int y F_x do \right) \end{aligned}$$

и т. д. Эти же выражения были получены в п. 4.3 гл. I с помощью только уравнений статики и для любой сплошной среды, а не гукова тела. По ним, основываясь на законе Гука, можно перейти к приведенным выше формулам для средних значений компонент тензора деформации в линейно-упругом теле.

Задавшись выражениями вектора перемещения \mathbf{u}' в виде квадратичных форм координат и используя теорему взаимности, можно получить этим же путем формулы п. 4.4 гл. I для моментов напряжений первого порядка.

В задание компонент деформации $\hat{\epsilon}'$ в виде квадратичных форм координат войдет 36 коэффициентов, связанных шестью условиями совместности деформаций (2.1.5) гл. II. Использование теоремы взаимности в форме (3.1.5)

$$\int_V \int t_{sk} \epsilon'_{sk} d\tau = \int_V \int \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}' d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}' do$$

приводит к тридцати уравнениям (по числу независимых коэффициентов этих форм). Число же неизвестных моментов напряжений второго порядка

$$\int \int_V t_{ik} x_r x_s d\tau$$

равно тридцати шести. Этот же результат был получен в п. 4.10 гл. I.

3.4. Теорема взаимности при учете температурных слагаемых. В вывод формул (3.1.5), (3.1.6) не вносятся изменений, но при вычислении их правых частей следует учесть наличие температурных слагаемых в выражении тензора напряжения (1.14.1):

$$\left. \begin{aligned} \hat{T}' \cdot \cdot \hat{\varepsilon}'' &= 2\mu \left(\frac{\nu}{1-\nu} \theta' \theta'' + \hat{\varepsilon}' \cdot \cdot \hat{\varepsilon}'' - 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \theta' \theta'' \right), \\ \hat{T}'' \cdot \cdot \hat{\varepsilon}' &= 2\mu \left(\frac{\nu}{1-\nu} \theta'' \theta' + \hat{\varepsilon}'' \cdot \cdot \hat{\varepsilon}' - 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \theta'' \theta' \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

и вместо (3.1.4) получаем

$$\begin{aligned} & \int \int \int_V \rho K' \cdot u'' d\tau + \int \int_O F' \cdot u'' d\sigma + 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int \int_V \theta' \theta'' d\tau = \\ & = \int \int \int_V \rho K'' \cdot u' d\tau + \int \int_O F'' \cdot u' d\sigma + 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int \int_V \theta'' \theta' d\tau. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Конечно, этот же результат можно получить формальной заменой температурного поля объемными и поверхностными силами (1.14.5), (1.14.6):

$$\begin{aligned} 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left(- \int \int \int_V u'' \cdot \text{grad } \theta' d\tau + \int \int_O n \cdot u'' \theta' d\sigma \right) = \\ = 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int \int \int_V \theta' \text{div } u'' d\tau, \end{aligned}$$

что и требовалось.

В качестве примера примем напряженное состояние, создаваемое единичной силой e_Q , приложенной в точке Q , за первое состояние; пусть в нем $\theta' = 0$; пусть во втором состоянии силы отсутствуют, $\rho K'' = 0$, $F'' = 0$, а температура равна θ . Применение формулы (3.4.2), если учесть (3.2.1), приводит к равенству

$$e_Q \cdot u(Q) = 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int \int \int_V \theta(M) \text{div}_M \hat{G}(M, Q) \cdot e_Q d\tau_M,$$

и, поскольку e_Q — произвольно направленный вектор,

$$u(Q) = 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_V \int \theta(M) \operatorname{div}_M \hat{G}(M, Q) d\tau_M. \quad (3.4.3)$$

Знание тензора влияния позволяет определить поле перемещений в упругом теле по температурному полю.

3.5. Тензор влияния в неограниченной упругой среде. В неограниченной упругой среде мысленно выделяется конечный объем V_i , ограниченный поверхностью O ; остающийся бесконечный объем с полостью V_i назовем V_e .

В точке Q упругой среды прикладывается единичная сосредоточенная сила e , создающая напряженное состояние, определяемое тензором \hat{T} . Тогда уравнения статики для V_i -объема записываются в виде

$$\int_O n \cdot \hat{T} do + e = 0, \quad \int_O R \times (n \cdot \hat{T}) do = 0, \quad Q \in V_i, \quad (3.5.1)$$

$$\int_O n \cdot \hat{T} do = 0, \quad \int_O R \times (n \cdot \hat{T}) do = 0, \quad Q \in V_e. \quad (3.5.2)$$

Через R обозначен вектор-радиус, имеющий начало в точке Q — точке «источка». Если r_M , r_Q — вектор-радиусы точки «наблюдения» M и точки истока Q с началом в начале координат O , то, очевидно,

$$R = r_M - r_Q. \quad (3.5.3)$$

Примем, что поверхностью O в формуле (3.5.1) служит сфера O радиуса R с центром в точке истока Q ; это не ограничивает общности приводимого ниже рассуждения, так как значения интегралов в (3.5.1) по любой поверхности, охватывающей сферу O , неизменно. Уравнение (3.5.1) теперь записывается в виде

$$R^2 \int_{O^*} n \cdot \hat{T} do^* + e = 0, \quad (3.5.4)$$

где O^* — сфера единичного радиуса, do^* — элемент ее поверхности; отсюда следует, что главный вектор напряжений на любой поверхности, содержащей точку Q внутри себя, имеет не зависящее от R значение — e , а это возможно лишь при условии, что компоненты тензора \hat{T} убывают, как R^{-2} . Но тогда вектор перемещения должен убывать при удалении от точки Q , как R^{-1} .

Этим подсказывается характер решения. Гармонический вектор B в решении Папковича — Нейбера (1.4.10) следует принять равным

$$B = \frac{A}{R} e,$$

так как R^{-1} — единственная гармоническая функция с таким характером убывания на бесконечности, а вектор e должен войти в решение задачи; через A обозначена постоянная, подлежащая определению из условия (3.5.1). Введение гармонического скаляра B_0 излишне, и вектор перемещения представляется по (1.4.10) в виде

$$u = A \left[(3 - 4\nu) \frac{e}{R} + \frac{e \cdot R}{R^3} R \right], \quad (3.5.5)$$

так как

$$\nabla \frac{1}{R} e \cdot R = \frac{e}{R} - \frac{1}{R^3} R e \cdot R.$$

Тензор напряжения вычисляется по (1.4.15). Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} B &= -\frac{A}{R^3} e \cdot R, \quad \nabla B = -A \frac{R e}{R^3}, \quad \operatorname{def} B = -\frac{1}{2} \frac{A}{R^3} (R e + e R), \\ \nabla \nabla R \cdot B &= -A \left[\frac{1}{R^3} (R e + e R) + \hat{E} \frac{e \cdot R}{R^3} - \frac{3}{R^5} e \cdot R R R \right], \end{aligned}$$

и подстановка дает

$$\hat{T} = \frac{2\mu A}{R^3} \left[(1 - 2\nu) (\hat{E} e \cdot R - e R - R e) - \frac{3e \cdot R}{R^2} R R \right]. \quad (3.5.6)$$

Для определения A имеем равенство

$$-e = \frac{2\mu A}{R^3} \int \int \left[(1 - 2\nu) (n e \cdot R - n \cdot e R - n \cdot R e) - \frac{3e \cdot R}{R^2} n \cdot R R \right] d\sigma.$$

Но на поверхности сферы O

$$n = R^{-1} R, \quad n e \cdot R - n \cdot e R = 0, \quad n \cdot R = R, \quad \frac{e \cdot R}{R^2} n \cdot R R = e \cdot R n,$$

так что

$$e = \frac{2\mu A}{R^3} \left[(1 - 2\nu) R e \int \int d\sigma + 3 \int \int n e \cdot R d\sigma \right],$$

и, имея в виду, что

$$\int \int d\sigma = 4\pi R^2, \quad \int \int n e \cdot R d\sigma = \int \int \int \nabla e \cdot R d\tau = e \int \int \int d\tau = \frac{4}{3} \pi R^3 e,$$

находим

$$A = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}. \quad (3.5.7)$$

Представляя теперь вектор перемещения в форме (3.2.1), приходим к равенству

$$u(M, Q) = \hat{U}(M, Q) \cdot e, \quad (3.5.8)$$

в котором тензор влияния $\hat{U}(M, Q)$ для неограниченной упругой среды — тензор Кельвина — Соммильяна — представляется по (3.5.5) формулами

$$\hat{U} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R} \left[(3-4\nu)\hat{E} + \frac{RR}{R^2} \right] = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\hat{E}}{R} - \frac{\nabla\nabla R}{4(1-\nu)} \right). \quad (3.5.9)$$

Вектор напряжения на площадке в точке M с нормалью n_M оказывается равным

$$n_M \cdot \hat{T} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3} \left[(1-2\nu)(n_M e \cdot R - n_M \cdot e R - n_M \cdot R e) - \right. \\ \left. - 3 \frac{e \cdot R}{R^2} n_M \cdot RR \right] \quad (3.5.10)$$

и может быть представлен в виде произведения справа на вектор e

$$n_M \cdot \hat{T} = \hat{\Phi}(M, Q) \cdot e \quad (3.5.11)$$

«силового» тензора влияния, определяемого формулами

$$\hat{\Phi}(M, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3} \left[(1-2\nu)(n_M R - R n_M - n_M \cdot R \hat{E}) - 3 \frac{n_M \cdot R}{R^2} RR \right] = \\ = \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3} \left[(1-2\nu)(n_M R - R n_M) - \right. \\ \left. - 2(1-\nu)\hat{E} n_M \cdot R - R^3 n_M \cdot R \nabla \nabla \frac{1}{R} \right]. \quad (3.5.12)$$

Уравнения статики (3.5.1) и (3.5.2) теперь представляются в виде

$$\int_0 \int \hat{\Phi}(M, Q) d\sigma_M = \begin{cases} -\hat{E}, & Q \subset V_i, \\ 0, & Q \subset V_e, \end{cases} \quad (3.5.13)$$

и при любом расположении точки Q

$$\int_0 \int R \times \hat{\Phi}(M, Q) d\sigma_M = 0. \quad (3.5.14)$$

Развернутая запись первого имеет вид

$$\int_0 \int \hat{\Phi}(M, Q) d\sigma_M = \\ = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_0 \int \left[(1-2\nu) \frac{1}{R^3} (n_M R - R n_M) - n_M \cdot R \nabla \nabla \frac{1}{R} \right] d\sigma_M - \\ - \frac{1}{4\pi} \hat{E} \int_0 \int \frac{n_M \cdot R}{R^3} d\sigma_M = \begin{cases} -\hat{E}, & Q \subset V_i, \\ 0, & Q \subset V_e. \end{cases} \quad (3.5.15)$$

Вместе с тем согласно известной теореме Гаусса о потенциале двойного слоя постоянной (единичной) плотности, распределенного по замкнутой поверхности,

$$\int_0 \int \frac{\cos \varphi}{R^2} d\sigma = \int_0 \int \frac{n_M \cdot R}{R^3} d\sigma_M = \begin{cases} 4\pi, & Q \subset V_i, \\ 2\pi, & Q \subset O, \\ 0, & Q \subset V_e, \end{cases} \quad (3.5.16)$$

и поэтому

$$\int_0 \int \left[(1-2\nu) \frac{1}{R^3} (n_M R - R n_M) - n_M \cdot R \nabla \nabla \frac{1}{R} \right] d\sigma_M = 0 \quad (3.5.17)$$

при любом расположении точки Q , в том числе и на O . Это позволяет записать (3.5.13) в более полном виде:

$$\int_0 \int \hat{\Phi}(M, Q) d\sigma_M = -\hat{E} \delta(Q), \quad (3.5.18)$$

где $\delta(Q)$ — функция положения точки Q , определяемая равенствами

$$\delta(Q) = \begin{cases} 1, & Q \subset V_i, \\ \frac{1}{2}, & Q \subset O, \\ 0, & Q \subset V_e. \end{cases} \quad (3.5.19)$$

Равенство (3.5.18), многократно используемое ниже, будем называть обобщенной теоремой Гаусса.

Заметим еще, что соотношения (3.5.14) и (3.5.17) несложно проверить непосредственным вычислением.

3.6. Потенциалы теории упругости. Обобщая классические определения теории ньютонова потенциала, введем в рассмотрение два потенциала теории упругости.

Первый потенциал является аналогом потенциала простого слоя. Он определяется вектором

$$A(Q) = \int_0 \int a(M_0) \cdot \hat{U}(M_0, Q) d\sigma_{M_0}, \quad (3.6.1)$$

где $\hat{U}(M, Q)$ — тензор Кельвина — Сомильяна (3.5.9). Предполагается, что O принадлежит к классу поверхностей Ляпунова; вектор $a(M_0)$ — заданная на O плотность слоя. Вектор $A(Q)$ — непрерывная во всем пространстве функция (разрыв непрерывности при переходе через слой испытывает нормальная производная $n \cdot \nabla A$), удовлетворяющая в V_i и V_e однородным уравнениям теории упругости в перемещениях

$$\frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } A + \nabla^2 A = 0 \quad (3.6.2)$$

Предельные значения потенциала $A(Q)$ извне и изнутри, обозначаемые *)

$$A_i(Q_0) = \lim_{V_i \supset Q \rightarrow Q_0} A(Q), \quad A_e(Q_0) = \lim_{V_e \supset Q \rightarrow Q_0} A(Q), \quad (3.6.3)$$

равны его «прямому значению», определяемому несобственным сходящимся интегралом

$$A(Q_0) = \int \int_O a(M_0) \cdot \hat{U}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0}. \quad (3.6.4)$$

Итак,

$$A_i(Q_0) = A(Q_0) = A_e(Q_0). \quad (3.6.5)$$

Второй потенциал теории упругости имеет свойства потенциала двойного слоя. Он определяется вектором

$$B(Q) = \int \int_O b(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0}, \quad (3.6.6)$$

где $\hat{\Phi}(M, Q)$ — силовой тензор влияния (3.5.12). В V_i и в V_e этот вектор также удовлетворяет однородным уравнениям в перемещениях. Вектор плотности $b(M_0)$, равно как и ранее введенный вектор $a(M_0)$, предполагается удовлетворяющим условию Гельдера $H(A, \gamma)$ с положительным показателем γ :

$$|b(M'_0) - b(M''_0)| < A |r_{M'_0} - r_{M''_0}|^\gamma. \quad (3.6.7)$$

Тогда интеграл, называемый прямым значением $B(Q_0)$ потенциала $B(Q)$,

$$B(Q_0) = \int \int_O b(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} \quad (3.6.8)$$

сходится в смысле главного значения **). Предельные значения $B_i(Q_0)$, $B_e(Q_0)$ потенциала $B(Q)$:

$$B_i(Q_0) = \lim_{V_i \supset Q \rightarrow Q_0} B(Q), \quad B_e(Q_0) = \lim_{V_e \supset Q \rightarrow Q_0} B(Q), \quad (3.6.9)$$

не равны друг другу и не равны его прямому значению — потенциал $B(Q)$ претерпевает разрыв при переходе через слой. То же

*) Запись $V_i \supset Q \rightarrow Q_0$, ($V_e \supset Q \rightarrow Q_0$) означает, что точка Q приближается к точке Q_0 на слое, оставаясь в V_i (в V_e); предполагается, что приближение происходит (в обоих случаях) по нормали к Q , направленной в V_e — внешней к V_i .

**) Главное значение интеграла по поверхности определяется как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграла по поверхности $O - O(Q_0, \varepsilon)$, где $O(Q_0, \varepsilon)$ — окрестность на O точки Q_0 с диаметром 2ε .

самое имеет место и для ньютонова потенциала двойного слоя (его плотность обозначается $\rho(M_0)$)

$$W(Q) = \iint \rho(M_0) \frac{n_{M_0} \cdot R}{R^3} d\sigma_{M_0}.$$

Однако доказывается, что его предельные значения равны прямому значению, если Q_0 — та точка на O , в которой плотность равна нулю: при $\rho(Q_0) = 0$

$$W(Q_0) = \iint_O \rho(M_0) \frac{n_{M_0} \cdot R}{R^3} d\sigma_{M_0} = W_i(Q_0) = W_e(Q_0)$$

и это свойство ньютонова потенциала сохраняет и второй потенциал теории упругости: если $b(Q_0) = 0$, то

$$B(Q_0) = B_i(Q_0) = B_e(Q_0). \quad (3.6.10)$$

Сославшись теперь на обобщенную теорему Гаусса (3.5.18), запишем равенство

$$\begin{aligned} B(Q) &= \iint [b(M_0) - b(Q_0)] \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} + \\ &+ b(Q_0) \cdot \iint_O \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} = \iint [b(M_0) - b(Q_0)] \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} - \\ &- \begin{cases} b(Q_0), & Q \in V_i, \\ 0, & Q \in V_e. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

Интеграл

$$\iint_O [b(M_0) - b(Q_0)] \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0}$$

представляет потенциал того же вида, что $B(Q)$, но с плотностью

$$b_*(M_0) = b(M_0) - b(Q_0),$$

обращающейся в нуль в точке Q_0 . Поэтому, сославшись на (3.6.10), (3.6.11), (3.6.8) и снова на (3.5.18), имеем

$$\begin{aligned} B_i(Q_0) &= \iint_O [b(M_0) - b(Q_0)] \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} - b(Q_0) = \\ &= B(Q_0) + \frac{1}{2} b(Q_0) - b(Q_0), \end{aligned}$$

$$B_e(Q_0) = \iint_O [b(M_0) - b(Q_0)] \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} = B(Q_0) + \frac{1}{2} b(Q_0).$$

Пришли к формулам Племели для второго потенциала теории упругости:

$$B_l(Q_0) = B(Q_0) - \frac{1}{2} b(Q_0), \quad (3.6.12)$$

$$B_e(Q_0) = B(Q_0) + \frac{1}{2} b(Q_0). \quad (3.6.13)$$

3.7. Определение поля перемещений по заданию внешних сил и вектора перемещения на поверхности тела. В точке Q неограниченной упругой среды приложена единичная сосредоточенная сила e ; тогда по поверхности O , ограничивающей мысленно выделяемый из среды объем V_i , будут распределены поверхностные силы, определяемые по (3.5.11):

$$(n \cdot \hat{T})_0 = \hat{\Phi}(M_0, Q) \cdot e. \quad (3.7.1)$$

Вектор перемещения в этом объеме равен

$$u(M, Q) = \hat{U}(M, Q) \cdot e. \quad (3.7.2)$$

Это состояние объема V_i принимается за первое его состояние в теореме взаимности. Состояние того же тела под действием внешних сил — объемных ρK и поверхностных F — назовем вторым состоянием; вектор перемещения в этом состоянии обозначается $u(M)$.

Работа сил первого состояния на перемещениях второго состояния равна

$$a' = \begin{cases} \left[u(Q) + \int_O \int u(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} \right] \cdot e, & Q \in V_i, \\ \int_O \int u(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} \cdot e, & Q \in V_e. \end{cases} \quad (3.7.3)$$

Сославшись на формулы Племели (3.6.12), (3.6.13), имеем в обоих случаях

$$\lim_{V_i \supset Q \rightarrow Q_0} a' = \lim_{V_e \supset Q \rightarrow Q_0} a' = \left[\frac{1}{2} u(Q_0) + \int_O \int u(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} \right] \cdot e,$$

так что, вспомнив определение (3.5.19) функции $\delta(Q)$, имеем

$$a' = \left[\delta(Q) u(Q) + \int_O \int u(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} \right] \cdot e, \quad (3.7.4)$$

условившись, что интеграл в правой части, когда $Q \in O$, понимается в смысле его главного значения

$$\int_O \int u(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0}. \quad (3.7.5)$$

Работа сил второго состояния на перемещениях первого состояния равна

$$a'' = \left[\int \int \int_{V_i} \rho K(M) \cdot \hat{U}(M, Q) d\tau_M + \int \int_O F(M_0) \cdot \hat{U}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} \right] \cdot e, \quad (3.7.6)$$

и по (3.6.5) эта формула сохраняет свое значение как при $Q \subset V_i$, $Q \subset V_e$, так и при $Q \subset O$; в последнем случае несобственный поверхностный интеграл сходится, так как особенность тензора $\hat{U}(M_0, Q)$, рассматриваемого как функция точки M_0 , в точке Q_0 слабая (обращение в бесконечность, как R^{-1}).

Применение теоремы взаимности приводит теперь к соотношению (произвольно задаваемый вектор e может быть отброшен)

$$\delta(Q) u(Q) = \int \int_O F(M_0) \cdot \hat{U}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} - \int \int_O u(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} + \int \int \int_{V_i} \rho K(M) \cdot \hat{U}(M, Q) d\tau_M. \quad (3.7.7)$$

Последнее слагаемое в этой формуле

$$u_*(Q) = \int \int \int_{V_i} \rho K(M) \cdot \hat{U}(M, Q) d\tau_M \quad (3.7.8)$$

представляет частное решение уравнений равновесия в перемещениях (1.3.2), соответствующее объемным силам. Этим доказано (см. п. 1.4), что оно может быть определено квадратурами при любом законе задания объемных сил.

Соотношение (3.7.7) определяет вектор перемещения по заданию на поверхности O и поверхностной силы F и вектора перемещения u . Поэтому оно, конечно, не является решением краевой задачи.

Проверим, что, когда второе состояние является натуральным, то есть при $\rho K = 0$, $F = 0$, соотношению (3.7.7) удовлетворяет вектор перемещения тела как твердого:

$$u(M) = u_0 + \omega \times r_M = u_0 + \omega \times r_Q + \omega \times R. \quad (3.7.9)$$

Действительно, замечая, что

$$(\omega \times R) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) = \omega \cdot [R \times \hat{\Phi}(M_0, Q)],$$

имеем

$$\begin{aligned} & - \int \int_O u(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} = \\ & = -(u_0 + \omega \times r_Q) \cdot \int \int_O \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} - \omega \cdot \int \int_O R \times \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0}, \end{aligned}$$

и, сославшись на (3.5.14), (3.5.18), получаем

$$-\int_0 \int u(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} = (u_0 + \omega \times r_Q) \delta(Q), \quad (3.7.10)$$

что и требовалось.

3.8. О поведении потенциалов теории упругости на бесконечности. При достаточно большом удалении точки $Q \supset V_e$ от поверхности O

$$R = r_M - r_Q \approx -r_Q, \quad R \approx r_Q \quad (3.8.1)$$

и ядро (3.5.9) первого потенциала представляется в виде

$$\hat{U}(M_0, Q) \approx \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r_Q} [(3-4\nu)\hat{E} + e_Q e_Q], \quad e_Q = \frac{1}{r_Q} r_Q.$$

По формуле (3.6.1), в которой вследствие симметрии тензора \hat{U} сомножители \hat{U} и a переставимы, получаем

$$A(Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r_Q} [(3-4\nu)\hat{E} + e_Q e_Q] \cdot \int_0 \int a(M_0) d\sigma_{M_0}. \quad (3.8.2)$$

По (3.5.8) эта формула представляет вектор перемещения в точке от действия силы

$$\int_0 \int a(M_0) d\sigma_{M_0},$$

приложенной в начале координат; ее можно трактовать как главный вектор системы сил на поверхности малого объема V_i , когда последний стремится к нулю. Перемещение от такой системы сил и, следовательно, первый потенциал убывают на бесконечности, как r_Q^{-1} .

Для ядра (3.5.12) второго потенциала при той же замене (3.8.1)

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(M_0, Q) = \\ = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r_Q^2} [(1-2\nu)(e_Q n_M - n_M e_Q + n_M \cdot e_Q \hat{E}) + 3n_M \cdot e_Q e_Q e_Q], \end{aligned}$$

и выражение этого потенциала примет вид

$$\begin{aligned} B(Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \int_0 \int (n_M b - b \cdot n_M \hat{E} + b n_M) d\sigma_M - \right. \\ \left. - 3e_Q \cdot \int_0 \int b n_M d\sigma_M \cdot e_Q \hat{E} \right] \cdot \frac{e_Q}{r_Q^2}. \quad (3.8.3) \end{aligned}$$

Он представляет перемещение точки Q_∞ , создаваемое некоторой системой сил, распределенных по поверхности малого объема V_i , когда последний стремится к нулю. Главный вектор этой системы сил равен нулю — в противном случае перемещение на достаточном удалении Q от V_i убывало бы, как r_Q^{-1} , а не как r_Q^{-2} . Второй потенциал, подобно потенциалу двойного слоя, ведет себя на бесконечном удалении от O , как r_Q^{-2} . См. также п. 1.3 гл. V.

§ 4. Теоремы единственности и существования решений

4.1. Теорема Кирхгоффа. Исходная система уравнений и краевых условий теории упругости приведена в п. 1.1. Вводятся следующие предположения: 1) начальное состояние тела является натуральным; 2) постоянные μ , ν в обобщенном законе Гука удовлетворяют неравенствам (3.3.5), (3.3.6) гл. III, обеспечивающим положительность удельной потенциальной энергии деформации: поэтому последняя может быть нулем лишь в натуральном состоянии; 3) допускается общепринятое в линейной теории упругости пренебрежение изменением формы тела при формулировании краевых условий — ограничивающая упругое тело поверхность O в состоянии равновесия такая же, как в натуральном состоянии.

При перечисленных условиях решение краевых задач — единственное (теорема Кирхгоффа). Действительно, предполагая наличие двух отличающихся друг от друга решений u' , \hat{T}' и u'' , \hat{T}'' при одном и том же задании объемных сил в V , а также поверхностных сил на O_2 и вектора перемещения на O_1 , получили бы, что разности

$$u = u'' - u', \quad \hat{T} = \hat{T}' - \hat{T}'' \quad (4.1.1)$$

являются решением однородной краевой задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{T} &= 0, \quad \hat{T} = \hat{T}^*, \\ \hat{T} &= 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \theta \hat{E} + \hat{\varepsilon} \right), \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^*],$$

$$u|_{O_1} = 0, \quad n \cdot \hat{T}|_{O_2} = 0. \quad (4.1.3)$$

Из этих уравнений следует [см. (II. 3.10)]

$$\begin{aligned} \iiint_V u \cdot \operatorname{div} \hat{T} \, d\tau &= \iiint_V \operatorname{div} (\hat{T} \cdot u) \, d\tau - \iiint_V \hat{T} \cdot \hat{\varepsilon} \, d\tau = \\ &= \iint_O n \cdot \hat{T} \cdot u \, d\sigma - \iiint_V \hat{T} \cdot \hat{\varepsilon} \, d\tau = 0. \end{aligned}$$

Но поверхностный интеграл по (4.1.3) равен нулю; поэтому

$$\int \int \int_V \hat{T} \cdot \cdot \hat{\varepsilon} \, d\tau = 2 \int \int \int_V A \, d\tau = 0, \quad (4.1.4)$$

и вследствие положительной знакоопределенности удельной потенциальной энергии деформации

$$A \equiv 0, \quad \hat{\varepsilon} \equiv 0, \quad \hat{T} \equiv 0. \quad (4.1.5)$$

По (4.1.1) получаем

$$u' = u'', \quad \hat{T}' = \hat{T}'', \quad (4.1.6)$$

что противоречит предположению о существовании двух отличающихся друг от друга решений.

В условиях смешанной краевой задачи (1.2.3), а также первой краевой задачи (1.2.1), из (4.1.5) следует, что $u \equiv 0$, тогда как во второй краевой задаче вектор перемещения оказывается определенным с точностью до перемещения среды как твердого тела:

$$u = u_0 + \omega \times (r - r_0). \quad (4.1.7)$$

З а м е ч а н и я. 1. В теореме Кирхгоффа устанавливается свойство уравнений линейной теории упругости. Из нее следует недостаточность этой теории для предсказания явлений сосуществования различных состояний равновесия при одних и тех же условиях нагружения, например, изгиба сжатого продольной силой стержня. В доказательстве было существенным пренебрежение изменений формы тела; если его не делать, то для каждого из предположенных состояний равновесия следовало бы записать кинематические краевые условия в виде

$$u' |_{O'_1} = u_*, \quad u'' |_{O''_1} = u_*,$$

причем $O'_1 = O''_1$, так как задание перемещения u_* определяет одну и ту же форму этой части поверхности в деформированном состоянии тела. Однако часть границы, на которой задается распределение поверхностных сил, не сохраняет вида ($O'_2 \neq O''_2$), так что на ней $N' \neq N''$, и статические краевые условия следует записать в виде

$$N' \cdot \hat{T}' |_{O'_2} = F, \quad N'' \cdot \hat{T}'' |_{O''_2} = F,$$

и поэтому краевые условия (4.1.3) для разности решений не имеют места.

2. Доказательство теоремы выражает, что при отсутствии внешних сил в упругом теле не возникает напряженного состояния. Этому не противоречит возможность существования напряжений в ненагруженном односвязном упругом объеме, из

которого удалено клинообразное тело с последующим сшиванием поверхностей разрезов. В таком теле нельзя создать непрерывное вместе с его производными поле перемещений, которое могло бы из этого начального состояния вернуть тело в натуральное состояние. В этих условиях приведенное доказательство теоремы Кирхгоффа отпадает, хотя бы вследствие невозможности преобразования объемного интеграла в поверхностный, предполагающего непрерывность \hat{T} , u и их первых производных.

3. В неодносвязном объеме обеспечивается непрерывность тензоров деформации и напряжений и при наличии неоднозначности перемещений, создаваемой с помощью дисторсии Вольтерра, как описано в п. 2.4 гл. II. В приведенной формулировке теорема Кирхгоффа также здесь не имеет места. Она дополняется требованием, чтобы решениям u' , u'' соответствовали одинаковые циклические постоянные векторы b , c (одна и та же дисторсия). Тогда вектор $u = u' - u''$ — непрерывная и однозначная функция и приведенное доказательство сохраняется. Более подробно об этом см. § 5 этой главы.

4. В теореме Кирхгоффа утверждается единственность решения, если оно существует. Доказательство существования решения первой и второй краевых задач рассматривается в пп. 4.2—4.8 этой главы.

5. Теорема Кирхгоффа не исключает существования разрывных решений однородных краевых задач, когда при отсутствии массовых сил равны нулю перемещения (или поверхностные силы во второй краевой задаче) на поверхности тела. Непрерывное и даже аналитическое в объеме тела решение однородных краевых задач можно построить для значений постоянной Пуассона ν вне допустимого интервала ее значений (при $\nu > 1/2$ или $\nu < -1$).

Примером могут служить однородные краевые задачи для полого шара, ограниченного концентрическими сферами $R=R_0$, $R=R_1$. Решение может быть построено с помощью бигармонической функции Лява (п. 1.10) вида

$$\chi = \sum_s \left(A_s R^{s+2} + \frac{B_s}{R^{s-1}} + C_s R^s + \frac{D_s}{R^{s+1}} \right) P_s(\mu) \quad (\mu = \cos \vartheta), \quad (4.1.8)$$

где $P_s(\mu)$ — решение уравнения Лежандра

$$\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{dP_s}{d\mu} + s(s+1) P_s = 0.$$

Индекс s определяется условием существования нетривиального решения однородной краевой задачи — должен быть равен нулю определитель Δ системы линейных однородных уравнений для неизвестных коэффициентов A_s , B_s , C_s , D_s , получаемой в записи

краевых условий. Он зависит от s , v , R_0/R_1 , и корни трансцендентного по s уравнения

$$\Delta\left(s, v; \frac{R_0}{R_1}\right) = 0 \quad (4.1.9)$$

в допустимом интервале значений v оказываются комплексными. Решения, соответствующие каждому из этих корней, определяются вещественной (или мнимой) частью функции χ . По свойству функций Лежандра они разрывны при $\phi = 0$ или $\phi = \pi$ — решение задачи содержит линию особенностей на отрезке $R_0 < R < R_1$, $\phi = 0$ (или π).

Задавая s целочисленные значения $s = n \geq 2$, получаем непрерывные во всем объеме решения; определяемые по таким s из уравнения (4.1.9) значения параметра v при всех R_0/R_1 расположены вне допустимого интервала.

4.2. Интегральные уравнения первой краевой задачи. Решение представляется в форме второго потенциала теории упругости (3.6.6) с неизвестным вектором плотности $b(M_0)$:

$$v(Q) = u(Q) - u_*(Q) = \int_0 \int b(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} = B(Q). \quad (4.2.1)$$

Через $u_*(Q)$ обозначено частное решение, соответствующее действию массовых сил, находимое, например, формулой (3.7.8); поэтому вектор $v(Q)$, определяемый по (4.2.1), будет решением однородных уравнений теории упругости в перемещениях как при $Q \in V_i$, так и при $Q \in V_e$. Значение $v(Q_0)$ этого вектора на поверхности O задано.

Сославшись на (3.6.12), (3.6.13), записываем равенства

$$v(Q) = v(Q_0) = B_i(Q_0) = B_0(Q_0) - \frac{1}{2} b(Q_0), \quad (4.2.2)$$

$v_i \supset Q \rightarrow Q_0$

$$v(Q) = v(Q_0) = B_e(Q_0) = B_0(Q_0) + \frac{1}{2} b(Q_0), \quad (4.2.3)$$

$v_e \supset Q \rightarrow Q_0$

где $B_0(Q_0)$ — прямое значение потенциала $B(Q)$. Приходим к следующим интегральным уравнениям первой внутренней (I^i) и первой внешней (I^e) краевых задач:

$$I^i) \quad \frac{1}{2} b(Q_0) - \int_0 \int b(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} = -v(Q_0), \quad (4.2.4)$$

$$I^e) \quad \frac{1}{2} b(Q_0) + \int_0 \int b(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} = v(Q_0). \quad (4.2.5)$$

З а м е ч а н и я. 1. Заданию в случае $I^{(i)}$ вектора перемещения $v(Q_0)$ в форме перемещения твердого тела

$$v(Q_0) = v_0 + \omega \times r_{Q_0} \quad (4.2.6)$$

соответствует решение интегрального уравнения (4.2.4):

$$b(M_0) = - (v_0 + \omega \times r_{M_0}), \quad (4.2.7)$$

что сразу же следует из (3.7.10) при $\delta(Q) = 1/2$. Действительно, представив (4.2.7) в виде

$$b(M_0) = - (v_0 + \omega \times r_{Q_0}) - \omega \times R,$$

имеем

$$\int_O b(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) dO_{M_0} = \frac{1}{2} (v_0 + \omega \times r_{Q_0}), \quad (4.2.8)$$

и сказанное следует из подстановки выражений (4.2.7), (4.2.8) в (4.2.4). Вместе с тем по (4.2.1) и при $\delta(Q) = 1$ находим, как следует ожидать,

$$v(Q) = - \int \int (v_0 + \omega \times r_{M_0}) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q) dO_{M_0} = v_0 + \omega \times r_Q \quad (4.2.9)$$

— при задании твердого перемещения поверхности O весь объем V_i перемещается как твердое тело, напряженное состояние отсутствует. Это решение по теореме Кирхгоффа — единственное.

2. Из приведенного вычисления следует, что вектор

$$b^0(M_0) = v_0 + \omega \times r_{M_0}, \quad (4.2.10)$$

где v_0, ω — произвольные постоянные векторы, является решением однородного интегрального уравнения

$$I_0^{(e)} \frac{1}{2} b^0(Q_0) + \int \int b^0(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) dO_{M_0} = 0. \quad (4.2.11)$$

Отсюда следует, что вектор плотности $b(M_0)$ в задаче $I^{(e)}$ может быть определен лишь с точностью до слагаемого (4.2.10).

3. Вектор перемещения (4.2.1) в случае внешней задачи, согласно (3.8.3), убывает на бесконечности не медленнее, чем R^{-2} . Такое решение может быть получено, если равен нулю главный вектор сил, которые должны быть распределены по O , чтобы сообщить точкам этой поверхности, заданное вектором $v(Q_0)$. Поэтому решение первой внешней краевой задачи в форме второго потенциала (3.6.6) не существует при произвольном задании вектора $v(Q_0)$.

Аналогичное явление известно в электростатике. Решение внешней задачи Дирихле, к которой сводится разыскание поля

электрического потенциала $v(Q)$ в V_e , исчезающего на бесконечности, по заданному его распределению $v(M_0)$ на проводящей поверхности O , может быть представлено потенциалом двойного слоя только при условии, что полный заряд на O равен нулю. Поэтому задачу решают, налагая на потенциал двойного слоя решение так называемой задачи Робена. В ней потенциал на O постоянен, а его значение в V_e представляется потенциалом простого слоя. Понятно, что и решение первой краевой внешней задачи теории упругости приводит к аналогичной «эластостатической задаче Робена».

4.3. Интегральные уравнения второй краевой задачи. Решение однородных уравнений теории упругости в перемещениях разыскивается в форме первого потенциала (3.6.1)

$$v(Q) = u_Q - u_*(Q) = \int \int_O a(M_0) \cdot \hat{U}(M_0, Q) d\sigma_{M_0} = A(Q) \quad (4.3.1)$$

с неизвестным вектором плотности $a(M_0)$. Вычисляемый, как указано в п. 3.5, по вектору $v(Q)$, тензор напряжений равен

$$\hat{T}(Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int \int_O \frac{d\sigma_{M_0}}{R^3} \left[(1-2\nu)(Ra + aR - \hat{E}R \cdot a) + 3 \frac{RR}{R^2} R \cdot a \right]. \quad (4.3.2)$$

Здесь, как и ранее,

$$R = r_{M_0} - r_Q, \quad (4.3.3)$$

а отличие в знаке от (3.5.12) объясняется тем, что при переходе от (4.3.1) к формуле (4.3.2) дифференцирования проводились по координатам точки Q . Законность дифференцирований под знаком интеграла в (4.3.1) не вызывает сомнения, поскольку точка Q не расположена на O , так что $R \neq 0$.

Вектор напряжения на площадке с нормалью n_Q определяется равенством

$$n_Q \cdot \hat{T}(Q) = \int \int_O \hat{\Psi}(M_0, Q) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0}, \quad (4.3.4)$$

причем, как следует из (4.3.2), несимметричный тензор второго ранга $\hat{\Psi}(M_0, Q)$ равен

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(M_0, Q) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3} \left[(1-2\nu)(n_Q \cdot R\hat{E} + Rn_Q - n_Q R) + 3 \frac{n_Q \cdot R}{R^2} RR \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[2(1-\nu) \frac{n_Q \cdot R}{R^3} \hat{E} + \frac{1-2\nu}{R^3} (Rn_Q - n_Q R) + n_Q \cdot R \nabla \nabla \frac{1}{R} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Этот тензор существенно отличается от $\hat{\Phi}(M_0, Q)$ тем, что в его определение входит нормаль к площадке в точке Q , а не M_0 . Вместе с тем по (3.5.12) сумма

$$\hat{\Psi}(M_0, Q) + \hat{\Phi}(M_0, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{R^3} (n_Q - n_{M_0}) \cdot R\hat{E} + \right. \\ \left. + \frac{1-2\nu}{R^3} [R(n_Q - n_{M_0}) - (n_Q - n_{M_0})R] + (n_Q - n_{M_0}) \cdot R\nabla\nabla \frac{1}{R} \right\} \quad (4.3.6)$$

представляет ядро потенциала со слабой особенностью (вида R^{-1})

$$C(Q) = \int \int_O [\hat{\Psi}(M_0, Q) + \hat{\Phi}(M_0, Q)] \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0},$$

предельные значения которого извне и изнутри равны друг другу и равны его прямому значению (подобно случаю первого потенциала)

$$\lim_{v_i \ni Q \rightarrow Q_0} C(Q) = C_i(Q) = \lim_{v_e \ni Q \rightarrow Q_0} C(Q) = C_e(Q) = C^0(Q_0).$$

Поэтому

$$\lim_{v_i \ni Q \rightarrow Q_0} \int \int_O \hat{\Psi}(M_0, Q) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} = \\ = \int \int_O [\hat{\Psi}(M_0, Q_0) + \hat{\Phi}(M_0, Q_0)] \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} - \\ - \lim_{v_i \ni Q \rightarrow Q_0} \int \int_O \hat{\Phi}(M_0, Q) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0}.$$

Но, подобно (4.2.2),

$$\lim_{v_i \ni Q \rightarrow Q_0} \int \int_O \hat{\Phi}(M_0, Q) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} = \\ = \int \int_O \hat{\Phi}(M_0, Q_0) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} - \frac{1}{2} a(Q_0),$$

так что

$$\lim_{v_i \ni Q \rightarrow Q_0} \int \int_O \hat{\Psi}(M_0, Q) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} = \\ = \int \int_O \hat{\Psi}(M_0, Q_0) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} + \frac{1}{2} a(Q_0) \quad (4.3.7)$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \lim_{V_e \supset Q \rightarrow Q_0} \int_O \hat{\Psi}(M_0, Q) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} = \\ = \int_O \hat{\Psi}(M_0, Q_0) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} - \frac{1}{2} a(Q_0). \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Сравнивая еще (4.3.5) с (3.5.12) и учитывая, что $r_Q - r_M = -R$, имеем

$$\hat{\Psi}(M_0, Q_0) = \hat{\Phi}(Q_0, M_0). \quad (4.3.9)$$

Поэтому, введя в рассмотрение заданные на O распределения поверхностных сил

$$\lim_{V_i \supset Q \rightarrow Q_0} n_Q \cdot \hat{T} = (n_Q \cdot \hat{T})_i = F(Q_0), \quad \lim_{V_e \supset Q \rightarrow Q_0} (n_Q \cdot \hat{T})_e = F(Q_0), \quad (4.3.10)$$

где в обоих случаях n_Q — единичный вектор нормали, внешней к V_i , и сославшись на (4.3.4), (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9), приходим к интегральным уравнениям второй внутренней (II⁽ⁱ⁾) и второй внешней (II^(e)) краевых задач:

$$\text{II}^{(i)} \quad \frac{1}{2} a(Q_0) + \int_O \hat{\Phi}(Q_0, M_0) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} = F(Q_0), \quad (4.3.11)$$

$$\text{II}^{(e)} \quad \frac{1}{2} a(Q_0) - \int_O \hat{\Phi}(Q_0, M_0) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} = -F(Q_0). \quad (4.3.12)$$

Заметим, что во второй формуле (4.3.10) определение поверхностной силы отличается знаком от ее обычного задания как произведения внешней к V_e нормали на тензор напряжения.

З а м е ч а н и е. Сославшись на (3.5.9), можно представление вектора перемещения (4.3.1) в виде первого потенциала записать еще так:

$$v(Q) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\int_O \frac{a(M_0)}{R} d\sigma_{M_0} + \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad}_Q \int_O R \cdot \frac{a(M_0)}{R} d\sigma_{M_0} \right] \quad (4.3.13)$$

или, после замены R его значением $r_{M_0} - r_Q$,

$$\begin{aligned} v(Q) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\int_O \frac{a(M_0)}{R} d\sigma_{M_0} - \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad}_Q r_Q \cdot \int_O \frac{a(M_0)}{R} d\sigma_{M_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad}_Q \int_O \frac{r_{M_0} \cdot a(M_0)}{R} d\sigma_{M_0} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Это решение в форме Папковича — Нейбера (1.4.10), когда за гармонические вектор и скаляр приняты потенциалы

$$B = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_0 \int \frac{a(M_0)}{R} d\sigma_{M_0}, \quad B_0 = -\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \int_0 \int \frac{r(M_0) \cdot a(M_0)}{R} d\sigma_{M_0}. \quad (4.3.15)$$

4.4. Сопоставление интегральных уравнений первой и второй краевых задач. Полученные в пп. 4.2 и 4.3 интегральные уравнения перепишем в такой последовательности:

$$\left. \begin{aligned} I^{(i)} \quad \frac{1}{2} b(Q_0) - \int_0 \int b(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} &= -v(Q_0), \\ II^{(e)} \quad \frac{1}{2} a(Q_0) - \int_0 \int \hat{\Phi}(Q_0, M_0) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} &= -F(Q_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} I^{(e)} \quad \frac{1}{2} b(Q_0) + \int_0 \int b(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} &= v(Q_0), \\ II^{(i)} \quad \frac{1}{2} a(Q_0) + \int_0 \int \hat{\Phi}(Q_0, M_0) \cdot a(M_0) d\sigma_{M_0} &= F(Q_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.4.2)$$

Выше указывалось, что поверхностные интегралы понимаются в смысле их главных значений, поэтому уравнения сингулярны. Применимость к ним основных теорем и альтернатив Фредгольма может быть доказана при значениях постоянных μ , ν , для которых удельная потенциальная энергия деформации положительна [см. (3.3.5), (3.3.6) гл. III].

Интегральные уравнения, составляющие систему (4.4.1), — союзные уравнения; то же относится к паре уравнений (4.4.2). Соответствующие им системы однородных уравнений можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} I_0^{(i)}, I_0^{(e)} \quad \frac{1}{2} b^0(Q_0) - \lambda \int_0 \int b^0(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} &= 0, \\ II_0^{(e)}, II_0^{(i)} \quad \frac{1}{2} a^0(Q_0) - \lambda \int_0 \int \hat{\Phi}(Q_0, M_0) \cdot a^0(M_0) d\sigma_{M_0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

причем $\lambda = 1$ для задач $I_0^{(i)}$, $II_0^{(e)}$ и $\lambda = -1$ для $I_0^{(e)}$, $II_0^{(i)}$. Известно, что собственные числа союзных однородных интегральных уравнений одинаковы, так что эти уравнения или одновременно (при одном и том же λ) имеют только тривиальное (нулевое) решение, или одновременно обладают собственными решениями, отличными от тривиальных. Согласно альтернативе Фредгольма известно, что в первом случае соответствующее неоднородное уравнение имеет единственное решение, тогда как во втором оно

не имеет решения при произвольной правой части, а при наложении на последнюю некоторых условий — решение не единственное.

Ниже доказывается, что $\lambda = 1$ не является собственным числом системы союзных уравнений (4.4.3). Поэтому первая внутренняя $I^{(i)}$ и вторая внешняя $II^{(e)}$ задачи имеют единственное решение при произвольных заданиях их правых частей.

Наоборот, при $\lambda = -1$ однородное уравнение $I_0^{(e)}$ имеет отличное от нуля семейство решений (4.2.10), зависящее от двух произвольных постоянных векторов (от шести постоянных). Значит, и однородное уравнение $II_0^{(i)}$ имеет также зависящее от шести постоянных семейство нетривиальных решений; поэтому задачи $II^{(i)}$ и $I^{(e)}$, вообще говоря, решений не имеют. Это легко понять, поскольку в задаче $II^{(i)}$ свободный член $F(Q_0)$, определяющий распределение поверхностных сил, должен удовлетворять уравнениям статики и при этом вектор перемещения определен с точностью до перемещения твердого тела. В задаче же $I^{(e)}$ — в самой ее постановке — накладывалось существенное ограничение на задание вектора $v(Q_0)$, на что обращалось внимание в замечании 3 п. 4.2.

Ниже группы задач (4.4.1), (4.4.2) более подробно рассматриваются по отдельности.

4.5. Теорема существования решения второй внешней и первой внутренней задачи. Пусть однородное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2} a(Q_0) - \int \int_O \hat{\Phi}(Q_0, M_0) \cdot a(M_0) d\omega_{M_0} = 0 \quad (4.5.1)$$

имеет нетривиальное решение $a^0(Q_0)$. Тогда вектор перемещения $v(Q)$, определяемый по (4.3.1) первым потенциалом

$$v(Q) = A(Q; a^0) = \int \int_O a^0(M_0) \cdot \hat{U}(M_0, Q) d\omega_{M_0}, \quad (4.5.2)$$

удовлетворяет однородным уравнениям теории упругости в перемещениях и убывает на бесконечности не медленнее, чем R^{-1} , а вычисляемые по нему поверхностные силы по (4.4.1) и (4.5.1) исчезают на O и имеют порядок R^{-2} на поверхности Ω сферы достаточно большого радиуса R . Удвоенная потенциальная энергия деформации в таком напряженном состоянии, определяемая формулой Клапейрона (3.3.3) гл. III, равна

$$\begin{aligned} \int \int \int_{V_e} \hat{T} \cdot \hat{\varepsilon} d\tau &= \int \int_{\Omega} v \cdot F d\omega + \int \int_O v \cdot F d\omega = \\ &= R^2 \int \int_{\Omega^*} v \cdot F d\omega^* + \int \int_O v \cdot F d\omega. \end{aligned}$$

Здесь do^* — элемент поверхности сферы Ω^* единичного радиуса, а подынтегральная функция убывает не медленнее, чем R^{-3} , так что

$$\int \int \int_{V_e} \hat{T} \cdot \hat{e} \, d\tau = \int \int_O \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \, do = 0,$$

и вследствие положительной знакоопределенности удельной потенциальной энергии деформации $\hat{e} = 0$. Поэтому $\mathbf{v}(Q)$ может быть только перемещением среды как твердого тела, но оно отсутствует на бесконечности, и поэтому

$$\mathbf{v}(Q) = \mathbf{A}(Q, \mathbf{a}^0) = 0, \quad Q \subset V_e. \quad (4.5.3)$$

Остается убедиться, что это равенство противоречит предположению $\mathbf{a}^0 \neq 0$. Для этого отметим, что вследствие непрерывности первого потенциала из (4.5.3) следует

$$\mathbf{A}_e(Q_0) = \mathbf{A}_i(Q_0) = \mathbf{v}(Q_0) = 0, \quad (4.5.4)$$

и, еще раз обратившись к формуле Клапейрона, имеем

$$\int \int_{V_i} \hat{T} \cdot \hat{e} \, d\tau = \int \int_O \mathbf{v}(Q_0) \cdot \mathbf{F} \, do_{M_0} = 0,$$

так что $\hat{e} = 0$ и по (4.5.4)

$$\mathbf{v}(Q) = 0, \quad Q \subset V_i. \quad (4.5.5)$$

Поверхностные силы, вычисляемые по равному нулю вектору перемещения, конечно, отсутствуют, и по (4.3.10) — (4.3.12) теперь получаем

$$(\mathbf{n}_Q \cdot \hat{\mathbf{T}})_i - (\mathbf{n}_Q \cdot \hat{\mathbf{T}})_e = \mathbf{a}^0(Q_0) = 0, \quad (4.5.6)$$

что и требовалось. Итак, интегральное уравнение $\Pi_0^{(e)}$, значит и союзное с ним уравнение $I_0^{(i)}$, допускает только тривиальное решение; $\lambda = 1$ не является собственным числом этих уравнений. Этим доказано существование и единственность решения задач $I^{(i)}$, $\Pi^{(e)}$ при произвольных заданиях на O вектора перемещения $\mathbf{v}(Q_0)$ в первой из этих задач и поверхностных сил $\mathbf{F}(Q_0)$ — во второй.

4.6. Вторая внутренняя краевая задача ($\Pi^{(i)}$). Однородное интегральное уравнение, соответствующее этой задаче,

$$\Pi_0^{(i)} \quad \frac{1}{2} \mathbf{a}^0(Q_0) + \int \int_O \hat{\Phi}(Q_0, M_0) \cdot \mathbf{a}^0(M_0) \, do_{M_0} = 0 \quad (4.6.1)$$

является союзным с (4.2.11):

$$I_0^{(e)} \quad \frac{1}{2} \mathbf{b}^0(Q_0) + \int \int_O \mathbf{b}^0(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) \, do_{M_0} = 0. \quad (4.6.2)$$

Но последнее имеет нетривиальное решение (4.2.10), значит, нетривиальным решением обладает и первое. Обратившись теперь к неоднородному интегральному уравнению (4.4.2) задачи II⁽ⁱ⁾, имеем

$$\begin{aligned} \int \int_O \mathbf{b}^0(Q_0) \cdot \mathbf{F}(Q_0) dQ_0 &= \frac{1}{2} \int \int_O \mathbf{b}^0(Q_0) \cdot \mathbf{a}(Q_0) dQ_0 + \\ &+ \int \int_O dM_0 \left[\int \int_O \mathbf{b}^0(Q_0) \cdot \hat{\Phi}(Q_0, M_0) dQ_0 \right] \cdot \mathbf{a}(M_0). \end{aligned}$$

Но по (4.6.2) внутренний интеграл равен $-\frac{1}{2} \mathbf{b}^0(M^0)$, так что

$$\begin{aligned} \int \int_O \mathbf{b}^0(Q_0) \cdot \mathbf{F}(Q_0) dQ_0 &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \int_O \mathbf{b}^0(Q_0) \cdot \mathbf{a}(Q_0) dQ_0 - \int \int_O \mathbf{b}^0(M_0) \cdot \mathbf{a}(M_0) dM_0 \right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь доказана одна из теорем Фредгольма, выражающая, что задача II⁽ⁱ⁾ может иметь решение, если заданное распределение поверхностных сил $\mathbf{F}(Q_0)$ ортогонально семейству собственных решений союзного интегрального уравнения (4.6.2):

$$\int \int_O \mathbf{b}^0(Q_0) \cdot \mathbf{F}(Q_0) dQ_0 = 0 \quad (4.6.3)$$

или, если заменить вектор $\mathbf{b}^0(Q_0)$ его значением,

$$\mathbf{u}_0 \cdot \int \int_O \mathbf{F}(Q_0) dQ_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \int \int_O \mathbf{r}_{Q_0} \times \mathbf{F}(Q_0) dQ_0 = 0,$$

и вследствие произвола в выборе векторов \mathbf{u}_0 , $\boldsymbol{\omega}$ приходим к ожидаемым условиям статики, выражающим требования обращения в нуль главного вектора и главного момента поверхностных сил в задаче II⁽ⁱ⁾:

$$\mathbf{V} = \int \int_O \mathbf{F}(Q_0) dQ_0 = 0, \quad \mathbf{m}^0 = \int \int_O \mathbf{r}(Q_0) \times \mathbf{F}(Q_0) dQ_0 = 0. \quad (4.6.4)$$

При соблюдении этих условий вектор перемещения $\mathbf{v}(Q)$ определен с точностью до слагаемого перемещения твердого тела, являющегося, в соответствии с одной из теорем Фредгольма, собственным решением союзного уравнения (4.6.2).

4.7. Эластостатическая задача Робена. Нетривиальное собственное решение $\mathbf{a}^0(Q_0)$ задачи II₀⁽ⁱ⁾ примем за плотность первого потенциала, решающего задачу II^(e). Распределение

поверхностных сил на O , соответствующее так заданной плотности, по (4.4.1), (4.6.1) и (4.3.10) будет

$$-F(Q_0) = - (n_Q \cdot \hat{T})_e = \frac{1}{2} a^0(Q_0) - \int_O \int \hat{\Phi}(Q_0, M_0) \cdot a^0(M_0) dO_{M_0} = a^0(Q_0). \quad (4.7.1)$$

Этим дается истолкование механического значения собственного решения второй внутренней задачи.

Первый потенциал теории упругости, образуемый по плотности $a^0(M_0)$, обозначим

$$w(Q) = \int_O \int a^0(M_0) \cdot \hat{U}(M_0, Q) dO_{M_0}. \quad (4.7.2)$$

Эта непрерывная во всем пространстве функция определяет вектор перемещения

$$w(Q) = \begin{cases} w_i(Q), & Q \subset V_i, \\ w(Q_0), & Q \subset O, \\ w_e(Q), & Q \subset V_e. \end{cases} \quad (4.7.3)$$

Вычисляемые по (4.3.11) поверхностные силы на O , соответствующие вектору перемещения $w_i(Q)$ задачи $\Pi^{(i)}$, оказываются равными нулю:

$$\frac{1}{2} a^0(Q_0) + \int_O \int \hat{\Phi}(Q_0, M_0) \cdot a^0(M_0) dO_{M_0} = [n_Q \cdot \hat{T}(w_i)]_0 = 0, \quad (4.7.4)$$

что следует из определения (4.6.1) плотности $a^0(Q_0)$. Но перемещение $w_i(Q)$ во второй внутренней задаче при отсутствии поверхностных сил может быть только перемещением твердого тела

$$w_i(Q) = u_0 + \omega \times r_Q \quad (4.7.5)$$

и по непрерывности потенциала простого слоя (4.7.2)

$$w_i(Q_0) = u_0 + \omega \times r_{Q_0} = w_e(Q_0). \quad (4.7.6)$$

Представим себе твердое тело, впаянное в полость V_i неограниченной упругой среды. Сообщим ему перемещение, определяемое вектором (4.7.5). Это создает в V_e поле перемещений $w_e(Q)$, задаваемое первым потенциалом (4.7.2), причем взятое со знаком минус собственное решение $-a^0(Q)$ задачи $\Pi_0^{(i)}$ определяет распределение по поверхности смещенного твердого тела реакций среды на него (напомним, что n_Q в (4.7.1) — единичный вектор нормали, направленной внутрь V_e).

Эта задача о напряженном состоянии упругой среды, возникающем при сообщении перемещения впаянному в нее твердому

телу, представляет аналог задачи Робена электростатики. Постоянству потенциала на проводящей поверхности и внутри нее соответствует твердое перемещение объема V_i , а отсутствию поля электрического напряжения — отсутствие напряженного состояния в V_i -объеме. Задача Робена сводится к разысканию распределения заряда на проводнике O из однородного интегрального уравнения для плотности потенциала простого слоя; этому соответствует сведение эластостатической задачи Робена к разысканию собственного вектора $\mathbf{a}^0(Q_0)$ задачи $\Pi_0^{(i)}$. Существование решения эластостатической задачи Робена гарантируется наличием нетривиального собственного решения интегрального уравнения $\Pi_0^{(i)}$.

Главный вектор и главный момент системы сил, которые надо приложить к впаянному в среду твердому телу, чтобы сообщить ему перемещение (4.7.5), определяются из уравнений статики

$$\mathbf{V} = \int_O \mathbf{a}^0(Q_0) dQ_0, \quad \mathbf{m}^c = \int_O \mathbf{r}(Q_0) \times \mathbf{a}^0(Q_0) dQ_0. \quad (4.7.7)$$

Назовем через

$$\mathbf{a}^k, \mathbf{a}^{k+3} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (4.7.8)$$

распределения поверхностных сил по O , вызываемые приложением к твердому телу единичной силы $\mathbf{V} = \mathbf{i}_k$ с линией действия по оси Sx_k и соответственно единичного момента $\mathbf{m} = \mathbf{i}_k$ относительно этой оси. Тогда по (4.7.7)

$$\left. \begin{aligned} \int_O \mathbf{a}^k dQ_0 \cdot \mathbf{i}_r &= \delta_{kr}, & \int_Q \mathbf{r}(Q_0) \times \mathbf{a}^k dQ_0 \cdot \mathbf{i}_r &= 0, \\ \int_O \mathbf{a}^{k+3} dQ_0 \cdot \mathbf{i}_r &= 0, & \int_O \mathbf{r}(Q_0) \times \mathbf{a}^{k+3} dQ_0 \cdot \mathbf{i}_r &= \delta_{kr}, \end{aligned} \right\} \quad (4.7.9)$$

так как линией действия равнодействующей сил \mathbf{a}^k является ось Sx_k , а распределения сил \mathbf{a}^{k+3} статически эквивалентны парам.

Через

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{u}^{k+3} = \mathbf{i}_k \times \mathbf{r}(Q_0) \quad (4.7.10)$$

назовем систему собственных решений интегрального уравнения $\Pi_0^{(e)}$. Очевидно, что любое перемещение впаянного в V_i твердого

тела является линейной комбинацией этих элементарных перемещений. Формулы (4.7.9) теперь переписываются в виде

$$\int \int_O \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{u}^r dQ_0 = \delta_{kr} \quad (k, r = 1, 2, \dots, 6). \quad (4.7.11)$$

Этим определяется система распределений поверхностных сил — собственных решений интегрального уравнения $\Pi_0^{(l)}$, ортонормированных с системой (4.7.10) собственных решений задачи $I_0^{(e)}$ [см. (4.2.11)].

4.8. Первая внешняя краевая задача ($I^{(e)}$). Интегральное уравнение (4.4.2) этой задачи по упомянутой в п. 4.6 теореме Фредгольма имеет решение лишь при условии ортогональности его свободного члена любому собственному решению $\mathbf{a}^0(Q_0)$ задачи $\Pi_0^{(l)}$:

$$\int \int_O \mathbf{v}(Q_0) \cdot \mathbf{a}^0(Q_0) dQ_0 = 0. \quad (4.8.1)$$

Это условие, как уже говорилось в замечании 3 п. 4.2, вызвано не существом задачи, а принятым представлением $\mathbf{v}(Q)$ в форме второго потенциала теории упругости. При таком представлении этот вектор на достаточно большом удалении от O убывает, согласно (3.8.3), не медленнее, чем R^{-2} , тогда как следует потребовать его убывания не более медленного, чем R^{-1} .

Введем вместо заданного распределения $\mathbf{v}(Q_0)$ на O вспомогательный вектор

$$\mathbf{v}^*(Q) = \mathbf{v}(Q_0) - \sum_{r=1}^6 D_r \mathbf{u}^r, \quad (4.8.2)$$

где \mathbf{u}^r — элементарная система собственных решений (4.7.10) интегрального уравнения $I_0^{(e)}$.

Условие (4.8.1) будет удовлетворено при любом собственном векторе $\mathbf{a}^0(Q_0)$, если потребовать его выполнения с каждым из векторов (4.7.8). Сославшись на (4.7.11), имеем

$$\int \int_O \mathbf{v}^*(Q_0) \cdot \mathbf{a}^k(Q_0) dQ_0 = \int \int_O \mathbf{v}(Q_0) \cdot \mathbf{a}^k(Q_0) dQ_0 - D_k = 0. \quad (4.8.3)$$

Этим определены коэффициенты D_r , и, приняв теперь,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \int \int_O \mathbf{v}(Q_0) \cdot \mathbf{a}^k(Q_0) dQ_0, \\ \omega &= \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \int \int_O \mathbf{v}(Q_0) \cdot \mathbf{a}^{k+3}(Q_0) dQ_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.8.4)$$

представим (4.8.2) в виде

$$\mathbf{v}^*(Q_0) = \mathbf{v}(Q_0) - (\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Q_0}). \quad (4.8.5)$$

Разыскивая теперь решение $\mathbf{v}^*(Q)$ в форме (4.2.1) второго потенциала теории упругости, приходем, вместо (4.2.5), к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2} \mathbf{b}(Q_0) + \int \int_O \mathbf{b}(M_0) \cdot \hat{\Phi}(M_0, Q_0) d\sigma_{M_0} = \mathbf{v}^*(Q_0), \quad (4.8.6)$$

имеющему решение, поскольку соблюдено условие ортогональности (4.8.3) его свободного члена собственному вектору задачи $\Pi_0^{(i)}$.

Остается построить в V_e первый потенциал $\mathbf{w}_e(Q)$, решающий эластостатическую задачу Робена, соответствующую заданию на O вектора перемещения

$$\mathbf{w}_e(Q_0) = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Q_0}. \quad (4.8.7)$$

Решение первой внешней краевой задачи теперь представляется в виде

$$\mathbf{v}(Q) = \mathbf{v}^*(Q) + \mathbf{w}_e(Q). \quad (4.8.8)$$

Действительно, это решение удовлетворяет в V_e однородным уравнениям теории упругости (им удовлетворяет каждый из потенциалов), а на O по (4.8.5) и (4.8.7)

$$\mathbf{v}(Q_0) = \mathbf{v}(Q_0) - (\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Q_0}) + (\mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Q_0}) = \mathbf{v}(Q_0),$$

что и требуется. Единственность решения гарантируется теоремой Кирхгоффа.

§ 5. Напряженное состояние в двусвязном объеме

5.1. Обзор содержания. В дальнейшем предполагается, что компоненты тензора деформации $\hat{\epsilon}$ представляют однозначные непрерывные функции координат, имеющие непрерывные частные производные первого и второго порядка и удовлетворяющие условию сплошности (2.1.5) гл. II. Условимся называть такую деформацию правильной.

При правильной деформации упругой среды в односвязном объеме вычисляемые по тензору деформации вектор перемещения \mathbf{u} и линейный вектор поворота $\boldsymbol{\omega}$ также однозначны и непрерывны. Согласно теореме единственности (п. 4.1) Кирхгоффа состояние этого объема при отсутствии внешних сил является натуральным. Этого нельзя сказать в случае двусвязного объема (тор, полый цилиндр); в нем может существовать напряженное состояние при правильной деформации и при отсутствии внеш-

них сил. Сообщение напряженного состояния двусвязному упругому телу, ранее находившемуся в натуральном состоянии, можно мыслить осуществленным путем создания дисторсии Вольтерра (п. 2.4 гл. II). Двумя конгруэнтными разрезами из тела удаляется тонкий слой материала, и концы образовавшегося односвязного объема спаиваются по конгруэнтным поверхностям — по «барьеру». Характеристиками дисторсии являются два циклических постоянных вектора \mathbf{c} , \mathbf{b} , называемые ниже поступательным и поворотным векторами дисторсии; ими определяются поступательное перемещение и поворот, которые должны быть сообщены одному из концов после разрезания, чтобы совместить его с другим конгруэнтным концом.

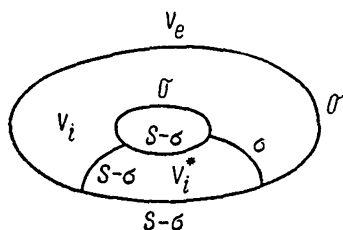


Рис. 15.

Заданием внешних сил, действующих на упругое тело в односвязном объеме, определяется напряженное состояние в нем и однозначный непрерывный вектор перемещения; в двусвязном объеме определение напряженного состояния по внешним силам возможно, лишь если наперед известно, что векторы дисторсии равны нулю.

Разрывы вектора поворота ω и вектора перемещения \mathbf{u} на барьере определяются по формулам Вейнгартена через векторы дисторсии \mathbf{c} и \mathbf{b} ; компоненты их Вольтерра назвал постоянными барьера. Для двусвязного тела формулировка теоремы Кирхгоффа должна быть дополнена требованием задания шести постоянных барьера: если упругая среда заполняет двусвязный объем и ее деформация правильная, напряженное состояние в ней определяется заданием не только внешних сил, но и шести постоянных барьера. Это доказывается в п. 5.2 построением напряженного состояния в ненагруженном теле по заданию векторов \mathbf{c} , \mathbf{b} . Измененная формулировка теоремы взаимности в двусвязном теле дается в п. 5.3, а в пп. 5.4 и 5.5 приводится выражение потенциальной энергии деформации, определяемой наличием дисторсии. Краевая задача теории дисторсий сформулирована в п. 5.6. Примеры, относящиеся к задачам дисторсий в полем цилиндре, рассматриваются ниже, в п. 7.3 и гл. V.

5.2. Определение напряженного состояния по постоянным барьерам. Из упругого тела в двусвязном объеме V_i выделяется объем V_i^* , ограниченный поверхностью S , часть которой σ представляет барьер, делающий V_i односвязным объемом. Поверхность объема V_i обозначается O , объем вне O — через V_e , а вне S — через $V_e^* = V_e + V_i - V_i^*$ (рис 15).

Пусть c, b — заданные постоянные барьера. Сославшись на формулы (3.7.9) и (3.7.10), имеем

$$\delta(Q)(c + b \times r_Q) = - \int \int_S (c + b \times r_{M_S}) \cdot \hat{\Phi}(M_S, Q) d\sigma_{M_S}, \quad (5.2.1)$$

причем $\delta(Q) = 1$ при $Q \subset V_i^*$ и $\delta(Q) = 0$ при $Q \subset V_e^*$, так что левая сторона этого равенства может быть представлена в форме разности значений вектора перемещения

$$v(Q) = \begin{cases} c + b \times r_Q, & Q \subset V_i^*, \\ 0, & Q \subset V_e^*, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

при переходе через барьер. Тензор деформации $\hat{\varepsilon}(v_Q)$, вычисляемый по этому вектору, равен нулю повсюду:

$$\hat{\varepsilon}(v(Q)) = 0 \quad (Q \subset V_i^*, Q \subset S, Q \subset V_e^*). \quad (5.2.3)$$

Итак,

$$\dot{v}(Q) = - \int \int_S (c + b \times r_{M_S}) \cdot \hat{\Phi}(M_S, Q) d\sigma_{M_S}. \quad (5.2.4)$$

Интеграл справа представим в виде суммы двух интегралов:

$$u(Q) = - \int \int_{\sigma} (c + b \times r_{M_{\sigma}}) \cdot \hat{\Phi}(M_S, Q) d\sigma_{M_{\sigma}}, \quad (5.2.5)$$

$$u'(Q) = - \int \int_{S-\sigma} (c + b \times r_{M_S}) \cdot \hat{\Phi}(M_S, Q) d\sigma_{M_S}. \quad (5.2.6)$$

Вектор $u'(Q)$ сохраняет непрерывность при переходе через σ , а $u(Q)$ — через поверхность $S - \sigma$; то же можно сказать о вычисляемых по u' и u тензорах деформации $\hat{\varepsilon}(u'(Q))$, $\hat{\varepsilon}(u(Q))$. Вместе с тем по (5.2.3)

$$\hat{\varepsilon}(v(Q)) = \hat{\varepsilon}(u(Q)) + \hat{\varepsilon}(u'(Q)) = 0.$$

Но тензор $\hat{\varepsilon}(u'(Q))$ остается непрерывным при переходе через σ , значит, на σ непрерывен и тензор $\hat{\varepsilon}(u(Q))$, а вследствие непрерывности на σ вектора $u'(Q)$ вектор

$$u(Q) = v(Q) - u'(Q)$$

остается непрерывным повсюду, исключая барьер σ , на котором он испытывает тот же разрыв непрерывности, что и $v(Q)$, так что по (5.2.4)

$$u^+(Q_{\sigma}) - u^-(Q_{\sigma}) = c + b \times r_{c\sigma}. \quad (5.2.7)$$

Здесь в согласии с (2.4.6) гл. II индексами «+» и «-» обозначены значения u «под» и «над» барьером (рис. 9).

Вектор $u(Q)$, представимый по (5.2.5) в виде

$$u(Q) = -c \cdot \iint_{\sigma} \hat{\Phi}(M_{\sigma}, Q) d\omega_{M_{\sigma}} - \\ - b \cdot \iint_{\sigma} r_{M_{\sigma}} \times \hat{\Phi}(M_{\sigma}, Q) d\omega_{M_{\sigma}}, \quad (5.2.8)$$

является вектором перемещения точек упругой среды, удовлетворяющим однородным уравнениям теории упругости в перемещениях. Вычисляемые по нему тензоры деформации $\hat{\varepsilon}(u(Q))$ и напряжений $\hat{T}(u(Q))$ повсюду непрерывны; оставаясь непрерывным всюду, кроме барьера σ , этот вектор на барьере испытывает разрыв непрерывности требуемого вида (5.2.7).

По тензору $\hat{T}(u(Q))$ определяется распределение поверхностных сил $n \cdot \hat{T}(u(Q))$ на поверхности двусвязного объема O ; эта система сил статически эквивалентна нулю, так как определяемое по вектору $u(Q)$ напряженное состояние является равновесным.

Определим теперь в объеме V_i напряженное состояние \hat{T}^* , создаваемое поверхностными силами $-n \cdot \hat{T}(u(Q))$ при отсутствии дисторсии. Такое напряженное состояние по теореме п. 4.6 существует и определяется единственным образом, так как искомым в нем вектор перемещения u^* непрерывен и однозначен, а система поверхностных сил $-n \cdot \hat{T}(u(Q))$ статически эквивалентна нулю. Наложение напряженных состояний $\hat{T}(u(Q))$ и \hat{T}^* представляет напряженное состояние в двусвязном объеме, определяемое только дисторсией, так как внешние силы в нем отсутствуют.

5.3. Теорема взаимности. Применим формулу Клапейрона (3.3.3) гл. III к односвязному упругому телу, получающемуся из двусвязного с помощью барьера

$$2a = \iiint_V \rho K \cdot u \, d\tau + \iint_O F \cdot u \, d\omega + \\ + \iint_{\sigma^+} n^+ \cdot \hat{T}^+ \cdot u^+ \, d\omega + \iint_{\sigma^-} n^- \cdot \hat{T}^- \cdot u^- \, d\omega, \quad (5.3.1)$$

где $n^+ = -n^-$ — единичные векторы нормали к барьеру, направленные вовне рассеченного барьером тела; на барьере $\hat{T}^+ = -\hat{T}^- = \hat{T}$. Сославшись на (5.2.7) и считая, что внешние силы отсутствуют, получим

$$2a = \iint_O n^+ \cdot \hat{T} \cdot (c + b \times r) \, d\omega = Q \cdot c + m^0 \cdot b. \quad (5.3.2)$$

Здесь через \mathbf{Q} и \mathbf{m}^0 обозначены главный вектор и главный момент относительно выбранного начала координат создаваемых дисторсий напряжений в выбранном барьере:

$$\mathbf{Q} = \int_{\sigma} \mathbf{n}^+ \cdot \hat{\mathbf{T}} d\sigma, \quad \mathbf{m}^0 = \int_{\sigma} \mathbf{r} \times (\mathbf{n}^+ \cdot \hat{\mathbf{T}}) d\sigma. \quad (5.3.3)$$

Рассматривая два состояния упругого двусвязного объема — первое, создаваемое действием массовых и поверхностных сил $\rho \mathbf{K}'$, \mathbf{F}' и при наличии дисторсий \mathbf{c}' , \mathbf{b}' , и второе, в котором эти величины обозначены $\rho \mathbf{K}''$, \mathbf{F}'' , \mathbf{c}'' , \mathbf{b}'' , по теореме взаимности имеем

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \rho \mathbf{K}' \cdot \mathbf{u}'' d\tau + \int \int_O \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}'' d\sigma + \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{m}^{0'} \cdot \mathbf{b}'' = \\ = \int \int \int_V \rho \mathbf{K}'' \cdot \mathbf{u}' d\tau + \int \int_O \mathbf{F}'' \cdot \mathbf{u}' d\sigma + \mathbf{Q}'' \cdot \mathbf{c}' + \mathbf{m}^{0''} \cdot \mathbf{b}'. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

В частности, когда в первом отсутствуют внешние силы, а во втором — дисторсия, приходим к соотношению (Колонетти, 1912)

$$\int \int \int_V \rho \mathbf{K}'' \cdot \mathbf{u}' d\tau + \int \int_O \mathbf{F}'' \cdot \mathbf{u}' d\sigma + \mathbf{Q}'' \cdot \mathbf{c}' + \mathbf{m}^{0''} \cdot \mathbf{b}' = 0. \quad (5.3.5)$$

При отсутствии внешних сил в обоих состояниях

$$\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{m}^{0'} \cdot \mathbf{b}'' = \mathbf{Q}'' \cdot \mathbf{c}' + \mathbf{m}^{0''} \cdot \mathbf{b}'. \quad (5.3.6)$$

В частности, считая первым состоянием поступательную дисторсию \mathbf{c} , а вторым — поворотную \mathbf{b} , имеем $\mathbf{c}' = \mathbf{c}$, $\mathbf{b}' = 0$, $\mathbf{c}'' = 0$, $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}$ и по (5.3.6)

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}_*^0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{Q}_*, \quad (5.3.7)$$

где \mathbf{Q}_* , \mathbf{m}_*^0 — главный вектор и главный момент напряжений, создаваемых соответственно поворотной (\mathbf{b}) и поступательной дисторсией (\mathbf{c}).

5.4. Потенциальная энергия дисторсии. В линейно-упругом теле главный вектор \mathbf{Q} и главный момент \mathbf{m}^0 напряжений на барьере, создаваемых дисторсией, представляют линейные векторные функции определяющих дисторсию векторов \mathbf{c} , \mathbf{b} :

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{c} + \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{m}^0 = \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{c} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{b}. \quad (5.4.1)$$

Здесь $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{N}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ — тензоры второго ранга; слагаемые $\hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{b}$ и $\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{c}$, очевидно, представляют векторы, обозначенные в (5.3.7) соответственно \mathbf{Q}_* и \mathbf{m}_*^0 ; поэтому

$$\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{c}, \quad (5.4.2)$$

так что тензор $\hat{\mathbf{N}}$ транспонирован с $\hat{\mathbf{M}}$:

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{M}}^*. \quad (5.4.3)$$

Выражение потенциальной энергии дисторсии (5.3.2) теперь записывается в виде

$$a = \frac{1}{2} (c \cdot \hat{C} \cdot c + 2c \cdot \hat{M} \cdot b + b \cdot \hat{B} \cdot b). \quad (5.4.4)$$

В общем случае оно содержит 21 постоянную, так как тензоры \hat{C} , \hat{B} , входящие в (5.4.1) симметричны, что также легко следует из теоремы взаимности. Действительно, рассматривая два состояния, например, поступательной дисторсии на одном и том же барьере, имеем

$$\begin{aligned} c' &= c_1 i_1, & b' &= 0, & Q' &= \hat{C} \cdot c' = c_1 \hat{C} \cdot i_1, \\ c'' &= c_2 i_2, & b'' &= 0, & Q'' &= \hat{C} \cdot c'' = c_2 \hat{C} \cdot i_2 \end{aligned}$$

и по (5.3.6)

$$i_1 \cdot \hat{C} \cdot i_2 = i_2 \cdot \hat{C} \cdot i_1.$$

что и требуется. Заметим, что величина потенциальной энергии дисторсии зависит, вообще говоря, от выбора барьера — места осуществления дисторсии.

5.5. Случай тела вращения. За ось вращения принимается ось Ox_3 , барьером служит плоская область σ пересечения тела меридиональной полуплоскостью; через σ_0 назовем барьер, образуемый плоскостью Ox_3x_1 . В рассмотрение вводится триэдр единичных векторов цилиндрической системы координат e_r, e_φ, k (см. п. III. 7). Вследствие симметрии напряженное состояние, создаваемое на барьере σ_0 дисторсией c^0, b^0 , такое же, как создаваемое на барьере дисторсией с векторами c, b , ориентированными в осях e_r, e_φ, k так же, как c^0, b^0 — в осях e_r^0, e_φ^0, k . Поэтому, введя в рассмотрение тензоры поворота [см. (I. 8.1)]

$$\hat{A} = e_r^0 e_r + e_\varphi^0 e_\varphi + k k, \quad \hat{A}^* = e_r e_r^0 + e_\varphi e_\varphi^0 + k k, \quad (5.5.1)$$

имеем

$$c = \hat{A}^* \cdot c^0 = c^0 \cdot \hat{A}, \quad b = \hat{A}^* \cdot b^0 = b^0 \cdot \hat{A}. \quad (5.5.2)$$

Эти значения c^0, b^0 внесем в выражение потенциальной энергии дисторсий, также, конечно, сохраняющей свою величину в двух рассматриваемых состояниях дисторсии. По (5.4.4) имеем

$$\begin{aligned} 2a &= c^0 \cdot \hat{C}^0 \cdot c^0 + 2c^0 \cdot \hat{M}^0 \cdot b^0 + b^0 \cdot \hat{B}^0 \cdot b^0 = c \cdot \hat{C} \cdot c + 2c \cdot \hat{M} \cdot b + b \cdot \hat{B} \cdot b = \\ &= c^0 \cdot \hat{A} \cdot \hat{C} \cdot \hat{A}^* \cdot c^0 + 2c^0 \cdot \hat{A} \cdot \hat{M} \cdot \hat{A}^* \cdot b^0 + b^0 \cdot \hat{A} \cdot \hat{B} \cdot \hat{A}^* \cdot b^0, \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

так что

$$\hat{C}^0 = \hat{A} \cdot \hat{C} \cdot \hat{A}^*, \quad \hat{M}^0 = \hat{A} \cdot \hat{M} \cdot \hat{A}^*, \quad \hat{B}^0 = \hat{A} \cdot \hat{B} \cdot \hat{A}^*. \quad (5.5.4)$$

Тензоры \hat{C} , \hat{M} , \hat{B} постоянные (не зависят от положения барьера, то есть от угла φ), что следует из второго выражения потенциальной энергии (5.5.3).

По (5.5.1) и (III. 7.3) имеем

$$\frac{d\hat{A}}{d\varphi} = e_r^0 e_\varphi - e_\varphi^0 e_r, \quad \frac{d\hat{A}^*}{d\varphi} = e_\varphi e_r^0 - e_r e_\varphi^0$$

и, чтобы не повторять одного и того же вычисления, вычислим производную по φ от тензора $\hat{A} \cdot \hat{P} \cdot \hat{A}^*$, где \hat{P} — постоянный тензор второго ранга:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \hat{A} \cdot \hat{P} \cdot \hat{A}^* &= (e_r^0 e_\varphi - e_\varphi^0 e_r) \cdot \hat{P} \cdot \hat{A}^* + \hat{A} \cdot \hat{P} \cdot (e_\varphi e_r^0 - e_r e_\varphi^0) = \\ &= (e_r^0 e_r^0 - e_\varphi^0 e_\varphi^0) (P_{21} + P_{12}) + (e_\varphi^0 e_r^0 + e_r^0 e_\varphi^0) (P_{22} - P_{11}) + e_r^0 k P_{23} + \\ &\quad + k e_r^0 P_{32} - e_\varphi^0 k P_{13} - k e_\varphi^0 P_{31}. \end{aligned}$$

Условия обращения в нуль этого тензора поэтому записываются в виде

$$P_{11} = P_{22}, \quad P_{21} = -P_{12}, \quad P_{23} = P_{32} = P_{13} = P_{31} = 0,$$

так что

$$P = P_{11}(e_r e_r + e_\varphi e_\varphi) + P_{33} k k + P_{12}(e_r e_\varphi - e_\varphi e_r),$$

а если тензор \hat{P} симметричен, $\hat{P} = \hat{P}^*$, то и $P_{12} = 0$. Итак,

$$\left. \begin{aligned} \hat{C} &= M_{11}(e_r e_r + e_\varphi e_\varphi) + C_{33} k k, \quad \hat{B} = B_{11}(e_r e_r + e_\varphi e_\varphi) + B_{33} k k, \\ \hat{M} &= M_{11}(e_r e_r + e_\varphi e_\varphi) + M_{33} k k + M_{12}(e_r e_\varphi - e_\varphi e_r) \end{aligned} \right\} \quad (5.5.5)$$

и выражение потенциальной энергии дисторсий (5.4.4) на этом этапе представляется в виде

$$\begin{aligned} 2\alpha &= C_{11}(c_1^2 + c_2^2) + C_{33}c_3^2 + 2M_{11}(b_1c_1 + b_2c_2) + 2M_{12}(c_1b_2 - c_2b_1) + \\ &\quad + 2M_{33}c_3b_3 + B_{11}(b_1^2 + b_2^2) + B_{33}b_3^2, \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

но возможно его дальнейшее упрощение, основанное на сохранении симметрии при поворотной дисторсии b_3 и поступательной c_2 .

Пусть отличны от нуля только b_3 , c_3 . Тогда по (5.5.6)

$$2\alpha = C_{33}c_3^2 + 2M_{33}b_3c_3 + B_{33}b_3^2,$$

и это выражение не должно менять величины при изменении знака относительного поворота b_3 спаиваемых концов вокруг оси симметрии; поэтому $M_{33} = 0$. Такое же рассуждение в применении к случаю $c_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ дает $M_{11} = 0$, так как и изменение знака поступательной дисторсии c_2 , перпендикулярной

барьеру, также не влияет на величину потенциальной энергии дисторсий. Итак,

$$M_{33} = 0, \quad M_{11} = 0. \quad (5.5.7)$$

Пусть теперь только $c_2 \neq 0$. В напряженном состоянии, создаваемом такой дисторсией, вследствие симметрии отсутствуют касательные напряжения $t_{12} = \tau_{r\varphi}$, $t_{23} = t_{\varphi z}$, так что по (5.3.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{e}_\varphi \int_\sigma \int t_{22} do = Q_2 \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{m}^O = \int_\sigma \int (r \mathbf{e}_r + x_3 \mathbf{k}) \times \mathbf{e}_\varphi t_{22} do = \\ &= \mathbf{k} \int_\sigma \int r t_{22} do - \mathbf{e}_r \int_\sigma \int x_3 t_{22} do = k m_3^O - \mathbf{e}_r m_1^O, \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

и вместе с тем, обращаясь к (5.4.1), (5.5.5) и (5.5.6), имеем

$$\mathbf{Q} = C_{11} c_2 \mathbf{e}_\varphi = Q_2 \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{m}^O = M_{12} (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi) \cdot \mathbf{c} = -M_{12} c_2 \mathbf{e}_r, \quad a = \frac{1}{2} C_{11} c_2^2, \quad (5.5.9)$$

откуда следует, что $Q_2 \neq 0$, а момент \mathbf{m}^O имеет направление \mathbf{e}_r ; $m_2^O = m_3^O = 0$.

Перенесем центр моментов O в точку O_* на оси Ox_3 ; тогда по (5.5.8).

$$x_3 = x_3^* + h, \quad m_1^O = m_1^{O_*} + h Q_2,$$

и можно выбрать h так, чтобы обратить $m_1^{O_*}$ в нуль:

$$h = \frac{m_1^O}{Q_2}.$$

Эту точку O_* на оси x_3 Вольтерра называет центральной; при наличии в теле плоскости симметрии, перпендикулярной оси вращения, центральной будет точка пересечения этой оси с плоскостью симметрии. Выбрав ее за центр моментов, имеем теперь по (5.5.8)

$$\mathbf{m}^{O_*} = -M_{12} c_2 \mathbf{e}_r = 0, \quad M_{12} = 0, \quad (5.5.10)$$

и по (5.5.7) тензор \hat{M} оказывается нулевым. Выражение (5.5.6) потенциальной энергии дисторсии приводится к виду

$$a = \frac{1}{2} [C_{11} (c_1^2 + c_2^2) + C_{33} c_3^2 + B_{11} (b_1^2 + b_2^2) + B_{33} b_3^2]. \quad (5.5.11)$$

В него входит только четыре постоянных; вместе с тем по (5.4.1) главный вектор и главный момент относительно центральной точки напряжений в меридиональном сечении тела оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q} &= \hat{C} \cdot \mathbf{c} = C_{11} (c_1 \mathbf{e}_r + c_2 \mathbf{e}_\varphi) + C_{33} c_3 \mathbf{k}, \\ \mathbf{m}^{O_*} &= \hat{B} \cdot \mathbf{b} = B_{11} (b_1 \mathbf{e}_r + b_2 \mathbf{e}_\varphi) + B_{33} b_3 \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (5.5.12)$$

— в упругом двусвязном теле, обладающем симметрией вращения, каждой элементарной дисторсии сопоставляется ей соответствующее усилие при условии, что за центр моментов принята центральная точка. Напряжения, создаваемые поступательной дисторсией, статически эквивалентны равнодействующей с линией действия, проходящей через центральную точку, а создаваемые поворотной дисторсией — паре сил.

5.6. Краевая задача для двусвязного тела вращения. Вектор, задаваемый равенством

$$\mathbf{v}_* = \frac{1}{2\pi} (\mathbf{e} + \mathbf{b} \times \mathbf{R}) \varphi \left(\varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \mathbf{R} = e_r \mathbf{r} + k x_3 = i_s x_s \right), \quad (5.6.1)$$

обладает требуемой для вектора перемещения многозначностью, а вычисляемая по нему деформация однозначна и непрерывна в области, из которой исключена ось x_3 . Действительно, градиент этого вектора и транспонированный с ним тензор равны

$$\left. \begin{aligned} \nabla \mathbf{v}_* &= \frac{1}{2\pi} \left[-\hat{E} \times \mathbf{b} \varphi + \frac{1}{r} e_\varphi (\mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{R}) \right], \\ (\nabla \mathbf{v}_*)^* &= \frac{1}{2\pi} \left[\mathbf{b} \times \hat{E} \varphi + \frac{1}{r} (\mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{R}) e_\varphi \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.6.2)$$

и, далее,

$$\text{div } \mathbf{v}_* = \frac{1}{4\pi r} (e_\varphi \mathbf{c} + c e_\varphi + e_\varphi \mathbf{b} \times \mathbf{R} + \mathbf{b} \times \mathbf{R} e_\varphi), \quad (5.6.3)$$

так как

$$\mathbf{b} \times \hat{E} - \hat{E} \times \mathbf{b} = e_{kst} (i_t i_s + i_s i_t) b_k = 0. \quad (5.6.4)$$

Вектор \mathbf{v}_* не удовлетворяет однородным уравнениям равновесия в перемещениях; поэтому введя корректирующий вектор \mathbf{v} , однозначный и непрерывный в области, из которой исключена ось Ox_3 , следует потребовать, чтобы вектор

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_* + \mathbf{v} \quad (5.6.5)$$

представлял частное решение этих уравнений. Непосредственным вычислением проверяется, что таким решением может служить вектор

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi} \left\{ (\mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{R}) \varphi + \left[\mathbf{k} \times \mathbf{c} + (\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{R} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} b_3 r e_r \right] \ln r \right\}. \quad (5.6.6)$$

Тензор напряжений, вычисляемый по этому вектору, оказывается равным

$$\begin{aligned} \hat{T}(u) = \frac{\mu}{2\pi} \left\{ b_3 \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} + \frac{\nu}{1-\nu} (1 + 2 \ln r) \right] \hat{E} + \right. \\ + \frac{1}{r} [e_\varphi c + c e_\varphi + e_\varphi b \times R + b \times R e_\varphi + e_r k \times c + k \times c e_r + \\ + e_r (k \times b) \times R + (k \times b) \times R e_r] + \\ \left. + \frac{1-2\nu}{1-\nu} b_3 [e_r e_r (1 + \ln r) + e_\varphi e_\varphi \ln r] \right\}. \quad (5.6.7) \end{aligned}$$

Краевая задача теории дисторсий Вольтерра сводится к разысканию из однородных уравнений равновесия вектора перемещения U по краевому условию на поверхности O двусвязного объема

$$n \cdot \hat{T}(U) = -n \cdot \hat{T}(u). \quad (5.6.8)$$

Громоздкость этих формул объясняется их общностью — рассмотрен общий случай дисторсии. Для поворотной дисторсии вокруг оси симметрии, когда только $b_3 \neq 0$, имеем

$$u = \frac{1}{2\pi} b_3 \left(r \varphi e_\varphi + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} r \ln r e_r \right), \quad (5.6.9)$$

причем возникают только нормальные напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\mu}{2\pi} b_3 \left(\frac{1}{1-2\nu} + \frac{1}{1-\nu} \ln r \right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{\mu}{2\pi} b_3 \left(\frac{2-3\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)} + \frac{1}{1-\nu} \ln r \right), \\ \sigma_z &= \frac{\mu}{2\pi} b_3 \left(\frac{3\nu-4\nu^2}{(1-\nu)(1-2\nu)} + \frac{2\nu}{1-\nu} \ln r \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.6.10)$$

Простые формулы получаются также для поступательной дисторсии c_2 :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{c_2}{2\pi} [(e_r \sin \varphi + e_\varphi \cos \varphi) \varphi - (e_r \cos \varphi - e_\varphi \sin \varphi) \ln r], \\ \sigma_r &= -\frac{\mu}{\pi} c_2 \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\mu}{\pi} c_2 \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{\mu}{\pi} c_2 \frac{\sin \varphi}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.11)$$

Решение этих задач для полого цилиндра приведено в п. 7.3 гл. V.

Ч А С Ь III

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г Л А В А V

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Неограниченная упругая среда

1.1. Силовые точечные особенности. Перемещение точки «наблюдения» M в неограниченной упругой среде под действием сосредоточенной в «точке истока» Q силы P определяется с помощью тензора Кельвина — Сомильяна формулой (3.5.9) гл. IV:

$$u(M, Q) = \hat{U}(M, Q) \cdot P. \quad (1.1.1)$$

Здесь

$$\hat{U} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R} \left[(3-4\nu)\hat{E} + \frac{RR}{R^2} \right], \quad R = r_M - r_Q, \quad R = |r_M - r_Q|. \quad (1.1.2)$$

Поместив точку приложения в близкую к Q точку Q' :

$$r'_Q = r_Q + \rho, \quad (1.1.3)$$

и проводя вычисление с учетом слагаемых первой степени относительно ρ , имеем

$$\begin{aligned} R' &= r_M - r_{Q'} = R - \rho, \\ R' &= |R - \rho| = (R^2 - 2R \cdot \rho + \rho^2)^{1/2} \approx R \left(1 - \frac{R \cdot \rho}{R^2} \right). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

При таком смещении точки истока тензор Кельвина — Сомильяна и вектор перемещения представляются в виде

$$\begin{aligned} \hat{U}(M, Q') &= \hat{U}(M, Q) + \\ &+ \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R^3} \left[(3-4\nu)\hat{E}R \cdot \rho - R\rho - \rho R + 3\frac{RR}{R^2}R \cdot \rho \right], \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

$$\begin{aligned} u(M, Q') &= u(M, Q) + \\ &+ \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)R^3} \left[(3-4\nu)R \cdot \rho P - R\rho \cdot P - \rho R \cdot P + 3R \frac{R \cdot \rho R \cdot P}{R^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

В этих выражениях диада $\rho \mathbf{P}$ представляется ее разбиением на симметричную и кососимметричную части, причем в первой из них выделяются девиатор и шаровой тензор:

$$\rho \mathbf{P} = \hat{\rho} + \hat{\Omega}, \quad \hat{\rho} = \frac{1}{2} (\rho \mathbf{P} + \mathbf{P} \rho), \quad \hat{\Omega} = \frac{1}{2} (\rho \mathbf{P} - \mathbf{P} \rho), \quad (1.1.7)$$

$$\hat{\rho} = \text{Dev } \hat{\rho} + \frac{1}{3} \hat{E} I_1(\hat{\rho}) = \text{Dev } \hat{\rho} + \frac{1}{3} \rho \cdot \mathbf{P} \hat{E}. \quad (1.1.8)$$

Теперь, учитывая также соотношения

$$\mathbf{R} \cdot \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{R} \cdot \rho \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} + \frac{1}{3} R^2 \rho \cdot \mathbf{P},$$

$$\mathbf{R} \cdot \hat{\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{R} \cdot \rho \mathbf{P} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \rho) = \frac{1}{2} (\rho \times \mathbf{P}) \times \mathbf{R} = \frac{1}{2} m^Q(\mathbf{P}) \times \mathbf{R},$$

где, как всегда $m^Q(\mathbf{P})$ — момент силы \mathbf{P} относительно точки Q , можно представить формулу (1.1.6) в виде

$$u(M, Q) = u(M, Q) + \frac{1}{8\pi\mu R^3} m^Q(\mathbf{P}) \times \mathbf{R} + \frac{1-2\nu}{24\pi\mu(1-\nu)} \rho \cdot \mathbf{P} \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \\ + \frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[\mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} + \frac{3}{2(1-2\nu)} R^2 \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} \right]. \quad (1.1.9)$$

Полагая $\rho \rightarrow 0$, но $\mathbf{P} \rightarrow \infty$ так, что компоненты диады $\rho \mathbf{P}$ сохраняют конечное значение, назовем величины $\hat{\rho}$, $m^Q(\mathbf{P})$, $\rho \cdot \mathbf{P}$, локализуемые в результате предельного перехода в точке Q , соответственно силовым тензором, сосредоточенным моментом, интенсивностью центра расширения. Введение этих «силовых точечных особенностей» позволяет приписать самостоятельное истолкование отдельным слагаемым формулы (1.1.9):

а) перемещение, вызванное действием силы \mathbf{P} в точке Q :

$$u_1(M, Q) = \hat{U}(M, Q) \cdot \mathbf{P}; \quad (1.1.10)$$

б) перемещение от сосредоточенного в точке Q момента:

$$u_2(M, Q) = \frac{1}{8\pi\mu R^3} m^Q(\mathbf{P}) \times \mathbf{R}; \quad (1.1.11)$$

в) перемещение от центра расширения в точке Q :

$$u_3(M, Q) = \frac{1-2\nu}{24\pi\mu(1-\nu)} \rho \cdot \mathbf{P} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = - \frac{1-2\nu}{24\pi\mu(1-\nu)} \rho \cdot \mathbf{P} \nabla \frac{1}{R}; \quad (1.1.12)$$

г) перемещение от силового тензора:

$$u_4(M, Q) = \frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[\mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} + \frac{3}{2(1-2\nu)} R^2 \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} \right]. \quad (1.1.13)$$

Перемещения, создаваемые сосредоточенной силой, убывают при удалении от точки истока, как R^{-1} , а от прочих точечных особенностей, как R^{-2} .

1.2. Система сил, распределенных в малом объеме. Формулы Лауричелла. Рассматривается действие на среду системы сил P_1, P_2, \dots, P_n , приложенных в окрестности точки Q в точках Q_1, Q_2, \dots, Q_n с вектор-радиусами $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, имеющими начало в точке Q . Тогда перемещение точки M будет геометрической суммой перемещений (1.1.9), создаваемых каждой силой по отдельности. Вводятся в рассмотрение: а) главный вектор P системы сил

$$P = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (1.2.1)$$

б) ее главный момент относительно точки Q

$$m^Q = \sum_{i=1}^n m^Q(P_i), \quad (1.2.2)$$

в) тензор системы сил

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^n \hat{p}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\rho_i P_i + P_i \rho_i) \quad (1.2.3)$$

г) и его первый инвариант

$$I_1(\hat{p}) = \sum_{i=1}^n I_1(\hat{p}_i) = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot P_i. \quad (1.2.4)$$

При непрерывном распределении сил по линии, поверхности, объему эти суммы заменяются соответствующими интегралами.

Теперь вектор перемещения в точке M представляется в виде

$$u(M, Q) = \hat{U}(M, Q) \cdot P + \frac{1}{8\pi\mu R^3} m^Q \times R + \frac{1-2\nu}{24\pi\mu(1-\nu)R^3} I_1(\hat{p}) R + \\ + \frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)R^3} \left[R \cdot \text{Dev } \hat{p} + \frac{3}{2(1-2\nu)R^2} RR \cdot \text{Dev } \hat{p} \cdot R \right]. \quad (1.2.5)$$

Рассмотрим случай силового диполя — так называется система двух равных, противоположно направленных сил с общей линией действия; направление этой прямой зададим единичным вектором e , тогда

$$P_1 = -eP, \quad P_2 = eP, \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = e\rho,$$

причем произведение $\rho P = \sigma$ назовем интенсивностью диполя, а тензор σee — дипольным моментом. В формулах (1.2.1)–(1.2.4) теперь

$$P = 0, \quad m^Q = 0, \quad \hat{p} = \sigma ee, \quad I_1(\hat{p}) = \sigma, \quad \text{Dev } \hat{p} = \left(ee - \frac{1}{3} \hat{E} \right) \sigma. \quad (1.2.6)$$

и перемещение в точке M от диполя в точке Q по (1.2.5) представляется в виде

$$u(M, Q) = \frac{\sigma}{8\pi\mu(1-\nu)R^3} \left\{ \frac{1}{2} \left[3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{e})^2}{R^2} - 1 \right] \mathbf{R} + (1-2\nu) \mathbf{e} \mathbf{R} \cdot \mathbf{e} \right\}. \quad (1.2.7)$$

Силовой тензор, определяемый тремя диполями одинаковой интенсивности σ по трем взаимно перпендикулярным направлениям, является шаровым:

$$\hat{p} = \sigma(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) = \sigma \hat{E}, \quad I_1(p) = 3\sigma = q, \quad \text{Dev } \hat{p} = 0.$$

Такая особенность называется центром расширения, q — его интенсивность; ей соответствующее перемещение по (1.2.5) равно

$$u(M, Q) = \frac{(1-2\nu)q}{24\pi\mu(1-\nu)R^3} \mathbf{R} = -\frac{1-2\nu}{24\pi\mu(1-\nu)} q \nabla \frac{1}{R}. \quad (1.2.8)$$

Без труда находится напряженное состояние, создаваемое центром расширения; имеем

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= -\frac{(1-2\nu)q}{24\pi\mu(1-\nu)} \nabla \nabla \frac{1}{R}, \quad \hat{\vartheta} = -\frac{(1-2\nu)q}{24\pi\mu(1-\nu)} \nabla^2 \frac{1}{R} = 0, \\ \hat{T} &= -\frac{1-2\nu}{12\pi(1-\nu)} q \nabla \nabla \frac{1}{R} = \frac{1-2\nu}{12\pi(1-\nu)} \frac{q}{R^3} \left(\hat{E} - 3 \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.2.9)$$

Компоненты тензора напряжения в сферической системе координат [см. (1.9.4) гл. IV] можно записать в виде

$$\sigma_R = -\frac{1-2\nu}{6\pi(1-\nu)} \frac{q}{R^3}, \quad \sigma_\vartheta = \sigma_\lambda = \frac{1-2\nu}{12\pi(1-\nu)} \frac{q}{R^3}, \quad \tau_{R\vartheta} = \tau_{\vartheta\lambda} = \tau_{\lambda R} = 0. \quad (1.2.10)$$

Такое напряженное состояние реализуется в упругой среде, снабженной полостью радиуса R_0 , по поверхности которой распределено нормальное давление интенсивности

$$p = \frac{1-2\nu}{6\pi(1-\nu)} \frac{q}{R_0^3}.$$

В этом радиально-симметричном напряженном состоянии перемещения и напряжения равны

$$u_R = \frac{pR_0^3}{4\mu R^2}, \quad u_\vartheta = u_\lambda = 0, \quad \sigma_R = -p \frac{R_0^3}{R^3}, \quad \sigma_\vartheta = \sigma_\lambda = p \frac{R_0^3}{2R^3}. \quad (1.2.11)$$

Перемещение от системы трех ориентированных по взаимно ортогональным направлениям диполей, с суммой интенсивностей, равной нулю, определяется только четвертым слагаемым формулы (1.2.5), так как в этом предположении силовой тензор является девиатором.

Перемещение, создаваемое парой, не равно перемещению от ее момента, так как второе слагаемое формулы (1.2.5) пред-

ставляет перемещение от сочетания пар с равным нулю силовым тензором. Такая особенность называется центром вращения; ее можно, например, представить совокупностью четырех равных по величине сил, расположенных в одной плоскости и образующих пары одного направления вращения:

$$\begin{aligned} P_1 &= -e_2 P, & P_2 &= e_2 P, & \rho_1 &= 0, & \rho_2 &= h e_1, \\ P_3 &= e_1 P, & P_4 &= -e_1 P, & \rho_3 &= 0, & \rho_4 &= h e_2. \end{aligned}$$

Для такой системы сил

$$P = 0, \quad m^Q = \rho_2 \times P_2 + \rho_4 \times P_4 = 2hPe_1 \times e_2 = 2hPe_3 = me_3, \quad \dot{p} = 0,$$

причем m — алгебраическая сумма моментов пар. Перемещение, определяемое центром вращения, по (1.2.5) равно

$$u(M, Q) = \frac{m}{8\pi\mu R^3} e_3 \times R = \frac{R_0^3}{R^3} \theta \times R = -R_0^3 \theta \times \nabla \frac{1}{R}; \quad \theta = \frac{m}{8\pi\mu R_0^3} e_3. \quad (1.2.12)$$

Это распределение перемещений создается в упругой среде, если впаинному в нее твердому шару радиуса R_0 сообщить поворот, задаваемый вектором θ . Таково решение наиболее простой из эластостатических задач Робена (п. 4.7 гл. IV). Вектор напряжения на площадке с нормалью n здесь оказывается равным

$$n \cdot \hat{T} = 3\mu \frac{R_0^3}{R^3} (\theta \times n - 2\theta \times e_R n \cdot e_R + n \times e_R \theta \cdot e_R) \quad (1.2.13)$$

и по поверхности сферы $R = R_0$ с наружной нормалью $n = e_R$

$$(n \cdot \hat{T})_{R=R_0} = 3\mu n \times \theta. \quad (1.2.14)$$

Главный вектор этой системы сил равен нулю, а ее главный момент будет

$$\begin{aligned} m^Q &= 3\mu \int \int R \times (n \times \theta) d\sigma = 3\mu \int \int (nR \cdot \theta - \theta R) d\sigma = \\ &= 3\mu \left(\int \int \int \nabla R \cdot \theta d\tau - 4\pi R_0^3 \theta \right) = -8\pi\mu R_0^3 \theta = -me_3 \quad (1.2.15) \end{aligned}$$

так как $\nabla R \cdot \theta = \theta$. К шару должен быть приложен момент противоположного знака (он передается среде через поверхность полости). Пришли к ожидаемому результату (1.2.12).

Приведенными примерами показана возможность построения силовых систем (сила, центр вращения, центр расширения, силовые диполи), соответствующих каждой из введенных особенностей по отдельности. Этим доказано, что каждая из четырех групп слагаемых формулы (1.2.5) представляет некоторое частное решение уравнений теории упругости, непрерывное

вместе со своими производными в любой области с исключенной точкой, в которой сосредоточена особенность.

Понятие особенностей, определяемых силовым тензором, было использовано Лауричелла (1895) для представления компонент тензора деформации упругого тела через внешние силы. Вывод формул Лауричелла основан на применении теоремы взаимности Бетти к двум состояниям: 1) первое состояние создается поверхностными силами F (при отсутствии объемных), причем через u , \hat{T} обозначаются вектор перемещения и тензор напряжения в этом состоянии; 2) второе состояние u^* , \hat{T}^* задается: а) действием в точке Q силового тензора, определяющего вектор перемещения u_1^* и тензор напряжения \hat{T}_1^* , и б) наложением на это действие напряженного состояния u_2^* , \hat{T}_2^* , снимающего нагружение поверхности O тела. Вектор перемещения в этом состоянии и тензор напряжения равны

$$u^* = u_1^* + u_2^*, \quad \hat{T}^* = \hat{T}_1^* + \hat{T}_2^*, \quad (1.2.16)$$

так что по условию

$$n \cdot \hat{T}^*|_O = 0, \quad (1.2.17)$$

чем определяются конечные и непрерывные в объеме тела функции u_2^* , \hat{T}_2^* .

Теорема взаимности применяется к объему, ограниченному извне поверхностью O тела, а изнутри сферой Σ с центром в Q ; через $n = R^{-1}R$ обозначается единичный вектор нормали, внешней к сфере (внутренней к рассматриваемому объему). Тогда, сославшись на (1.2.17), имеем

$$\begin{aligned} \int_O F \cdot u^* do - \int_\Sigma n \cdot \hat{T} \cdot u_1^* do - \int_\Sigma n \cdot \hat{T} \cdot u_2^* do = \\ = - \int_\Sigma n \cdot \hat{T}_1^* \cdot u do - \int_\Sigma n \cdot \hat{T}_2^* \cdot u do, \end{aligned}$$

и применение теоремы взаимности приводит к соотношению

$$\int_O F \cdot u^* do = \int_\Sigma n \cdot (\hat{T} \cdot u_1^* - \hat{T}_1^* \cdot u) do. \quad (1.2.18)$$

Поскольку [см. (1.2.5)] перемещения и напряжения, создаваемые особенностью типа силового тензора, в точке Q становятся бесконечными соответственно как R^{-2} и R^{-3} , достаточно, как станет ясным из приведенного ниже вычисления, принять, что в объеме v сферы

$$\hat{T} = \hat{T}_Q, \quad u = u_Q + R \cdot (\nabla u)_Q, \quad (1.2.19)$$

так как слагаемые более высокой степени относительно R отпадают в предельном переходе $R \rightarrow 0$.

Обратившись к (1.2.5) и переходя от поверхностных интегралов к объемным, имеем

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}_1^* d\sigma = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)R^3} \left[(1-2\nu)\sigma \int_{\mathcal{V}} \int \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} d\tau + \right. \\ \left. + (1-2\nu) \int_{\mathcal{V}} \int \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} d\tau + \frac{3}{2R^2} \int_{\mathcal{V}} \int \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} d\tau \right],$$

где $3\sigma = I_1(\hat{\rho})$. Сославшись на (II.3.10) и учитывая, что $\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} = 0$, имеем

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \cdot \text{Dev } \hat{\rho}, \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} = \\ = \hat{\mathbf{T}} \cdot \cdot (\hat{\mathbf{E}} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} + 2\mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \mathbf{R})$$

и, далее,

$$\int_{\mathcal{V}} \int \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} d\tau = \frac{4}{3} \pi R^3 I_1(\hat{\mathbf{T}}), \\ \int_{\mathcal{V}} \int \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} d\tau = \frac{4}{3} \pi R^3 \hat{\mathbf{T}} \cdot \cdot \text{Dev } \hat{\rho}.$$

Нетрудно также видеть, что

$$\frac{3}{R^5} \int_{\mathcal{V}} \int \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} d\tau = \frac{4\pi}{5} I_1(\text{Dev } \hat{\rho}) = 0, \\ \frac{3}{R^5} \int_{\mathcal{V}} \int \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \mathbf{R} d\tau = \frac{4\pi}{5} \text{Dev } \hat{\rho}$$

и поэтому

$$\frac{3}{2R^5} \int_{\mathcal{V}} \int \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} d\tau = \frac{4\pi}{5} \hat{\mathbf{T}} \cdot \cdot \text{Dev } \hat{\rho}.$$

Заменив еще тензор $\hat{\mathbf{T}}$ и его первый инвариант выражениями

$$\hat{\mathbf{T}} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \hat{\mathbf{E}} + \hat{\varepsilon} \right), \quad I_1(\hat{\mathbf{T}}) = 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \vartheta,$$

найдем

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}_1^* d\sigma = \frac{1}{15(1-\nu)} [5\sigma(1+\nu)\vartheta + (8-10\nu)\hat{\varepsilon} \cdot \cdot \text{Dev } \hat{\rho}].$$

Переходя ко второму слагаемому в формуле (1.2.18), заметим, что вычисляемый по u_1^* тензор напряжений оказывается равным

$$\hat{T}_1^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)R^3} \left\{ (1-2\nu)\sigma(\hat{E} - 3\frac{RR}{R^2}) + (1-2\nu)\text{Dev } \hat{p} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2R^2} \left[(1-2\nu)\hat{E} - 5\frac{RR}{R^2} \right] R \cdot \text{Dev } \hat{p} \cdot R + \frac{3\nu}{R^2} (RR \cdot \text{Dev } \hat{p} + R \cdot \text{Dev } \hat{p} \cdot R) \right\}$$

и поэтому

$$n \cdot T_1^* = \\ = \frac{1}{4\pi(1-\nu)R^3} \left[-2(1-2\nu)\sigma n + (1+\nu)n \cdot \text{Dev } \hat{p} - \frac{6}{R^2} nR \cdot \text{Dev } \hat{p} \cdot R \right].$$

Теперь имеем

$$\int_{\Sigma} n \cdot \hat{T}_1^* \cdot u \, d\sigma = \frac{1}{15(1-\nu)} [-10(1-2\nu)\sigma\vartheta + (-7+5\nu)\hat{e} \cdot \cdot \text{Dev } \hat{p}],$$

и искомое выражение (1.2.18) приводится к виду

$$\int_O \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* \, d\sigma = \sigma\vartheta + \hat{e} \cdot \cdot \text{Dev } \hat{p} = \hat{e} \cdot \cdot \hat{p}. \quad (1.2.20)$$

В частности, для центра расширения $\text{Dev } \hat{p} = 0$, и, положив $\sigma = 1$, получим

$$\vartheta = \int_O \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* \, d\sigma. \quad (1.2.21)$$

Для силового диполя ee $\sigma = 1/3$, и по (1.2.20), (1.2.6) относительное удлинение по оси диполя будет

$$e \cdot \hat{e} \cdot e = \int_O \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* \, d\sigma, \quad (1.2.22)$$

Наконец, рассматривая особенность, задаваемую силами $-he_k$, $-he_s$ в точке Q и he_k , he_s соответственно в точках $h^{-1}e_s$, $h^{-1}e_k$ (причем $s \neq k$), имеем

$$\hat{p} = (e_k e_s + e_s e_k), \quad I_1(\hat{p}) = 0, \quad \hat{p} = \text{Dev } \hat{p}$$

и по (1.2.20) приходим к выражениям сдвигов

$$2e_k \cdot \hat{e} \cdot e_s = \gamma_{ks} = \int_O \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* \, d\sigma. \quad (1.2.23)$$

Фактически вычислить входящие в эти формулы интегралы, конечно, можно, лишь зная вектор перемещения u_2^* , представляющий в сумме с u_1^* аналог функции Грина, соответствующий данной особенности.

1.3. Интерпретация второго потенциала теории упругости. Вектор перемещения в первой внешней краевой задаче ($I^{(e)}$) теории упругости был представлен в форме второго потенциала теории упругости — аналога потенциала двойного слоя. Для согласования обозначений с обозначениями этого пункта в формуле (4.2.1) гл. IV надо поменять буквы M и Q местами. Тогда, вспомнив выражение (3.5.12) гл. IV, имеем

$$v(M) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \int_0 \int [(1-2\nu)(-Rb \cdot n + nb \cdot R + bn \cdot R) + 3 \frac{R}{R^2} R \cdot bn \cdot R] \frac{do}{R^3}. \quad (1.3.1)$$

Здесь силовой тензор представляется по (1.1.7) диадой nb :

$$nb = \hat{p} + \hat{\Omega}, \quad bn = \hat{p} - \hat{\Omega},$$

и подынтегральное выражение записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{do}{R^3} [(1-2\nu)(-RI_1(\hat{p}) + 2\hat{p} \cdot R) + 3 \frac{R}{R^2} R \cdot \hat{p} \cdot R] = \\ = -\frac{2}{3}(1+\nu) I_1(\hat{p}) \nabla \frac{1}{R} do - \\ - \left[2(1-2\nu) \text{Dev } \hat{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + 3 \frac{R \cdot \text{Dev } \hat{p} \cdot R}{R^2} \nabla \frac{1}{R} \right] do. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} v(M) = -\frac{1+\nu}{12\pi(1-\nu)} \int_0 \int I_1(\hat{p}) \nabla \frac{1}{R} do - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \int_0 \int [\text{Dev } \hat{p} + \\ + \frac{3}{2(1-2\nu)R^2} R \cdot \text{Dev } \hat{p} \cdot R \hat{E}] \cdot \nabla \frac{1}{R} do. \quad (1.3.2) \end{aligned}$$

Сравнение с (1.2.5) обнаруживает, что двойной слой в теории упругости образуется распределением по поверхности O центров расширения и силовых диполей; силовые и моментные особенности в нем отсутствуют. Этой неполнотой силовой системы объясняется неразрешимость задачи $I^{(e)}$ с помощью только второго потенциала.

1.4. Потенциалы Буссинеска. Распределение особенностей по линиям, поверхностям и объемам дают частные решения уравнений теории упругости бесконечной среды, из которой удалены эти геометрические места. Решение краевых задач для ограниченного тела иногда достигается путем комбинирования так построенных решений.

Далее рассматриваются два примера такого построения частных решений, определяемых распределениями центров

расширения и центров вращения на полупрямой. Направление на ней задается единичным вектором e , а положение точки — абсциссой λ , отсчитываемой от начала O полупрямой. Вектор-радиус R' точки M среды, имеющий начало в текущей точке полупрямой, представляется в виде

$$R' = R - e\lambda, \quad (1.4.1)$$

где R отсчитывается от ее начала O . Сославшись на (1.2.8), (1.2.12), приходим к частным решениям

$$u(M) = -A \int_0^\infty d\lambda \nabla_M \cdot \frac{1}{R'}, \quad u(M) = -C \times \int_0^\infty d\lambda \nabla_M \frac{1}{R'}. \quad (1.4.2)$$

Первое соответствует распределению центров расширения, второе — центров вращения. Постоянные — скаляр A и вектор C — характеризуют интенсивность этих особенностей. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\lambda \nabla_M \frac{1}{R'} &= \nabla_M \int_0^\infty \frac{d\lambda}{R'} = \nabla_M \int_0^\infty (R^2 - 2\lambda e \cdot R + \lambda^2)^{-1/2} d\lambda = \\ &= \nabla_M \ln(R' + \lambda - R \cdot e) \Big|_0^\infty, \end{aligned}$$

причем вычисление градиента следует провести до подстановки верхнего предела, а потом подставить пределы; тогда слагаемое, относящееся к верхнему пределу $\lambda = \infty$, исчезнет; получаем

$$\int_0^\infty d\lambda \nabla_M \frac{1}{R'} = -\nabla_M \ln(R - R \cdot e) = -\frac{R - Re}{R(R - R \cdot e)}.$$

Итак, вводя в рассмотрение первый потенциал Буссинеска

$$\Phi_1 = \ln(R - R \cdot e), \quad (1.4.3)$$

приходим к двум представлениям вектора перемещения:

$$u = A \nabla \Phi_1 = A \frac{R - Re}{R(R - R \cdot e)}, \quad u = C \times \nabla \Phi_1 \quad (1.4.4)$$

в любой области, из которой исключена полупрямая. В этой области Φ_1 — гармоническая функция; можно непосредственным вычислением проверить, что она удовлетворяет уравнению Лапласа, но в этом нужды нет: если известно, что вектор перемещения в задаче теории упругости при отсутствии массовых сил представлен в форме градиента скаляра, то этот скаляр — гармонический; его можно отождествить, например, с гармоническим скаляром B_0 в решении Папковича — Нейбера (1.4.10), гл. IV.

Потенциал Буссинека (1.4.3) возрастает с ростом R , как $\ln R$; соответствующий ему вектор перемещения убывает, как R^{-1} . Вычисляемый по Φ_1 тензор напряжений равен

$$\hat{T} = 2\mu \nabla \nabla \Phi_1 = -\frac{2\mu A}{R^2(R-e \cdot R)} \left\{ \frac{1}{R} \mathbf{R}\mathbf{R} - \hat{E}R + \frac{1}{R-e \cdot R} [\mathbf{R}\mathbf{R} - R(\mathbf{R}e + e\mathbf{R}) + R^2 ee] \right\}, \quad (1.4.5)$$

и его компонентами, если линией центров расширения служит отрицательная ось Oz , будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_x &= \frac{A}{R(R+z)} \left[1 - \frac{x^2(2R+z)}{R^2(R+z)} \right], \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_y &= \frac{A}{R(R+z)} \left[1 - \frac{y^2(2R+z)}{R^2(R+z)} \right], \\ \frac{1}{2\mu} \tau_{xy} &= -\frac{Axy(2R+z)}{R^3(R+z)^2}, \quad \frac{1}{2\mu} \tau_{xz} = -A \frac{x}{R^3}, \\ \frac{1}{2\mu} \tau_{yz} &= -A \frac{y}{R^3}, \quad \frac{1}{2\mu} \sigma_z = -A \frac{z}{R^3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.6)$$

Простота выражений компонент напряжения на площадках, перпендикулярных оси z , делает потенциал Φ_1 пригодным средством решения задачи о напряженном состоянии в упругом полупространстве $z > 0$.

В сферической системе координат при том же выборе направления e (к южному полюсу сферы)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_R &= -\frac{A}{R^2}, \quad \frac{1}{2\mu} \tau_{R\theta} = \frac{A \sin \theta}{R^2(1+\cos \theta)}, \quad \tau_{R\lambda} = 0, \\ \frac{1}{2\mu} \sigma_\theta &= \frac{A \cos \theta}{R^2(1+\cos \theta)}, \quad \tau_{\theta\lambda} = 0, \quad \frac{1}{2\mu} \sigma_\lambda = \frac{A}{R^2(1+\cos \theta)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.7)$$

Для решения краевых задач применяется также еще один потенциал Буссинека:

$$\Phi_2 = \int_z^{\infty} \ln(R+z) dz = z \ln(R+z) - R, \quad u = \nabla \Phi_2. \quad (1.4.8)$$

Это, конечно, также гармоническая функция в области, из которой удалена отрицательная ось z .

1.5. Термоупругие перемещения. Сославшись здесь на формулы (3.4.3) и (3.5.9) гл. IV, имеем

$$u(Q) = 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int \int \int_{V_l} \theta(M) \operatorname{div}_M \hat{U}(M, Q) d\tau_M.$$

Здесь

$$\operatorname{div}_M \hat{U}(M, Q) = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\nabla_M \frac{1}{R} - \frac{1}{4(1-\nu)} \nabla_M^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \nabla_M \frac{1}{R}, \quad (1.5.1)$$

и выражение вектора перемещения может быть представлено также в виде

$$u(Q) = \alpha \frac{1+\nu}{4\pi(1-\nu)} \int \int \int_{V_i} \theta(M) \nabla_M \left(\frac{1}{R} \right) d\tau_M = -\nabla_Q \chi, \quad (1.5.2)$$

где в рассмотрение введен потенциал

$$\chi = \alpha \frac{1+\nu}{4\pi(1-\nu)} \int \int \int_{V_i} \frac{\theta(M)}{R} d\tau_M. \quad (1.5.3)$$

Здесь θ — превышение температуры над ее постоянным значением в натуральном состоянии; V_i — объем, в котором задано распределение температуры; вне этого объема $\theta = 0$. Такое же поле вектора перемещения в неограниченной упругой среде создается, по (1.1.12), распределением в объеме V_i центров расширения с интенсивностью, пропорциональной θ . Функция χ представляет ньютонов потенциал притягивающих масс с плотностью, пропорциональной температуре. Первые производные этого потенциала (компоненты силы притяжения, компоненты вектора перемещения в нашем случае) непрерывны во всем пространстве (в предположении, что непрерывна плотность); разрыв вторых производных при переходе через поверхность O извне (из объема V_e) внутрь объема V_i определяется известными формулами

$$(\nabla \nabla \chi)_e - (\nabla \nabla \chi)_i = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \theta_0 nn, \quad (1.5.4)$$

где n — единичный вектор внешней нормали к O ; θ_0 — значение θ на O . Вне объема V_i потенциал χ удовлетворяет уравнению Лапласа, а в объеме — уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \chi = \begin{cases} 0, & Q \in V_e, \\ -\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta, & Q \in V_i. \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Тензор напряжений, определяемый по потенциалу χ , по (1.14.1) гл. IV равен при $Q \in V_i$

$$\begin{aligned} \hat{T} &= -2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \hat{E} \nabla^2 \chi + \nabla \nabla \chi \right) - 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \hat{E} = \\ &= -2\mu \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta \hat{E} + \nabla \nabla \chi \right), \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

а при $Q \in V_e$ температурное слагаемое отбрасывается. По (1.5.4) получаем

$$(\hat{T}^{(e)} - \hat{T}^{(i)})_O = 2\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta_O (\hat{E} - nn), \quad (1.5.7)$$

откуда следует, что вектор напряжения на поверхности O непрерывен:

$$[n \cdot (\hat{T}^{(e)} - \hat{T}^{(i)})]_O = 0, \quad (1.5.8)$$

тогда как этот вектор на площадках, перпендикулярных границе (с нормалью n^* , где $n^* \cdot n = 0$), в точках этой границы испытывает разрыв своих нормальных компонент:

$$[n^* \cdot (\hat{T}^{(e)} - \hat{T}^{(i)}) \cdot n^*]_O = 2\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta_O. \quad (1.5.9)$$

Его касательные компоненты непрерывны.

Пусть, в частности, V_i — объем нагретой до постоянной температуры θ^0 сферы радиуса a ; по известным из теории ньютонова потенциала формулам имеем

$$\chi = \begin{cases} \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \alpha \theta^0 \left(a^2 - \frac{1}{3} R^2 \right), & Q \subset V_i, \\ \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \alpha \theta^0 \frac{a^3}{R}, & Q \subset V_e, \end{cases} \quad (1.5.10)$$

и по (1.5.6)

$$\hat{T}^{(i)} = -\frac{4}{3} \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta^0 \hat{E}, \quad \hat{T}^{(e)} = \frac{2}{3} \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta^0 (\hat{E} - 3e_R e_R) \frac{a^3}{R^3}, \quad (1.5.11)$$

и в согласии со сказанным

$$\begin{aligned} \sigma_R^{(i)}|_{R=a} &= \sigma_R^{(e)}|_{R=a} = -\frac{4}{3} \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta^0, \\ \sigma_\theta^{(i)}|_{R=a} &= \sigma_\theta^{(e)}|_{R=a} = -\frac{4}{3} \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta^0, \\ \sigma_\phi^{(e)}|_{R=a} &= \sigma_\phi^{(e)}|_{R=a} = \frac{2}{3} \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta^0, \end{aligned}$$

так что σ_R остается непрерывным во всем пространстве, тогда как σ_θ и σ_ϕ испытывают разрыв непрерывности, определяемый формулой (1.5.9).

1.6. Напряженное состояние, создаваемое включением. Повышение температуры элементарного объема, выделенного из окружающей его среды, не является единственным средством сообщения этому объему деформации, в которой не возникает напряженное состояние — так называемой свободной деформации. Можно представить себе другие физические процессы, сопровождающиеся свободной деформацией*). Напряженное состояние, однако, возникает в упругой среде, когда в некотором ее объеме V_i имел место процесс, который вызвал бы свободную

*) Д. Эшелби относит к таким процессам двойникование в кристалле, мартенситное превращение в стали, выделение фазы с другой элементарной ячейкой.

деформацию, задаваемую тензором $\hat{\varepsilon}^0$, если бы этот объем V_i был свободным. В результате повсюду в среде создается деформированное состояние, и описывающий ее тензор деформации связан с тензором напряжения соотношением

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \hat{E} \right) + \hat{\varepsilon}^0, \quad (1.6.1)$$

так как появление напряжений вызвано «деформацией» $\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^0$. Соотношение (1.6.1) является естественным обобщением закона Гука (3.4.10) гл. III с учетом температурного слагаемого $E\alpha\theta$ и может быть пояснено теми же соображениями, что и этот закон (см. конец п. 3.4 гл. III). Из него находим

$$\sigma = I_1(\hat{T}) = 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} (\vartheta - \vartheta^0), \quad \vartheta^0 = I_1(\hat{\varepsilon}^0) \quad (1.6.2)$$

и, далее,

$$\hat{T} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \hat{E} + \hat{\varepsilon} \right) - 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta^0 \hat{E} + \hat{\varepsilon}^0 \right) = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \hat{E} + \hat{\varepsilon} \right) - \hat{T}^0. \quad (1.6.3)$$

Здесь через \hat{T}^0 обозначен «тензор напряжений», формально связываемый с тензором $\hat{\varepsilon}^0$ законом Гука:

$$\hat{T}^0 = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta^0 \hat{E} + \hat{\varepsilon}^0 \right). \quad (1.6.4)$$

Введение этого «тензора напряжений» лишь сокращает запись формул — свободная деформация не сопровождается, как указывалось, напряжениями.

Рассмотрим два состояния упругой среды. В первом ее состоянии в точке Q прилагается единичная сосредоточенная сила e_Q , а во втором — напряженное состояние при отсутствии внешних сил обязано своим возникновением имевшей место свободной деформации.

Сославшись на формулу (3.1.5) гл. IV и рассматривая объем $V = V_i + V_e$, имеем соотношение

$$\begin{aligned} e'_Q \cdot u''(Q) &= \int_V \int \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' d\tau - \int_S n \cdot \hat{T}' \cdot u'' do = \int_V \int \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' d\tau = \\ &= \int_{V_e} \int \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' d\tau + \int_{V_i} \int \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' d\tau, \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

так как интеграл по поверхности S объема V при неограниченном расширении последнего стремится к нулю.

Во втором состоянии объема V внешние силы отсутствуют; поэтому

$$\int_V \int \hat{T}'' \cdot \hat{\varepsilon}' d\tau = \int_{V_e} \int \hat{T}'' \cdot \hat{\varepsilon}' d\tau + \int_{V_i} \int \hat{T}'' \cdot \hat{\varepsilon}' d\tau = 0. \quad (1.6.6)$$

Тензор напряжений \hat{T}' во всем объеме V и тензор \hat{T}'' в объеме V_e определяются по закону Гука:

$$\hat{T}' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta' \hat{E} + \hat{\varepsilon}' \right), \quad \hat{T}'' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta'' \hat{E} + \hat{\varepsilon}'' \right),$$

тогда как в V_i по (1.6.3)

$$\hat{T}'' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta'' \hat{E} + \hat{\varepsilon}'' \right) - \hat{T}^0.$$

Поэтому

$$\hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta' \vartheta'' + \hat{\varepsilon}' \cdot \hat{\varepsilon}'' \right) \text{ в } V,$$

$$\hat{T}'' \cdot \hat{\varepsilon}' = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta'' \vartheta' + \hat{\varepsilon}'' \cdot \hat{\varepsilon}' \right) + \begin{cases} -\hat{T}^0 \cdot \hat{\varepsilon}' & \text{в } V_i, \\ 0 & \text{в } V_e \end{cases}.$$

или

$$\hat{T}'' \cdot \hat{\varepsilon}' = \begin{cases} \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' & \text{в } V_e, \\ \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' - \hat{T}^0 \cdot \hat{\varepsilon}' & \text{в } V_i. \end{cases}$$

Возвращаясь к соотношениям (1.6.6), (1.6.5), имеем

$$\begin{aligned} \int \int \int_{V_e} \hat{T}'' \cdot \hat{\varepsilon}' d\tau + \int \int \int_{V_i} \hat{T}'' \cdot \hat{\varepsilon}' d\tau &= \int \int \int_{V_e} \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' d\tau + \\ + \int \int \int_{V_i} \hat{T}' \cdot \hat{\varepsilon}'' d\tau - \int \int \int_{V_i} \hat{T}^0 \cdot \hat{\varepsilon}' d\tau &= e'_Q \cdot u''(Q) - \int \int \int_{V_i} \hat{T}^0 \cdot \hat{\varepsilon}' d\tau = 0, \end{aligned}$$

так что

$$e'_Q \cdot u''(Q) = \int \int \int_{V_i} \hat{T}^0 \cdot \hat{\varepsilon}' d\tau.$$

Выражая здесь $\hat{\varepsilon}'$ через тензор Кельвина—Соммильяна (3.5.9) гл. IV, имеем

$$\begin{aligned} e'_Q \cdot u''(Q) &= \frac{1}{2} \int \int \int_{V_i} \hat{T}^0 \cdot [\nabla \hat{U}' \cdot e'_Q + (\nabla \hat{U}')^* \cdot e'_Q] d\tau = \\ &= \int \int \int_{V_i} (\hat{T}^0 \cdot \nabla \hat{U}') d\tau \cdot e'_Q \end{aligned}$$

и, отбросив произвольно задаваемый вектор e'_Q и ненужные теперь штрихи, приходим к равенству

$$u(Q) = \int \int \int_{V_i} \hat{T}^0 \cdot \nabla_M \hat{U}(M, Q) d\tau_M. \quad (1.6.7)$$

Здесь интегрирование проводится по объему включения, подвергшегося свободной деформации. Далее будем считать, что эта деформация однородна — тензор $\hat{\epsilon}^0$ и, значит, \hat{T}^0 постоянны. Тогда, вспомнив еще выражение (3.5.9) гл. IV тензора Кельвина — Сомильяна, придем к формуле (Эшелби)

$$u(Q) = -\frac{1}{4\pi\mu} \hat{T}^0 \cdot \left[\nabla_Q \hat{E} \int_{V_i} \int \frac{d\tau}{R} - \frac{1}{4(1-\nu)} \nabla_Q \nabla_Q \nabla_Q \int_{V_i} \int R d\tau \right]. \quad (1.6.8)$$

Введя в рассмотрение потенциалы

$$\varphi = \int_{V_i} \int \int \frac{d\tau}{R}, \quad \psi = \int_{V_i} \int \int R d\tau, \quad (1.6.9)$$

можно ее записать также в виде

$$u(Q) = -\frac{1}{4\pi\mu} \hat{T}^0 \cdot \left[\nabla_Q \hat{E} \varphi - \frac{1}{4(1-\nu)} \nabla_Q \nabla_Q \nabla_Q \psi \right]. \quad (1.6.10)$$

Функция φ — ньютонов потенциал притягивающих масс единичной плотности, и, поскольку $\nabla^2 R = 2R^{-1}$, имеем

$$\nabla^2 \psi = 2\varphi \quad (1.6.11)$$

и по (1.5.3), (1.5.5)

$$\nabla^2 \varphi = \begin{cases} 0, & Q \in V_e, \\ -4\pi, & Q \in V_i, \end{cases} \quad \nabla^4 \psi = \begin{cases} 0, & Q \in V_e, \\ -8\pi, & Q \in V_i, \end{cases} \quad (1.6.12)$$

а аналогичные (1.5.4) соотношения разрыва непрерывности на поверхности Q объема V_i представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \nabla \varphi)_e - (\nabla \nabla \varphi)_i &= 4\pi n n, \\ (\nabla \nabla \nabla \nabla \psi)_e - (\nabla \nabla \nabla \nabla \psi)_i &= 8\pi n n n n, \end{aligned} \right\} \quad (1.6.13)$$

так как компоненты тензора $\nabla \nabla \psi$ представляют ньютоновы потенциалы с плотностью, равной соответствующим компонентам тензора $-(4\pi)^{-1} \nabla \nabla^2 \varphi$.

Компоненты тензора деформации, вычисляемые по (1.6.8), равны

$$e_{sk} = -\frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{1}{2} \left(t_{qs}^0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_q} + t_{qk}^0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial x_q} \right) - \frac{1}{4(1-\nu)} t_{qr}^0 \frac{\partial^1 \psi}{\partial x_k \partial x_s \partial x_q \partial x_r} \right]. \quad (1.6.14)$$

В частности, когда тензор \hat{T}^0 шаровой, то

$$t_{qs}^0 = \frac{1}{3} \sigma^0 \delta_{qs} = \frac{1}{3} 2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} \theta^0 \delta_{qs} \quad (1.6.15)$$

и по (1.6.11)

$$\varepsilon_{sk} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \vartheta^0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial x_k},$$

$$\vartheta = -\frac{1}{4\pi} \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \vartheta^0 \nabla^2 \varphi = \begin{cases} 0, & Q \subset V_e, \\ \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \vartheta^0, & Q \subset V_i. \end{cases} \quad (1.6.16)$$

Например, в температурном процессе $\vartheta^0 = 3\alpha\theta$ и при $\nu = 0,25$ объемное расширение, стесненное окружающей средой, составляет только 5/9 свободного, а в окружающей среде оно отсутствует.

В общем случае компоненты напряжения вычисляются через компоненты деформации (1.6.14) в среде, окружающей включение, по закону Гука в его обычной форме [(1.1.3) гл. III], а во включении — по формуле (1.6.3). Вычисление требует знания обоих потенциалов φ , ψ . Для определения ϑ достаточно знать только первый. Действительно, по (1.6.11) и (1.6.14) имеем

$$\vartheta = -\frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} t_{qs}^0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_q \partial x_s} = -\frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \hat{T}^0 \cdot \nabla \nabla \varphi =$$

$$= -\frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \text{Dev } \hat{T}^0 \cdot \nabla \nabla \varphi + \begin{cases} \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} \frac{1}{3} \varepsilon^0, & Q \subset V_i, \\ 0, & Q \subset V_e. \end{cases} \quad (1.6.17)$$

Отсюда и по (1.6.13), (1.6.15) находим разрыв ϑ на поверхности включения:

$$\vartheta_e - \vartheta_i = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{3} \vartheta^0 - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \text{Dev } \hat{\varepsilon}^0 \cdot nn, \quad (1.6.18)$$

так как $\text{Dev } \hat{T}^0 = 2\mu \text{Dev } \hat{\varepsilon}^0$. При $\text{Dev } \hat{\varepsilon}^0 = 0$ возвращаемся к (1.6.16).

§ 2. Упругое полупространство

2.1. Задачи Буссинеска и Черрути. Разыскивается напряженное состояние в упругом полупространстве $z > 0$ — в упругой среде, ограниченной плоскостью $z = 0$, при заданном законе распределения поверхностных сил по этой плоскости

$$z = 0: \mathbf{F} = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}} = -i_3 \cdot \hat{\mathbf{T}} \quad (2.1.1)$$

или

$$z = 0: \left. \begin{aligned} F_x &= q_1(x, y) = -\tau_{xz}, & F_y &= q_2(x, y) = -\tau_{yz}, \\ F_z &= p(x, y) = -\sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

Принимается, что массовые силы отсутствуют, а главный вектор поверхностных сил конечен:

$$\mathbf{V} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \, d\sigma \quad (d\sigma = dx \, dy), \quad (2.1.3)$$

где Ω — область загрузки на плоскости $z = 0$. При этих условиях требуется, чтобы искомое решение было при $R \rightarrow \infty$ убывающим не медленнее, чем R^{-1} для вектора перемещения и не медленнее, чем R^{-2} для напряжений.

Известно несколько приемов решения этой рассмотренной Буссинек и Черрути классической задачи. В частной задаче Буссинека, когда $q_1 = q_2 = 0$ и рассматривается нагружение сосредоточенной силой \mathbf{Q} , нормальной к границе полупространства, решение легко получить наложением напряженного состояния (1.4.6), создаваемого особой линией центров сжатия, на напряженное состояние в неограниченной упругой среде от сосредоточенной силы (решение Кельвина — Соммильяна, п. 3.5 гл. IV). Переход к общему случаю нормального нагружения $p(x, y)$ после этого, очевидно, прост. Другой прием состоит в применении решения Папковича — Нейбера (п. 1.4 гл. IV); он распространяется и на общую задачу Буссинека — Черрути, то есть на случай нагружения (2.1.2).

2.2. Частная задача Буссинека. В неограниченной упругой среде приложение силы, имеющей направление оси Oz и приложенной в начале координат, создает напряженное состояние, определяемое по (3.5.6) гл. IV равенством

$$\hat{T} = \frac{2\mu C}{R^3} \left[(1 - 2\nu) (\hat{E}z - i_3 R - R i_3) - \frac{3z}{R^2} R R \right] \quad (R = i_1 x + i_2 y + i_3 z), \quad (2.2.1)$$

где C — далее определяемый коэффициент пропорциональности. Вектор напряжения на плоскости $z = 0$ поэтому равен

$$\mathbf{n} \cdot \hat{T} = -i_3 \cdot \hat{T} = \frac{2\mu C}{R_0^3} (1 - 2\nu) \mathbf{R}_0 \quad (\mathbf{R}_0 = i_1 x_1 + i_2 x_2). \quad (2.2.2)$$

Но таким же законом по (1.4.6) задается распределение на плоскости $z = 0$ напряжений, определяемых с помощью потенциала (1.4.3) Буссинека:

$$\mathbf{n} \cdot \hat{T} = 2\mu A \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}, \quad (2.2.3)$$

и можно удовлетворить требованию отсутствия напряжений на этой плоскости, связав постоянные A и C равенством

$$A = -C(1 - 2\nu).$$

Теперь по (3.5.5), (3.5.6) гл. IV и по (1.4.4), (1.4.5) имеем

$$u = C \left\{ \frac{1}{R} \left[(3 - 4\nu) i_3 + \frac{z}{R^3} R \right] - (1 - 2\nu) \nabla \ln(R + z) \right\}, \quad (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{T} = 2\mu C \left\{ \frac{1}{R^3} \left[(1 - 2\nu) (\hat{E}z - i_3 R - R i_3) - \frac{3RR}{R^2} z \right] + \right. \\ \left. + \frac{1 - 2\nu}{R^2(R + z)} \left[\frac{RR}{R} - \hat{E}R + \frac{1}{R + z} (R + i_3 R)(R + i_3 R) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Постоянная C определяется из уравнения равновесия выделенного из среды полшара произвольного радиуса R с центром в точке приложения силы $i_3 Q$:

$$i_3 Q + R^2 \int \int_{O_*} e_R \cdot \hat{T} d\sigma_* = 0, \quad (2.2.6)$$

где $d\sigma_* = \sin \vartheta d\vartheta d\lambda$ — элемент площади поверхности единичной полусферы O_* , а

$$e_R = RR^{-1} = i_3 \cos \vartheta + \sin \vartheta (i_1 \cos \lambda + i_2 \sin \lambda).$$

Имеем

$$\begin{aligned} R^2 e_R \cdot \hat{T} = 2\mu C \left[- (1 - 2\nu) i_3 - 3e_R \cos \vartheta + \frac{1 - 2\nu}{1 + \cos \vartheta} (e_R + i_3) \right] = \\ = -6\mu C i_3 \cos^2 \vartheta + \dots, \end{aligned}$$

где многоточием отмечены слагаемые, не вносящие вклада в интеграл (2.2.6). Получаем

$$Q - 6\mu C \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = 0, \quad C = \frac{Q}{4\pi\mu},$$

и этим завершается решение частной задачи Буссинека. Выражения перемещений приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} u = \frac{Q}{4\pi\mu} \frac{x}{R} \left(\frac{z}{R^2} - \frac{1 - 2\nu}{R + z} \right), \quad v = \frac{Q}{4\pi\mu} \frac{y}{R} \left(\frac{z}{R^2} - \frac{1 - 2\nu}{R + z} \right), \\ w = \frac{Q}{4\pi\mu R} \left[\frac{z^2}{R^2} + 2(1 - \nu) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

Весьма простыми и не зависящими от коэффициента Пуассона оказываются выражения напряжений на плоскостях, параллельных границе полупространства:

$$\tau_{xz} = -\frac{3Q}{2\pi} \frac{xz^2}{R^5}, \quad \tau_{yz} = -\frac{3Q}{2\pi} \frac{yz^2}{R^5}, \quad \sigma_z = -\frac{3Q}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}. \quad (2.2.8)$$

2.3. Распределенная нормальная нагрузка. Решение частной задачи легко обобщается на произвольное число нормальных

к границе $z = 0$ сил $Q_i i_3$ с координатами точек приложения $(x_i, y_i, 0)$:

$$u = \frac{1-\nu}{\pi\mu} i_3 \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{R_i} - \frac{1}{4\pi\mu} \text{grad} \sum_{i=1}^n Q_i \left[\frac{z}{R_i} + (1-2\nu) \ln(R_i + z) \right], \quad \left. \begin{aligned} R_i &= i_1(x - x_i) + i_2(y - y_i) + i_3 z. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1)$$

Переход к случаю распределенной нагрузки $p(x, y)$ сводится к замене Q_i на $p(x', y') do'$ и к последующему интегрированию по области загрузки Ω . В рассмотрение вводятся потенциалы

$$\omega(x, y, z) = \iint_{\Omega} \frac{p(x', y')}{R'} do', \quad (2.3.2)$$

$$\omega_1(x, y, z) = \iint_{\Omega} p(x', y') \ln(R' + z) do', \quad (2.3.3)$$

причем, конечно,

$$R' = i_1(x - x') + i_2(y - y') + i_3 z, \quad R' = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2}.$$

Через эти потенциалы вектор перемещения представляется в виде

$$u = \frac{1-\nu}{\pi\mu} i_3 \omega - \frac{1}{4\pi\mu} \text{grad} [z\omega + (1-2\nu)\omega_1], \quad (2.3.4)$$

а напряжения на площадках, перпендикулярных оси z , — в виде

$$\tau_{xz} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}, \quad \tau_{yz} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z}, \quad \sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right). \quad (2.3.5)$$

Функция $\omega(x, y, z)$ представляет потенциал простого слоя, распределенного по площади загрузки с плотностью $p(x, y)$. Эта непрерывная повсюду (включая область Ω) функция убывает на достаточно больших расстояниях от Ω (при $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$), как PR^{-1} , где P — главный вектор поверхностных сил:

$$P = \iint_{\Omega} p(x, y) do.$$

Известно, что производная потенциала простого слоя по нормали к поверхности, на которой распределен слой, претерпевает разрыв непрерывности при переходе точки через эту поверхность. В частности, для слоя, распределенного по области Ω на плоскости $z = 0$, имеют место соотношения

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \pm 0} = \begin{cases} \mp 2\pi p(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Отсюда еще раз следует, что найденное решение удовлетворяет краевым условиям (2.1.2), когда $q_1 = q_2 = 0$.

Функция $\omega_1(x, y, z)$, гармоническая в полупространстве $z > 0$, возрастает вместе с R , как

$$P \ln(R + z), \quad (2.3.7)$$

но ее первые производные по координатам, которые только и входят в выражение вектора перемещения, убывают при $R \rightarrow \infty$, как R^{-1} . Отметим еще равенство

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \omega, \quad (2.3.8)$$

определяющее вместе с условием на бесконечности (2.3.7) функцию ω_1 через ω с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

2.4. Применение функций Папковича—Нейбера к решению задачи Буссинеска—Черрути. Выражения компонент тензора напряжений через эти функции по (1.4.17) гл. IV записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{xz}}{2\mu} &= (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{\partial B_3}{\partial x} \right) - \left(x \frac{\partial^2 B_1}{\partial z \partial x} + y \frac{\partial^2 B_2}{\partial z \partial x} + z \frac{\partial^2 B_3}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial z \partial x} \right), \\ \frac{\tau_{yz}}{2\mu} &= (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial B_2}{\partial z} + \frac{\partial B_3}{\partial y} \right) - \left(x \frac{\partial^2 B_1}{\partial y \partial z} + y \frac{\partial^2 B_2}{\partial y \partial z} + z \frac{\partial^2 B_3}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y \partial z} \right), \\ \frac{\sigma_z}{2\mu} &= 2(1 - 2\nu) \frac{\partial B_3}{\partial z} + 2\nu \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \left(x \frac{\partial^2 B_1}{\partial z^2} + y \frac{\partial^2 B_2}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 B_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.1)$$

В случае только нормального нагружения достаточно принять

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad \frac{\partial B_0}{\partial z} = (1 - 2\nu) B_3. \quad (2.4.2)$$

Тогда

$$\frac{1}{2\mu} \tau_{xz} = -z \frac{\partial^2 B_3}{\partial x \partial z}, \quad \frac{1}{2\mu} \tau_{yz} = -z \frac{\partial^2 B_3}{\partial y \partial z}, \quad \frac{1}{2\mu} \sigma_z = \frac{\partial B_3}{\partial z} - z \frac{\partial^2 B_3}{\partial z^2}. \quad (2.4.3)$$

Краевые условия для касательных напряжений удовлетворяются автоматически:

$$(\tau_{xz})_{z=0} = (\tau_{yz})_{z=0} = 0, \quad (2.4.4)$$

а остающееся краевое условие

$$\frac{1}{2\mu} (\sigma_z)_{z=0} = -\frac{1}{2\mu} p(x, y) = \left(\frac{\partial B_3}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (2.4.5)$$

подсказывает в соответствии с (2.3.6), что B_3 представляется потенциалом простого слоя с плотностью $(4\pi\mu)^{-1}p(x, y)$. Функция B_0 определяется вторым равенством (2.4.2) и условием обращения в нуль ее производных на бесконечности. Очевидно, что B_3, B_0 отличаются от ω и ω_1 лишь постоянными множителями:

$$B_3 = \frac{1}{4\pi\mu} \omega, \quad B_0 = \frac{1}{4\pi\mu} (1 - 2\nu) \omega_1. \quad (2.4.6)$$

Переходя к общей краевой задаче (2.1.2), представим выражения τ_{xz}, τ_{yz} в иной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \tau_{xz} &= 2(1-\nu) \frac{\partial B_1}{\partial z} + (1-2\nu) \frac{\partial B_3}{\partial x} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial B_1}{\partial z} + y \frac{\partial B_2}{\partial z} + z \frac{\partial B_3}{\partial z} + \frac{\partial B_0}{\partial z} \right), \\ \frac{1}{2\mu} \tau_{yz} &= 2(1-\nu) \frac{\partial B_2}{\partial z} + (1-2\nu) \frac{\partial B_3}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial B_1}{\partial z} + y \frac{\partial B_2}{\partial z} + z \frac{\partial B_3}{\partial z} + \frac{\partial B_0}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.7)$$

Скаляр B_0 можно принять равным

$$B_0 = -(xB_1 + yB_2 + zB_3) - 2(1-\nu) \int_z^\infty B_3 dz \quad (2.4.8)$$

при условии, что правая часть этого соотношения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 (xB_1 + yB_2 + zB_3) = 2 \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial B_3}{\partial z} = - \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} \right). \quad (2.4.9)$$

Тогда по (2.4.7) приходим к весьма простым краевым условиям

$$4\mu(1-\nu) \frac{\partial B_1}{\partial z} = -q_1(x, y), \quad 4\mu(1-\nu) \frac{\partial B_2}{\partial z} = -q_2(x, y), \quad (2.4.10)$$

позволяющим определить B_1, B_2 как потенциалы простых слоев:

$$B_1 = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \Phi_1(x, y, z), \quad B_2 = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \Phi_2(x, y, z), \quad (2.4.11)$$

где обозначено

$$\Phi_i(x, y, z) = \iint_{\Omega} \frac{q_i(x', y')}{R'} d\omega' \quad (i = 1, 2). \quad (2.4.12)$$

По (2.4.9) имеем также

$$\left. \begin{aligned} B_3 &= -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \right), \\ \psi_l(x, y, z) &= \int_{\Omega} \int q_l(x', y') \ln(R' + z) d\sigma'. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.13)$$

Нормальное напряжение σ_z по (2.4.1) и (2.4.9) представляется в виде

$$\sigma_z = 4(1-\nu)\mu \frac{\partial B_3}{\partial z}. \quad (2.4.14)$$

Остается удовлетворить третьему краевому условию (2.1.2); это приводит к рассмотренной уже задаче о напряженном состоянии в полупространстве, когда на его границе $z=0$ отсутствуют касательные напряжения, а нормальные равны

$$\sigma_z|_{z=0} = -p(x, y) - 4(1-\nu)\mu \frac{\partial B_3}{\partial z}. \quad (2.4.15)$$

Гармонические функции Папковича, решающие эту задачу (назовем их B_i^*), по (2.4.2) и (2.4.6) определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} B_1^* &= 0, \quad B_2^* = 0, \quad B_3^* = \frac{1}{4\pi\mu} \omega - 2(1-\nu)B_3, \\ \frac{\partial B_0^*}{\partial z} &= (1-2\nu)B_3^*. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.16)$$

Исходная краевая задача решается наложением этих решений. Приходим к следующим значениям напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\nu)} z \frac{\partial\sigma}{\partial x}, \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\nu)} z \frac{\partial\sigma}{\partial y}, \\ \sigma_z &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\nu)} z \frac{\partial\sigma}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4.17)$$

где обозначено

$$\sigma = \frac{1+\nu}{\pi} \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \right). \quad (2.4.18)$$

Ниже доказывается, что σ — сумма трех нормальных напряжений. Вектор перемещения определяется наложением приведенных выше решений:

$$u = 4(1-\nu)(B + B^*) - \text{grad} [R \cdot (B + B^*) + (B_0 + B_0^*)],$$

Результат вычисления представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} 2\pi\mu u &= \varphi_1 - \frac{1}{2}z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}z \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{1}{2}(1-2\nu) \frac{\partial \omega_1}{\partial x}, \\ 2\pi\mu v &= \varphi_2 - \frac{1}{2}z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}z \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{1}{2}(1-2\nu) \frac{\partial \omega_1}{\partial y}, \\ 2\pi\mu w &= \frac{1}{2}(1-2\nu) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) - \frac{1}{2}z \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \\ &\quad + (1-\nu) \omega - \frac{1}{2}z \frac{\partial \omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4.19)$$

причем введены потенциалы

$$\chi_i(x, y, z) = \iint_{\Omega} q_i(x', y') [z \ln(R' + z) - R'] d\sigma' \quad (i = 1, 2). \quad (2.4.20)$$

Вычисляемое по этим выражениям объемное расширение ϑ оказывается равным

$$\vartheta = \frac{1-2\nu}{2\pi\mu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right), \quad (2.4.21)$$

откуда следует также (2.4.18).

Формулы (2.4.19) представляют решение задачи Буссинеска — Черрути.

2.5. Тензор влияния в упругом полупространстве. Разыскивается напряженное состояние в упругом полупространстве $z > 0$, создаваемое сосредоточенной в его точке $Q(0, 0, h)$ силой \mathbf{P} .

В рассмотрение вводятся точка $Q_*(0, 0, -h)$ и сила \mathbf{P}_* :

$$\mathbf{P}_* = P_1 \mathbf{i}_1 + P_2 \mathbf{i}_2 - P_3 \mathbf{i}_3 = \mathbf{P} - 2\mathbf{i}_3 P_3, \quad (2.5.1)$$

являющиеся зеркальным отображением точки Q и силы \mathbf{P} в плоскости $z = 0$. Вектор-радиусы точки наблюдения $M(x, y, z)$, имеющие начала в Q и Q_* , обозначаются

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{i}_2 x_2 + \mathbf{i}_3 (z - h), \quad \mathbf{R}_* = \mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{i}_2 x_2 + \mathbf{i}_3 (z + h). \quad (2.5.2)$$

Искомое напряженное состояние представляется суммой трех состояний: двух состояний \hat{T}^0 и \hat{T}_*^0 в неограниченном упругом пространстве, создаваемых сосредоточенными силами \mathbf{P} в точке Q и \mathbf{P}_* в Q_* , и состояния \hat{T}' , лишенного особенностей в полупространстве $z > 0$ и выбираемого так, чтобы граница полупро-

странства $z = 0$ оставалась свободной от нагружения, создаваемого состоянием $\hat{T}^0 + \hat{T}_*^0$:

$$i_3 \cdot \hat{T} = i_3 \cdot (\hat{T}^0 + \hat{T}_*^0 + \hat{T}')|_{z=0} = 0. \quad (2.5.3)$$

По (3.5.6) и (3.5.7) гл. IV тензоры \hat{T}^0 , \hat{T}_*^0 равны

$$\left. \begin{aligned} \hat{T}^0 &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3} \left[(1-2\nu)(\hat{E}P \cdot R - PR - RP) - \frac{3RR}{R^2} P \cdot R \right], \\ \hat{T}_*^0 &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)R_*^3} \left[(1-2\nu)(\hat{E}P_* \cdot R_* - P_*R_* - R_*P_*) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3R_*R_*}{R_*^2} P_* \cdot R_* \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.4)$$

Но на плоскости $z = 0$

$$R = R_* = R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2},$$

так что

$$- (i_3 \cdot \hat{T}')|_{z=0} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)R_0^3} i_3 \left[(1-2\nu)(P_1x + P_2y + P_3h) - \right. \\ \left. - \frac{3h^2}{R_0^2} (P_1x + P_2y - P_3h) \right], \quad (2.5.5)$$

и краевое условие (2.5.3) приводит к задаче о напряженном состоянии полупространства при только нормальном нагружении ограничивающей его плоскости, что, конечно, ожидалось по соображениям симметрии. Краевые условия записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} z=0: \sigma'_z &= - \frac{P_3h}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1-2\nu}{R_0^3} + \frac{3h^2}{R_0^5} \right) - \\ &\quad - \frac{P_1x + P_2y}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1-2\nu}{R_0^3} - \frac{3h^2}{R_0^5} \right), \\ \tau'_{xz} &= 0, \quad \tau'_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.6)$$

Далее по отдельности рассматриваются каждая из групп слагаемых, входящих в условия (2.5.6). Пары гармонических функций ω и ω_1 , решающих эти задачи (п. 2.3), обозначим соответственно ω' , ω'_1 и ω'' , ω''_1 .

По (2.3.5) имеем

$$\frac{\partial \omega'}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow 0} = - \frac{P_3h}{2(1-\nu)} \left(\frac{1-2\nu}{R_0^3} + \frac{3h^2}{R_0^5} \right) = - \frac{P_3h}{R_0^3} - \frac{P_3h}{2(1-\nu)} \left(- \frac{1}{R_0^3} + \frac{3h^2}{R_0^5} \right) \quad (2.5.7)$$

и вместе с тем

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_*} = - \frac{z+h}{R_*^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R_*} = - \frac{1}{R_*^3} + \frac{3(z+h)^2}{R_*^5}.$$

Это позволяет переписать (2.5.7) в виде

$$\frac{\partial \omega'}{\partial z} \Big|_{z=0} = \left[P_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_*} - \frac{P_3 h}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R_*} \right]_{z=0}. \quad (2.5.8)$$

Правая часть представляет значение на границе области функции, гармонической в области $z > 0$; $\partial \omega' / \partial z$ — также гармоническая в этой области функция. Итак, равенство (2.5.8) выполняется во всем полупространстве $z > 0$. Поэтому, сославшись еще на (2.3.8), имеем

$$\omega' = \frac{P_3}{R_*} - \frac{P_3 h}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_*}, \quad \omega'_1 = P_3 \ln(R_* + z + h) - \frac{P_3 h}{2(1-\nu)} \frac{1}{R_*}. \quad (2.5.9)$$

Аналогичное вычисление проводится для второй пары слагаемых в краевом условии (2.5.6). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{x}{R_*^3} &= - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_*} = - \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \ln(R_* + z + h), \\ \frac{3x(z+h)}{R_*^5} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \frac{1}{R_*} \end{aligned}$$

и поэтому, сославшись также на (1.4.8), имеем

$$\left. \begin{aligned} \omega'' &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + P_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[(1-2\nu) \ln(R_* + z + h) + \frac{h}{R_*} \right], \\ \omega''_1 &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + P_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \times \\ &\times \{ (1-2\nu)(z+h) [\ln(R_* + z + h) - R_*] + h \ln(R_* + z + h) \}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.10)$$

Решение задачи дается потенциалами

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega' + \omega'' = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{P_3}{R_*} + \\ &+ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \mathbf{P} \cdot \nabla \ln(R_* + z + h) + \frac{h}{2(1-\nu)} \mathbf{P}_* \cdot \nabla \frac{1}{R_*}, \\ \omega_1 &= \omega'_1 + \omega''_1 = \frac{1}{2(1-\nu)} P_3 \ln(R_* + z + h) + \\ &+ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \mathbf{P} \cdot \nabla [(z+h) \ln(R_* + z + h) - R_*] + \\ &+ \frac{h}{2(1-\nu)} \mathbf{P}_* \cdot \nabla \ln(R_* + z + h). \end{aligned} \right\} \quad (2.5.11)$$

Вектор перемещения вычисляется по формулам (3.5.8), (3.5.9) гл. IV и (2.3.4). Этим решена задача о построении тензора влияния для упругого полупространства.

2.6. Температурные напряжения в упругом полупространстве. Далее применяется соотношение (3.4.3) гл. IV в предположе-

нии, что $\hat{G}(M, Q)$ — тензор влияния для упругого полупространства. Достаточно знать дивергенцию этого тензора, равную сумме дивергенций от перемещений u^0 , u_*^0 , u' , соответствующих тензорам напряжений \hat{T}^0 , \hat{T}_*^0 , \hat{T}' , которые были определены в п. 2.5. Выражение первой дается формулой (1.5.1), а вторая находится заменой R на R_* . Получаем

$$\operatorname{div} u^0(M, Q) = \frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \nabla \frac{1}{R} \cdot P,$$

$$\operatorname{div} u_*^0(M, Q) = \frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \nabla \frac{1}{R_*} \cdot P_* = \frac{1-2\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \left(\nabla \frac{1}{R_*} \cdot P - 2P_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_*} \right).$$

Дивергенцию вектора перемещения u' находим, пользуясь формулами (2.5.11) и (2.3.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u' &= \frac{1-2\nu}{2\pi\mu} \frac{\partial \omega}{\partial z} = \\ &= \frac{1-2\nu}{4\pi\mu(1-\nu)} \left[P_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_*} + (1-2\nu) P \cdot \nabla \frac{1}{R_*} + h P_* \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_*} \right]. \end{aligned}$$

Сложив эти выражения и заменив P_* его значением (2.5.1), найдем

$$\operatorname{div} u = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{1}{2} \nabla \left(\frac{1}{R} + \frac{3-4\nu}{R_*} \right) + h \nabla \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_*} - 2h \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R_*} i_3 \right] \cdot P. \quad (2.6.1)$$

Вектор, умножаемый на P , представляет искомую дивергенцию тензора влияния в полупространстве от единичной силы в точке $Q(0, 0, h)$; при переносе этой точки в точку с координатами (ξ, η, ζ) , далее также называемую Q , надо лишь заменить h на ζ , а R и R_* на

$$\left. \begin{aligned} R &= [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}, \\ R_* &= [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.2)$$

По (3.4.3) гл. IV имеем теперь

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) = u(Q) &= \frac{1+\nu}{2\pi(1-\nu)} \alpha \int_V \int \theta(M) \left[\frac{1}{2} \operatorname{grad}_M \left(\frac{1}{R} + \frac{3-4\nu}{R_*} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \nabla_M \frac{1}{R_*} - 2i_3 \zeta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R_*} \right] d\tau_M. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Здесь V — нагретый объем, целиком расположенный в полупространстве $z > 0$, $\theta(M)$ — распределение температуры в этом объеме; градиенты вычисляются в точке $M(x, y, z)$, которая теперь стала точкой истока. Имеем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{grad}_M \frac{1}{R} &= -\operatorname{grad}_Q \frac{1}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_*} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{R_*}, \\ \operatorname{grad}_M \frac{1}{R_*} &= -\operatorname{grad}_Q \frac{1}{R_*} + 2i_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{R_*}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.4)$$

Учитывая их, можно представить (2.6.3) в виде

$$u(Q) = \nabla_Q \chi_1 + (3 - 4\nu) \left(\nabla_Q - 2i_3 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \chi_2 + 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla_Q \chi_2, \quad (2.6.5)$$

где введены потенциалы

$$\chi_1 = -\frac{1+\nu}{4\pi(1-\nu)} \alpha \int \int_V \frac{\theta(M)}{R} d\tau_M, \quad \chi_2 = -\frac{1+\nu}{4\pi(1-\nu)} \alpha \int \int_V \frac{\theta(M)}{R_*} d\tau_M. \quad (2.6.6)$$

Слагаемое, определяемое потенциалом χ_1 , представляет поле перемещений, рассмотренное в п. 1.5 для неограниченной упругой среды. Функция χ_2 — гармоническая в полупространстве $z > 0$; вычисляемые по ней напряжения

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= 2\mu \left(2z \frac{\partial^3 \chi_2}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x \partial z} \right), \\ \tau_{yz} &= 2\mu \left(2z \frac{\partial^3 \chi_2}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial y \partial z} \right), \\ \sigma_z &= 2\mu \left(2z \frac{\partial^3 \chi_2}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6.7)$$

аннулируют на плоскости $z = 0$ напряжения, определяемые потенциалом χ_1 .

2.7. Случай установившейся температуры. В установившемся режиме температура $\theta(x, y, z)$ — гармоническая в полупространстве $z > 0$ функция; предполагается известным ее значение на границе $z = 0$:

$$\theta(x, y, 0) = \begin{cases} \theta_0(x, y, 0), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Поэтому, введя в рассмотрение потенциал простого слоя с плотностью $-\theta_0/2\pi$:

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Omega} \frac{\theta_0(x', y', 0)}{R'} d\sigma', \quad R' = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{1/2}, \quad (2.7.2)$$

можно записать решение задачи теплопроводности для полупространства в виде

$$\theta(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (2.7.3)$$

Действительно, определяемая этим равенством функция — гармоническая; она удовлетворяет краевому условию (2.7.1), что следует из (2.3.6).

Переходя к решению задачи теории упругости, удержим в решении Папковича — Нейбера (1.4.10) гл. IV две гармонические функции B_3 и B_0 :

$$u = 4(1-\nu) i_3 B_3 - \nabla(zB_3 + B_0) + \nabla\psi, \quad (2.7.4)$$

причем последним слагаемым учитывается наличие температурного поля, а функция, обозначенная здесь ψ , представляет частное решение уравнения (1.14.8) гл. IV:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta. \quad (2.7.5)$$

Компоненты напряжения на площадках, перпендикулярных оси z , вычисляемые по (2.4.1) с учетом в (2.7.4) слагаемого $\nabla \psi$, оказываются равными

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial M}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \sigma_z = \mu \left(4 \frac{\partial B_3}{\partial z} - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta + \frac{\partial M}{\partial z} \right), \quad (2.7.6)$$

где для краткости принято

$$M = 4(1-\nu) B_3 - 2 \frac{\partial}{\partial z} (z B_3 + B_0) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.7.7)$$

Оказывается возможным распорядиться выбором B_3 и B_0 так, чтобы обратить M в нуль. Для этого примем

$$z B_3 = \psi, \quad \frac{\partial B_0}{\partial z} = 2(1-\nu) B_3. \quad (2.7.8)$$

Из первого равенства и из (2.7.5), (2.7.3) имеем

$$\nabla^2 z B_3 = 2 \frac{\partial B_3}{\partial z} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta, \quad B_3 = \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \alpha \Phi(x, y, z), \quad (2.7.9)$$

и, поскольку Φ — гармоническая функция, такой выбор B_3 возможен. Возвращаясь к формулам (2.7.6), приходим к результату, возможность которого было трудно предвидеть: при установившемся тепловом режиме полупространства отсутствуют температурные напряжения на плоскостях, параллельных его границе*):

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad (z \geq 0). \quad (2.7.10)$$

Теперь находим по (2.7.8) и (2.7.2)

$$B_0 = -\frac{1}{2\pi} (1+\nu) \alpha \int_{\Omega} \theta_0(x', y', 0) \ln(R' + z) d\sigma', \quad (2.7.11)$$

и, сославшись на (2.7.4), можно записать выражения проекций вектора перемещения:

$$u = -\frac{\partial B_0}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial B_0}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial B_0}{\partial z}. \quad (2.7.12)$$

Через эту же гармоническую функцию B_0 определяется

*) Это свойство сохраняется и в задаче о тепловых напряжениях в упругом слое при установившейся температуре.

температура:

$$(1 + \nu) \alpha \theta(x, y, z) = \frac{\partial^2 B_0}{\partial z^2}. \quad (2.7.13)$$

Выражения отличных от нуля компонент тензора напряжения, вычисляемого по (1.14.1) гл. IV, записываются в виде

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = 2\mu \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -2\mu \frac{\partial^2 B_0}{\partial x \partial y}. \quad (2.7.14)$$

2.8. О вычислении потенциала простого слоя по плоской области. Как показано выше, решение задач о напряженном состоянии в упругом полупространстве существенно зависит от знания потенциалов слоя, распределенного по плоской области, — в первую очередь потенциала простого слоя, через который более сложные потенциалы определяются интегрированием по z .

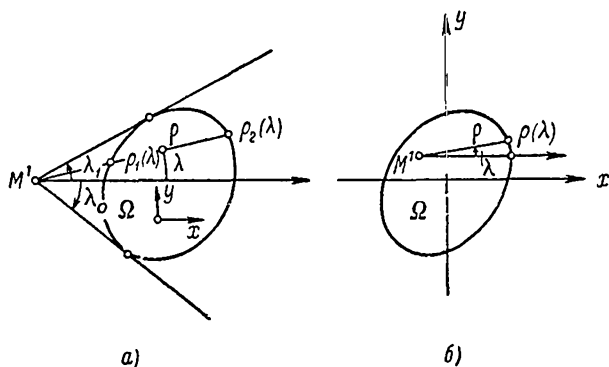


Рис. 16.

Пусть $M^1(x, y, 0)$ обозначает проекцию точки наблюдения $M(x, y, z)$ на плоскость $z = 0$; принимая M^1 за начало полярной системы координат (ρ, λ) , имеем

$$x' - x = \rho \cos \lambda, \quad y' - y = \rho \sin \lambda, \quad d\sigma' = \rho d\rho d\lambda, \quad R'^2 = \rho^2 + z^2. \quad (2.8.1)$$

Выражение потенциала простого слоя (2.3.2) теперь записывается в виде

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) &= \\ &= \int_{\Omega} \int \frac{p(x', y')}{R'} d\sigma' \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \int_{\rho_1(\lambda)}^{\rho_2(\lambda)} (\rho^2 + z^2)^{-1/2} p(x + \rho \cos \lambda, y + \rho \sin \lambda) \rho d\rho d\lambda = \\ &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \int_{\rho_1(\lambda)}^{\rho_2(\lambda)} p(x + \rho \cos \lambda, y + \rho \sin \lambda) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Обозначения указаны на рис. 16, а при $M^1 \notin \Omega$; при $M^1 \in \Omega$ следует принять $\rho_1(\lambda) = 0$, $\rho_2 = \rho(\lambda)$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2\pi$ (рис. 16, б).

Вычисление упрощается, когда значение потенциала разыскивается в точках плоскости $z = 0$. Тогда

$$\omega(x, y, 0) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \Theta(x, y, \lambda) d\lambda, \quad (2.8.3)$$

где

$$\Theta(x, y, \lambda) = \int_{\rho_1(\lambda)}^{\rho_2(\lambda)} p(x + \rho \cos \lambda, y + \rho \sin \lambda) d\rho. \quad (2.8.4)$$

При постоянной плотности ($p = \text{const}$)

$$\omega(x, y, z) = p \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(\sqrt{\rho_2^2(\lambda) + z^2} - \sqrt{\rho_1^2(\lambda) + z^2} \right) d\lambda \quad (2.8.5)$$

и, в частности, на плоскости $z = 0$

$$\omega(x, y, 0) = p \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} [\rho_2(\lambda) - \rho_1(\lambda)] d\lambda. \quad (2.8.6)$$

Например, вычисление по этой формуле потенциала круговой области Ω радиуса a дает

$$\omega(r, 0) = \begin{cases} 4paE\left(\frac{r}{a}\right), & M \subset \Omega, \\ 4pr\left[E\left(\frac{a}{r}\right) - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)K\left(\frac{a}{r}\right)\right], & M \not\subset \Omega, \end{cases} \quad (2.8.7)$$

где r — расстояние точки наблюдения $M(x, y, 0)$ от центра диска, $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

2.9. Задача Дирихле для полупространства. Гармоническая в полупространстве $z > 0$ функция $W_*(x, y, z)$, представляющая потенциал двойного слоя плотности $\mu(x, y)$, распределенного по области Ω плоскости $z = 0$, определяется равенством

$$W_*(x, y, z) = z \iint_{\Omega} \frac{\mu(\xi, \eta)}{R'^3} d\xi d\eta = - \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\Omega} \frac{\mu(\xi, \eta)}{R'} d\xi d\eta = - \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad (2.9.1)$$

где, как выше, $R' = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}$, а функция $\omega(x, y, z)$

$$\omega(x, y, z) = \iint_{\Omega} \frac{\mu(\xi, \eta)}{R'} d\xi d\eta \quad (2.9.2)$$

представляет потенциал простого слоя той же плотности $\mu(x, y)$. По (2.3.6)

$$W_*(x, y, z)|_{z \rightarrow \pm 0} = -\frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \pm 0} = \begin{cases} \pm 2\pi\mu(x, y), & (x, y) \subset \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

Поэтому гармоническая функция

$$W(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\mu(\xi, \eta)}{R^3} d\xi d\eta \quad (2.9.3)$$

дает в полупространстве $z > 0$ решение задачи Дирихле

$$z = 0: \quad W(x, y, z) = \begin{cases} \mu(x, y), & (x, y) \subset \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (2.9.4)$$

Пусть точка наблюдения $M(x, y, z)$ расположена внутри цилиндра с основанием Ω и образующими, параллельными оси z . Рассмотрим сначала случай постоянной на Ω плотности; тогда по (2.8.5) и (2.9.1)

$$\omega(x, y, z) = \mu \int_0^{2\pi} (\sqrt{\rho^2(\lambda) + z^2} - z) d\lambda,$$

$$W(x, y, z) = \mu - \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z d\lambda}{\sqrt{\rho^2(\lambda) + z^2}}$$

и, далее,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2(\lambda) d\lambda}{[\rho^2(\lambda) + z^2]^{3/2}}, \quad \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{\rho(\lambda)}. \quad (2.9.5)$$

Заметим, что правая часть не является постоянной, так как $\rho(\lambda)$ зависит от выбора начала $(x, y, 0)$ системы полярных координат ρ, λ . В общем случае задания плотности, записав (2.8.2) в виде

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\rho(\lambda)} [\mu(x + \rho \cos \lambda, y + \rho \sin \lambda) - \mu(x, y)] \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \\ + \mu(x, y) \int_0^{2\pi} (\sqrt{\rho^2(\lambda) + z^2} - z) d\lambda, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} W(x, y, z) = & \frac{z}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\rho(\lambda)} [\mu(x + \rho \cos \lambda, y + \rho \sin \lambda) - \mu(x, y)] \times \\ & \times \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \mu(x, y) - \frac{\mu(x, y)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z d\lambda}{\sqrt{\rho^2(\lambda) + z^2}} \end{aligned} \quad (2.9.6)$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\rho(\lambda)} [\mu(x + \rho \cos \lambda, y + \rho \sin \lambda) - \mu(x, y)] \frac{\rho^3 - 2\rho z^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho - \\ & - \frac{\mu(x, y)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2(\lambda) d\lambda}{[\rho^2(\lambda) + z^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} \mu(x + \rho \cos \lambda, y + \rho \sin \lambda) - \mu(x, y) = \\ = \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial \mu}{\partial y} \sin \lambda \right) + \rho^2 g(\rho, \lambda; x, y), \end{aligned} \quad (2.9.7)$$

где $g(\rho, \lambda; x, y)$ конечно при $\rho = 0$, и учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho(\lambda)} \frac{\rho^4 - 2\rho^2 z^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho = & - \frac{\rho(\lambda)}{\sqrt{\rho^2(\lambda) + z^2}} - \\ & - \frac{\rho^3(\lambda)}{[\rho^2(\lambda) + z^2]^{3/2}} + \ln[\rho(\lambda) + \sqrt{\rho^2(\lambda) + z^2}] - \ln z, \end{aligned}$$

легко получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow 0} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial \mu}{\partial y} \sin \lambda \right) \ln \rho(\lambda) d\lambda - \\ & - \frac{1}{2\pi} \mu(x, y) \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{\rho(\lambda)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\rho(\lambda)} g(\rho, \lambda; x, y) d\rho. \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

Этим доказано, что в предположении о представимости плотности в форме (2.9.7) нормальная производная потенциала двойного слоя будет конечной, когда точка наблюдения, остающаяся внутри упомянутого цилиндра, переходит в точку $(x, y) \in \Omega$.

Сославшись на (2.9.1), (2.8.2), имеем также

$$\frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \int_{\rho_1(\lambda)}^{\rho_2(\lambda)} \mu(x + \rho \cos \lambda, y + \rho \sin \lambda) \frac{d\rho}{\rho^2}, \quad (2.9.9)$$

$$(x, y) \notin \Omega,$$

и не может возникнуть сомнения, что нормальная производная в этом случае также конечна; она равна нулю на бесконечности, так как при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ разность $\lambda_1 - \lambda_0 \rightarrow 0$.

2.10. Первая краевая задача для полупространства. Предполагается, что на плоскости $z = 0$ даны значения перемещений $z = 0$: $u = u_0(x, y)$, $v = v_0(x, y)$, $w = w_0(x, y)$. (2.10.1)

Исходим из решения уравнений теории упругости в форме Теодоне (1.3.10) гл. IV:

$$u = a_1 - \frac{x\vartheta}{2(1-2\nu)}, \quad v = a_2 - \frac{y\vartheta}{2(1-2\nu)}, \quad w = a_3 - \frac{z\vartheta}{2(1-2\nu)}, \quad (2.10.2)$$

где a_1, a_2, a_3, ϑ — гармонические функции. Из третьего уравнения (2.10.2) имеем, сославшись на (2.9.3),

$$a_3|_{z=0} = w_0(x, y), \quad a_3 = \frac{z}{2\pi} \iint \frac{w_0(\xi, \eta)}{R'^3} d\xi d\eta. \quad (2.10.3)$$

Этим определена функция $a_3(x, y, z)$ и ее производные в области $z \geq 0$. Теперь имеем

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \vartheta - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial a_3}{\partial z} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \left(\vartheta + z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right), \quad (2.10.4)$$

так что

$$\vartheta|_{z=0} = \frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu} \left(\frac{\partial a_3}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right). \quad (2.10.5)$$

Отсюда по (2.9.3) находим

$$\vartheta(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint \frac{\vartheta(\xi, \eta, 0)}{R'^3} d\xi d\eta. \quad (2.10.6)$$

Теперь имеем

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{z}{2\pi} \iint \left[u_0(\xi, \eta) + \frac{\xi \vartheta(\xi, \eta, 0)}{2(1-2\nu)} \right] \frac{d\xi d\eta}{R'^3}, \\ a_2 &= \frac{z}{2\pi} \iint \left[v_0(\xi, \eta) + \frac{\eta \vartheta(\xi, \eta, 0)}{2(1-2\nu)} \right] \frac{d\xi d\eta}{R'^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10.7)$$

и остается подставить найденные значения четырех гармонических a_s, ϑ в исходные уравнения (2.10.2).

2.11. Смешанные задачи для полупространства. Предполагается, что на плоскости $z = 0$ заданы перемещения u , v и нормальное напряжение σ_z :

$$z = 0: \quad u = u_0(x, y), \quad v = v_0(x, y), \quad \sigma_z = \sigma_z^0(x, y). \quad (2.11.1)$$

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_z}{2\mu} &= \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \vartheta - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \vartheta &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\sigma_z}{2\mu} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.11.2)$$

и гармоническая функция ϑ , известная на границе

$$z = 0: \quad \vartheta(x, y, 0) = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\sigma_z^0}{2\mu} + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right), \quad (2.11.3)$$

определяется решением (2.9.3) задачи Дирихле

$$\vartheta(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint \frac{\vartheta(\xi, \eta, 0)}{R'^3} d\xi d\eta. \quad (2.11.4)$$

Теперь по (2.10.4) и (2.11.3) имеем

$$z = 0: \quad \left. \frac{\partial a_3}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \frac{\sigma_z^0}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = \rho(x, y),$$

и гармоническая функция a_3 представляется потенциалом простого слоя

$$a_3(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\rho(\xi, \eta)}{R'} d\xi d\eta, \quad (2.11.5)$$

тогда как a_1 , a_2 определяются формулами (2.10.7), в которых $\vartheta(\xi, \eta, 0)$ должно быть заменено по (2.11.3).

Перейдем к рассмотрению другой смешанной задачи — на плоскости $z = 0$ заданы касательные напряжения и перемещение w :

$$z = 0: \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^0(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^0(x, y), \quad w = w_0(x, y). \quad (2.11.6)$$

По (2.10.2), решая задачу Дирихле для гармонической функции a_3 , имеем

$$a_3(x, y) = \frac{z}{2\pi} \iint \frac{w_0(\xi, \eta)}{R'^3} d\xi d\eta. \quad (2.11.7)$$

Теперь, сославшись на уравнение в перемещениях (1.3.3) гл. IV, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nabla^2 w, \end{aligned}$$

так что

$$z=0: \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \\ = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \tau_{xz}^0}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^0}{\partial y} \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] = \rho(x, y) \quad (2.11.8)$$

и гармоническая функция ϕ определяется как потенциал простого слоя

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint \frac{\rho(\xi, \eta)}{R'} d\xi d\eta. \quad (2.11.9)$$

Перемещение $w(x, y, z)$ находим по (2.11.7) и (2.10.2). Гармонические функции a_1, a_2 определяются теперь как потенциалы простых слоев по условиям

$$\left. \frac{\partial a_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{\mu} \tau_{xz}^0 - \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{x\rho(x, y)}{2(1-2\nu)}, \\ \left. \frac{\partial a_2}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{\mu} \tau_{yz}^0 - \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{y\rho(x, y)}{2(1-2\nu)}.$$

Получаем

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2\pi} \iint \left[\frac{1}{\mu} \tau_{xz}^0(\xi, \eta) - \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + \frac{\xi\rho(\xi, \eta)}{2(1-2\nu)} \right] \frac{d\xi d\eta}{R'}, \\ a_2 &= -\frac{1}{2\pi} \iint \left[\frac{1}{\mu} \tau_{yz}^0(\xi, \eta) - \frac{\partial w_0}{\partial \eta} + \frac{\eta\rho(\xi, \eta)}{2(1-2\nu)} \right] \frac{d\xi d\eta}{R'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11.10)$$

В приведенных решениях предполагается дифференцируемость нагрузок $\tau_{xz}^0(x, y)$, $\tau_{yz}^0(x, y)$ и двукратная дифференцируемость перемещения $w_0(x, y)$.

2.12. О принципе Сен-Венана. Формулировка Мизеса. В пп. 1.1 и 1.2 этой главы рассматривалось напряженное состояние в неограниченном упругом пространстве, создаваемое силами, распределенными в малом объеме, на достаточном удалении от него. Было показано, что, ограничиваясь учетом величин первой степени относительно линейных размеров этого объема, можно заменить действие такой системы сил ее интегральными характеристиками — главным вектором, главным моментом и силовым тензором. Оказалось, что на достаточном удалении точки наблюдения напряжения, создаваемые главным моментом, имеют тот же порядок, что и создаваемые силовым тензором. Здесь будет показано, что это же явление констатируется и в упругом полупространстве $z > 0$ при нагружении его силами, распределенными по малой площадке o его границы $z = 0$.

Выберем начало координат в точке O площадки o , через $\rho = i_1\xi + i_2\eta$ обозначатся вектор-радиус какой-либо точки Q

этой площадки (точки истока), через $\mathbf{R} = \overrightarrow{OM}$ — вектор-радиус точки наблюдения; тогда $\mathbf{R}' = \overrightarrow{QM} = \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}$, причем $\rho \leq \varepsilon$, где ε — радиус круга с центром в O , в который можно заключить площадку. С точностью до величин порядка ε/R , подобно (1.1.4), имеем

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R^3} \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{R}. \quad (2.12.1)$$

Потенциалы φ_1 , φ_2 , ω , введенные в п. 2.4, будем считать компонентами вектора

$$\Phi = \iint_O \mathbf{f}(\xi, \eta) \frac{d\sigma}{R'} = \frac{1}{R} \iint_O \mathbf{f}(\xi, \eta) d\sigma + \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot \iint_O \boldsymbol{\rho} \mathbf{f}(\xi, \eta) d\sigma, \quad (2.12.2)$$

причем вектор плотности $\mathbf{f}(\xi, \eta)$ представляет поверхностную силу, компоненты которой были обозначены q_1 , q_2 , p , а интегралы в (2.12.2) представляют главный вектор \mathbf{F} системы сил и ее силовой тензор; последний разбиваем на симметричную \hat{p} и кососимметричную $\hat{\Omega}$ части:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \iint_O \mathbf{f}(\xi, \eta) d\sigma, \quad \iint_O \boldsymbol{\rho} \mathbf{f}(\xi, \eta) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \iint_O (\boldsymbol{\rho} \mathbf{f} + \mathbf{f} \boldsymbol{\rho}) d\sigma + \frac{1}{2} \iint_O (\boldsymbol{\rho} \mathbf{f} - \mathbf{f} \boldsymbol{\rho}) d\sigma = \hat{p} + \hat{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.12.3)$$

Вместе с тем

$$\mathbf{R} \cdot \hat{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot \iint_O (\boldsymbol{\rho} \mathbf{f} - \mathbf{f} \boldsymbol{\rho}) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_O (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{f}) d\sigma \times \mathbf{R} = \frac{1}{2} \mathbf{m}^0 \times \mathbf{R}, \quad (2.12.4)$$

причем

$$\mathbf{m}^0 = \iint_O \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{f} d\sigma, \quad (2.12.5)$$

где \mathbf{m}^0 — главный момент системы сил \mathbf{f} относительно точки O . Итак, в приближении (2.12.1)

$$\Phi = \frac{1}{R} \mathbf{F} + \frac{1}{2R^3} \mathbf{m}^0 \times \mathbf{R} + \frac{1}{R^3} \mathbf{R} \cdot \hat{p}. \quad (2.12.6)$$

По (2.4.17) и (2.4.18) вектор напряжения на площадках, перпендикулярных оси z , рассмотрением которого ограничимся, чтобы не загромождать вычисления, будет

$$\mathbf{k} \cdot \hat{T} = \frac{1}{2\pi} (\mathbf{k} \cdot \nabla \Phi - z \nabla \nabla \cdot \Phi). \quad (2.12.7)$$

Вычисление дает

$$\nabla \Phi = -\frac{1}{R^3} \mathbf{R} \mathbf{F} - \frac{1}{2R^3} \mathbf{m}^0 \times \hat{E} - \frac{3}{2R^5} \mathbf{R} \mathbf{m}^0 \times \mathbf{R} - \frac{3}{R^5} \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \hat{p} + \frac{1}{R^3} \hat{p},$$

где \hat{E} — единичный тензор. Поэтому

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \Phi &= -\frac{1}{R^3} \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} - \frac{3}{R^5} \mathbf{R} \cdot \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} + \frac{1}{R^3} I_1(\hat{\rho}) = \\ &= -\frac{1}{R^3} \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} - \frac{3}{R^5} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\nabla \nabla \cdot \Phi &= -\frac{1}{R^3} \mathbf{F} + \frac{3}{R^5} \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} + \frac{15}{R^7} \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} - \frac{6}{R^5} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho}, \\ \mathbf{k} \cdot \nabla \Phi &= -\frac{z}{R^3} \mathbf{F} - \frac{1}{2R^3} \mathbf{k} \times \mathbf{m}^0 - \frac{3z}{2R^5} \mathbf{m}^0 \times \mathbf{R} - \frac{3z}{R^5} \mathbf{R} \cdot \hat{\rho} + \frac{1}{R^3} \mathbf{k} \cdot \hat{\rho},\end{aligned}$$

и последнее выражение упрощается, если заметить, что, поскольку $\mathbf{k} \cdot \rho = 0$,

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\rho} - \frac{1}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{m}^0 = \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot \int_Q \mathbf{f} \rho \, d\mathbf{o} - \frac{1}{2} \mathbf{k} \times \int_0 \rho \times \mathbf{f} \, d\mathbf{o} = 0.$$

После подстановки в (2.12.7) получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \hat{T} &= \frac{z}{2\pi R^5} \left(-3\mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} - \frac{3}{2} \mathbf{m}^0 \times \mathbf{R} - R I_1(\hat{\rho}) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} - \frac{15}{R^2} \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \text{Dev } \hat{\rho} \cdot \mathbf{R} \right).\end{aligned}\quad (2.12.8)$$

Естественно, что это выражение обращается в нуль при $z = 0$, так как точка наблюдения должна оставаться вне площадки нагружения. Как и для случая неограниченного пространства, вектор напряжения оказался представленным через главный вектор, главный момент, первый инвариант и девиатор силового тензора.

Слагаемое, определяемое главным вектором, имеет порядок $F/R^2 = \sigma$, тогда как все остальные слагаемые имеют порядок $\sigma/R\epsilon$ независимо от того, является ли система статически эквивалентной нулю или нет (то есть будет ли при $\mathbf{F} = 0$ также $\mathbf{m}^0 = 0$ или нет). Это заставляет принять более осторожную формулировку принципа Сен-Венана (п. 2.8 гл. IV), предложенную Мизесом (1945): порядок величин напряжений, создаваемых в упругом теле силами, распределенными по малым участкам его границы, на конечном удалении от этих участков уменьшается, если нагружение каждого из них статически эквивалентно нулю.

2.13. Сверхстатическая система сил. Статически эквивалентная нулю система сил называется сверхстатической при обращении в нуль ее силового тензора:

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{m}^0 = 0, \quad \hat{\rho} = 0 \quad (2.13.1)$$

При нагружении малого участка o границы полупространства сверхстатической системой сил все слагаемые (2.12.8) будут нулями; на достаточном удалении от участка нагружения напряжения будут иметь по крайней мере порядок слагаемых $(\frac{e}{R})^2 \sigma$, неучтенных в принятом приближении (2.12.1).

Пример сверхстатической системы сил представляет статически эквивалентная нулю система сил, нормальных к границе полупространства (как в частной задаче Буссинеска); тогда $f_1 = f_2 = 0$ и

$$m_1^O = \int_O \rho_2 f_3 do = 0, \quad m_2^O = - \int_O \rho_1 f_3 do = 0, \quad m_3^O = 0,$$

а все остальные компоненты $\int_O \int f_k \rho_s do$ силового тензора будут нулями, так как $\rho_3 = 0$.

Более общий пример представляет система сил, остающаяся статически эквивалентной нулю при любом повороте входящих в нее сил. Обозначим \hat{f} повернутый вектор силы f ; тогда, сославшись на (I.8.1), (I.8.2), имеем $\hat{f} = f \cdot \hat{A}$, где \hat{A} — тензор поворота. Примем для простоты, что при сообщенном повороте силы повернулись на 90° вокруг оси i_s ; тогда

$$i'_k = i_s \times i_k, \quad \hat{A} = i_k i'_k = - i_k i_k \times i_s = - \hat{E} \times i_s,$$

$$\hat{f} = - f \cdot \hat{E} \times i_s = i_s \times f$$

и по условию

$$m'^O = \int_O \int \rho \times \hat{f} do = \int_O \int \rho \times (i_s \times f) do =$$

$$= i_s \int_O \int \rho \cdot f do - \int_O \int f \rho do \cdot i_s = 0.$$

По (2.12.3) при $m^O = 0$ силовой тензор симметричен, так что

$$\int_O \int f \rho do = \hat{p}, \quad i_s I_1(\hat{p}) - \hat{p} \cdot i_s = 0, \quad (2.13.2)$$

и из этого соотношения сразу же следует, что

$$I_1(\hat{p}) = p_{11} + p_{22} + p_{33} = i_s \cdot \hat{p} \cdot i_s = p_{ss} \quad (s = 1, 2, 3),$$

так что

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0. \quad (2.13.3)$$

Вместе с тем по (2.13.2) при $s \neq k$ имеем

$$i_k \cdot i_s I_1(\hat{p}) = 0 = i_k \cdot \hat{p} \cdot i_s = p_{ks}, \quad (2.13.4)$$

что доказывает предложение. Например, силовой диполь (рис. 17, а) не представляет сверхстатической системы сил, тогда как сочетание пар на рис. 17, б является примером сверхстатической системы.

2.14. Теоремы Стернберга (1954). Оценки быстроты убывания напряжений в упругом полупространстве, приведенные в п. 2.12, сохраняются в случае упругого тела конечных размеров, ограниченного поверхностью с непрерывной кривизной.

Предполагается, что поверхность тела нагружена по нескольким участкам, при выбранной единице длины имеющим линейные размеры порядка $\varepsilon \ll 1$; силы, распределенные по участку, конечны; поэтому порядки величин главного вектора,

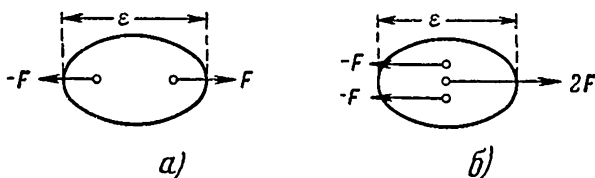


Рис. 17.

главного момента и силового тензора соответственно равны ε^2 , ε^3 , ε^3 . Через $\sigma(x, \varepsilon)$ обозначается компонент напряжения, создаваемого нагружением по одному из участков, в точке наблюдения, находящейся от него на расстоянии $x \geq 1$. Порядок этой величины обозначается ε^m :

$$\sigma(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^m).$$

Стернберг доказал следующие предложения: 1) $m \geq 2$, если главный вектор системы сил на рассматриваемом участке отличен от нуля; 2) $m \geq 3$, если он равен нулю, а также в случае статически эквивалентной нулю системы сил (то есть и при обращении в нуль также и главного момента); $m \geq 4$, если система сил на участке сверхстатическая.

Сказанное непосредственно следует из формул Лауричелла (1.2.20) — (1.2.23). Пусть o_k — один из участков загрузки, M_k^0 — фиксированная, M_k — любая точка на нем, так что $\vec{M_k^0 M_k} = \rho_k$ и по условию $\rho_k \leq \varepsilon$. Представив вектор $u^*(M_k)$ в виде

$$u^*(M_k) = u_k^{*0} + \rho_k \cdot \nabla u_k^{*0} + \dots \left(u_k^{*0} = u^*(M_k^0), \nabla u_k^{*0} = [\nabla u_k^*(M)]|_{\rho_k=0} \right), \quad (2.14.1)$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(M_k) \cdot \mathbf{F}^{(k)} &= \mathbf{u}_k^{*0} \cdot \mathbf{F}^{(k)} + \rho_k \cdot \nabla \mathbf{u}_k^{*0} \cdot \mathbf{F}^{(k)} + \dots \\ &\dots = \mathbf{u}_k^{*0} \cdot \mathbf{F}^{(k)} + \nabla \mathbf{u}_k^{*0} \cdot \mathbf{F}^{(k)} \rho_k + \dots, \end{aligned}$$

так как второе слагаемое является первым инвариантом произведения тензора $\nabla \mathbf{u}_k^{*0}$ на тензор $\mathbf{F}^{(k)} \rho_k$. Итак, по (1.2.20)

$$\hat{\varepsilon}^{(k)} \cdot \hat{\rho} = \mathbf{u}_k^{*0} \cdot \int \int_{O_k} \mathbf{F}^{(k)} d\mathbf{o} + \nabla \mathbf{u}_k^{*0} \cdot \int \int_{O_k} \mathbf{F}^{(k)} \rho_k d\mathbf{o} + \dots, \quad (2.14.2)$$

и остается заметить, что первое слагаемое имеет порядок ε^2 площади загрузки, а второй — порядок ε^3 . Этим дается вышеприведенная оценка деформаций и значений напряжений в точках тела, расположенных на расстояниях $x \gg \varepsilon$. Напомним, что тензор $\hat{\rho}$ и вектор $\mathbf{u}_k^*(M)$ — вспомогательные средства в выводе формул Лауричелла; конечно, они никак не связаны с распределением сил на O_k и с определяемой этим распределением деформацией $\hat{\varepsilon}^{(k)}$.

§ 3. Равновесие упругой сферы

3.1. Постановка задачи. Решение первой и второй краевых задач для сферы разыскивается в предложенной Е. Треффтцем форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + (R^2 - R_0^2) \nabla \Psi. \quad (3.1.1)$$

Здесь R_0 — радиус сферы, $\mathbf{R} = i_s x_s$ — вектор-радиус, $\mathbf{U} = U_s i_s$ — гармонический вектор, Ψ — гармонический скаляр:

$$\nabla^2 U_s = 0, \quad \nabla^2 \Psi = 0. \quad (3.1.2)$$

Представление решения в форме Папковича — Нейбера в случае сферы не столь быстро ведет к цели, в особенности для первой краевой задачи.

Соотношения, связывающие гармонические функции U_s и Ψ , следуют из уравнений теории упругости в перемещениях. Последние при отсутствии объемных сил записываются в виде

$$(1 - 2\nu) \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.1.3)$$

По (3.1.1), (3.1.2) имеем

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 R^2 \nabla \Psi = 6 \nabla \Psi + 4 \mathbf{R} \cdot \nabla \nabla \Psi = \nabla (2 \Psi + 4 \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi), \quad (3.1.4)$$

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U} + 2 \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi), \quad (3.1.5)$$

и подстановка в (3.1.3) приводит к искомому соотношению

$$(1 - 2\nu) \Psi + (3 - 4\nu) \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (3.1.6)$$

Тензор деформации и объемное расширение представляются в виде

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{U} + \mathbf{R} \nabla \Psi + (\nabla \Psi) \mathbf{R} + (R^2 - R_0^2) \nabla \nabla \Psi, \\ \hat{\Theta} = I_1(\hat{\varepsilon}) = \nabla \cdot \mathbf{U} + 2\mathbf{R} \cdot \nabla \Psi. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Теперь легко составляется выражение вектора напряжения на поверхности сферы $R = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \hat{\mathbf{T}} = \frac{2\mu}{R} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{R} \nabla \cdot \mathbf{U} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi + \mathbf{R} \cdot \text{def } \mathbf{U} + R^2 \nabla \Psi + (R^2 - R_0^2) \mathbf{R} \cdot \nabla \nabla \Psi \right] \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

или

$$\frac{1}{2\mu} \mathbf{R} \mathbf{P}_R = \Pi + (R^2 - R_0^2) \mathbf{R} \cdot \nabla \nabla \Psi, \quad (3.1.9)$$

где в рассмотрение введен вектор

$$\Pi = \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{R} \nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi + \mathbf{R} \cdot \text{def } \mathbf{U} + R^2 \nabla \Psi. \quad (3.1.10)$$

Этот вектор оказывается гармоническим. Действительно, используя снова (3.1.4), (3.1.5), имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{R} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}; & \nabla^2 \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi &= 2 \nabla (\mathbf{R} \cdot \nabla \Psi); \\ \nabla^2 \mathbf{R} \cdot \text{def } \mathbf{U} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}; & \nabla^2 R^2 \nabla \Psi &= 2 \nabla \Psi + 4 \nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi, \end{aligned}$$

и подстановка в (3.1.10) дает

$$\nabla^2 \Pi = \frac{2}{1-2\nu} \nabla \left[\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{U} + (1-2\nu) \Psi + (3-4\nu) \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi \right].$$

Но величина в скобках по (3.1.6) равна нулю; итак,

$$\nabla^2 \Pi = 0. \quad (3.1.11)$$

3.2. Первая краевая задача. Заданный на поверхности O сферы вектор перемещения \mathbf{u} представим в соответствии с п. VI.4 его разложением по сферическим векторам Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{R=R_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n(\mu, \lambda) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n0} P_n(\mu) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\mu) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Но по (3.1.1) значения на O гармонического вектора \mathbf{U} и вектора перемещения \mathbf{u} равны

$$\mathbf{U}|_{R=R_0} = \mathbf{u}|_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n(\mu, \lambda) \quad (3.2.2)$$

Поэтому, сославшись на (VI. 4. 2) имеем

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0} \right)^n Y_n(\mu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \quad (R < R_0), \quad (3.2.3)$$

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{n+1} Y_n(\mu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{-(n+1)} \quad (R > R_0). \quad (3.2.4)$$

Здесь $U_n, U_{-(n+1)}$ — однородные гармонические векторы степени n и $-(n+1)$. Гармонический скаляр Ψ будем также разыскивать в виде рядов по однородным гармоническим полиномам степени n для внутренней и $-(n+1)$ для внешней задачи:

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0} \right)^n Z_n(\mu, \lambda) \quad (R < R_0), \quad (3.2.5)$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{n+1} Z_{-(n+1)}(\mu, \lambda) \quad (R > R_0). \quad (3.2.6)$$

Здесь и далее при рассмотрении краевых задач для сферы многократно применяется теорема Эйлера об однородных функциях (VI. 2. 2):

$$R \cdot \nabla U_n = n U_n, \quad R \cdot \nabla \Psi_n = n \Psi_n. \quad (3.2.7)$$

Пользуясь ею и основным соотношением (3.1.6), имеем

$$(1 - 2\nu) \Psi_{n-1} + (3 - 4\nu)(n - 1) \Psi_{n-1} + \frac{1}{2} \nabla \cdot U_n = 0,$$

так что

$$\Psi_{n-1} = - \frac{1}{2} \frac{\nabla \cdot U_n}{3n - 2 - 2\nu(2n - 1)} \quad (3.2.8)$$

и, далее,

$$\nabla \Psi_{n-1} = - \frac{1}{2} \frac{\text{grad div } U_n}{3n - 2 - 2\nu(2n - 1)}, \quad (3.2.9)$$

причем $\nabla \cdot U_0 = \nabla \cdot a_{00} = 0$. По (3.1.1) имеем теперь

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} [U_n + (R^2 - R_0^2) \nabla \Psi_{n-1}],$$

где по сказанному $\Psi_{-1} = 0$. Итак, решение внутренней задачи представляется рядом

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left[U_n + \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2) \frac{\text{grad div } U_n}{3n - 2 - 2\nu(2n - 1)} \right] \quad (R < R_0). \quad (3.2.10)$$

Решение внешней задачи получим при замене под знаком суммы n на $-(n+1)$:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left[U_{-(n+1)} + \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \frac{\text{grad div } U_{-(n+1)}}{3n+5-2\nu(2n+3)} \right] \quad (R > R_0). \quad (3.2.11)$$

Здесь по (3.2.3), (3.2.4)

$$U_n = \left(\frac{R}{R_0} \right)^n Y_n(\mu, \lambda), \quad U_{-(n+1)} = \left(\frac{R_0}{R} \right)^{n+1} Y_n(\mu, \lambda), \quad (3.2.12)$$

а векторы $Y_n(\mu, \lambda)$ — сферические векторы Лапласа, задаваемые разложением (3.2.1).

3.3. Эластостатическая задача Робена для шара. В соответствии с п. 4.7 гл. IV речь идет о напряженном состоянии в упругой среде, когда впаянному в нее твердому шару сообщается малое перемещение

$$u^* = u_0 + \omega \times R. \quad (3.3.1)$$

Здесь u_0 и ω — постоянные векторы. Точкам ограничивающей среду полости O , поверхности шара $R = R_0$, сообщается перемещение

$$u|_{R=R_0} = u^*|_{R=R_0} = u_0 + \omega \times R_0, \quad (3.3.2)$$

где R_0 — вектор-радиус точки на O . Правая часть (3.3.2) уже представлена суммой сферических векторов Лапласа нулевого и первого порядка

$$Y_0 = u_0, \quad Y_1 = \omega \times R_0.$$

Поэтому, сославшись на (3.2.4), имеем

$$U_{-1} = \frac{R_0}{R} u_0, \quad U_{-2} = \frac{R_0^3}{R^3} \omega \times R = -R_0^3 \omega \times \nabla \frac{1}{R}. \quad (3.3.3)$$

В общем выражении (3.2.11) имеем теперь

$$u = u_{-1} + u_{-2}, \quad (3.3.4)$$

причем

$$u_{-1} = U_{-1} + \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \frac{\text{grad div } U_{-1}}{5-6\nu},$$

$$u_{-2} = U_{-2} + \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \frac{\text{grad div } U_{-2}}{8-10\nu}.$$

Имеем

$$\text{div } U_{-1} = -\frac{R_0}{R^3} R \cdot u_0,$$

$$\text{grad div } U_{-1} = \frac{3R_0}{R^5} R R \cdot u_0 - \frac{R_0}{R^3} u_0; \quad \text{div } U_{-2} = 0,$$

и решение задачи дается формулами

$$u_{-1} = \frac{R_0}{R} u_0 + \frac{R^2 - R_0^2}{2(5-6\nu)} \frac{R_0}{R^3} \left(3 \frac{R}{R^2} R \cdot u_0 - u_0 \right), \quad (3.3.5)$$

$$u_{-2} = \frac{R_0^3}{R^3} \omega \times R. \quad (3.3.6)$$

Последняя формула определяет перемещение, создаваемое центром вращения [см. (1.2.12)]; там же был определен вектор напряжений на поверхности шара, а также главный момент сил, который следует приложить к шару, чтобы сообщить ему требуемый поворот ω ; главный вектор этих сил равен нулю.

Вычисление распределения напряжений, вызываемых поступательным смещением u_0 шара, более громоздко. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} = \text{def } u_{-1} = & \frac{3R_0}{2(5-6\nu)R^3} \left\{ - \left[(1-2\nu) + \frac{R_0^2}{R^2} \right] (Ru_0 + u_0R) + \right. \\ & \left. + \left[\hat{E} \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right) - 3 \frac{RR}{R^2} + 5 \frac{RR}{R^2} \frac{R_0^2}{R^2} \right] R \cdot u_0 \right\}, \\ \text{div } u_{-1} = & - \frac{1-2\nu}{5-6\nu} \frac{3R_0}{R^3} R \cdot u_0, \end{aligned}$$

и тензор напряжения на поверхности O оказывается равным

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \hat{T} \Big|_0 = & - \frac{3}{5-6\nu} \frac{1}{R_0^2} \left[(1-\nu)(R_0u_0 + u_0R_0) + \right. \\ & \left. + \nu \hat{E} R_0 \cdot u_0 - \frac{R_0R_0}{R_0^2} R_0 \cdot u_0 \right]. \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

Вектор напряжения на этой поверхности определяется теперь формулой

$$\frac{1}{2\mu} \hat{T} \cdot n = - \frac{1}{2\mu} \hat{T} \cdot \frac{R_0}{R_0} = \frac{3(1-\nu)}{(5-6\nu)R_0} u_0. \quad (3.3.8)$$

Поэтому главный вектор сил, сообщающий впамятому шару перемещение u_0 , равен

$$V = \frac{24\pi\mu(1-\nu)}{5-6\nu} R_0 u_0. \quad (3.3.9)$$

Их главный момент равен нулю.

3.4. Тепловые напряжения в шаре. Предполагается заданным установившееся распределение температуры θ на поверхности упругого шара, заключенного в абсолютно твердую оболочку. Иными словами, решение задачи разыскивается по условиям

$$\theta|_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\mu, \lambda), \quad u|_{R=R_0} = 0. \quad (3.4.1)$$

Здесь $Z_n(\mu, \lambda)$ — сферические функции Лапласа, по которым разлагается гармоническая при $R < R_0$ функция — температура

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0} \right)^n Z_n(\mu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n. \quad (3.4.2)$$

Частное решение u_* уравнений равновесия в перемещениях, соответствующее наличию в них температурного слагаемого, по (1.14.7) и (1.14.8) гл. IV определяется соотношениями

$$u_* = \nabla \chi, \quad \nabla^2 \chi = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \theta = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n. \quad (3.4.3)$$

Достаточно найти какое-либо частное решение χ этого уравнения. Оно разыскивается в виде

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n, \quad \nabla^2 \chi_n = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \theta_n.$$

Правая часть представляет однородный гармонический полином. Полагая

$$\chi_n = A_n R^{2n} \theta_n, \quad \nabla^2 \chi_n = A_n (6\theta_n + 4R \cdot \nabla \chi_n) = (6 + 4n) A_n \chi_n,$$

имеем

$$\chi = \frac{1}{2} \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} R^2 \frac{\theta_n}{2n+3},$$

так что

$$u_* = \nabla \chi = \frac{1}{2} \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} (2R \cdot \theta_n + R^2 \nabla \theta_n).$$

Решение разыскивается в виде суммы

$$u = v + u_* = v + \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_n}{2n+3} + \frac{1}{2} R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla \theta_n}{2n+3} \right), \quad (3.4.4)$$

причем вектор v , представляющий решение однородных уравнений равновесия в перемещениях, по (3.4.1) должен быть определен по краевому условию

$$v|_{R=R_0} = -\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[R_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(\mu, \lambda)}{2n+3} + \frac{1}{2} R_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} (\nabla \theta_n)_{R=R_0} \right]. \quad (3.4.5)$$

Вектор $\nabla \theta_n$, как градиент гармонического скаляра, является гармоническим вектором; поэтому значение его на поверхности

сферы представляет сферический вектор Лапласа порядка $n-1$. Разбивая теперь искомый вектор v на два слагаемых:

$$v = -\alpha \frac{1+v}{1-v} (v^{(1)} + v^{(2)}),$$

определяемых краевыми условиями

$$v^{(1)}|_{R=R_0} = R_0 \sum_{n=0}^{\infty} e_R \frac{Z_n(\mu, \lambda)}{2n+3}, \quad v^{(2)} = \frac{1}{2} R_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla \theta_n}{2n+3}, \quad (3.4.6)$$

можно, сославшись на (3.2.10) и учитывая, что $\operatorname{div} \nabla \theta_n = \nabla^2 \theta_n = 0$, сразу же записать выражение $v^{(2)}$ в виде

$$v^{(2)} = \frac{1}{2} R_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla \theta_n}{2n+3}. \quad (3.4.7)$$

Задача сведена к определению вектора $v^{(1)}$. Ограничиваясь рассмотрением случая симметричного распределения температуры по поверхности сферы, имеем $Z_n = a_{n0} P_n(\mu)$; теперь требуется заменить вектор

$$e_R P_n(\mu) = [(i_1 \cos \lambda + i_2 \sin \lambda) \sin \vartheta + i_3 \cos \vartheta] P_n(\mu)$$

его разложением по сферическим векторам Лапласа. Воспользуемся для этого известными рекуррентными формулами

$$(2n+1)\mu P_n(\mu) = (n+1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu),$$

$$(2n+1)P_n(\mu) = P'_{n+1}(\mu) - P'_{n-1}(\mu).$$

Тогда, вспомнив определение присоединенных к $P_n(\mu)$ решений, получим

$$e_R P_n(\mu) = \frac{1}{2n+1} [(i_1 \cos \lambda + i_2 \sin \lambda) P_{n+1}^1(\mu) + (n+1) i_3 P_{n+1}(\mu)] + \\ + \frac{1}{2n+1} [- (i_1 \cos \lambda + i_2 \sin \lambda) P_{n-1}^1(\mu) + n i_3 P_{n-1}(\mu)].$$

Величины в скобках представляют сферические векторы Лапласа [см. (VI. 2.10)]. Теперь, введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} Y_{n+1}^* (\mu, \lambda) &= \frac{1}{2n+1} [e_R P_{n+1}^1(\mu) + k(n+1) P_{n+1}(\mu)], \\ Y_{n-1}^{**} &= \frac{1}{2n+1} [-e_R P_{n-1}^1(\mu) + kn P_{n-1}(\mu)] \end{aligned} \right\} \quad (3.4.8)$$

приведем краевое условие (3.4.6) для вектора $v^{(1)}$ к виду

$$v^{(1)}|_{R=R_0} = R_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n0}}{2n+3} Y_{n+1}^* + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n0}}{2n+3} Y_{n-1}^{**} \right). \quad (3.4.9)$$

Через e_r , k обозначены здесь единичные векторы цилиндрической системы координат ($e_r = i_1 \cos \lambda + i_2 \sin \lambda$, $k = i_3$). Компоненту $Z_n = a_{n0} P_n$ в краевом условии (3.4.6) соответствуют два гармонических вектора:

$$U_{n+1}^* = \frac{a_{n0} R_0}{2n+3} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{n+1} Y_{n+1}^*, \quad U_{n-1}^{**} = \frac{a_{n0} R_0}{2n+3} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{n-1} Y_{n-1}^{**}, \quad (3.4.10)$$

причем $U_{-1}^{**} = 0$. По (3.2.10) и (3.4.4) — (3.4.7) решение задачи дается равенством

$$u = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_n}{2n+3} + \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla \theta_n}{2n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}^* - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} U_{n-1}^{**} + \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla \nabla \cdot U_{n+1}^*}{3n+1-2\nu(2n+1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nabla \nabla \cdot U_{n-1}^{**}}{3n-5-2\nu(2n-3)} \right] \right\}, \quad (3.4.11)$$

где

$$\theta_n = a_{n0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^n P_n(\mu). \quad (3.4.12)$$

Пусть, например, температура поверхности — линейная функция:

$$\theta|_{R=R_0} = \theta^0 + \frac{\theta^1 - \theta^0}{2R_0} z = \theta^0 + \frac{\theta^1 - \theta^0}{2} P_1(\mu), \quad a_{00} = \theta_0, \quad a_{10} = \frac{1}{2} (\theta^1 - \theta^0).$$

По такому же линейному закону она, очевидно, изменяется внутри тела:

$$\theta = \theta^0 + \frac{\theta^1 - \theta^0}{2} \frac{R}{R_0} P_1(\mu) = \theta^0 + \frac{\theta^1 - \theta^0}{2R_0} z \quad (R < R_0).$$

Вычисление по вышеприведенным формулам дает

$$u = \alpha \frac{1+\nu}{4-6\nu} \frac{\theta^1 - \theta^0}{2R_0} (R^2 - R_0^2) k,$$

что просто проверить по (1.14.3) гл. IV; по (1.14.1) гл. IV легко вычисляются также напряжения.

3.5. Вторая краевая задача для сферы. Через P_R в п. 3.1 был назван вектор напряжений на поверхности любой сферы, концентрической со сферой O радиуса R_0 . На последней вектор P_R задан и может быть представлен рядом по сферическим векторам Лапласа

$$R P_R|_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \lambda), \quad (3.5.1)$$

Этот ряд по (3.1.9) и (3.1.11) представляет значение на поверхности сферы вектора

$$\Pi = \frac{1}{2G} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0} \right)^n Y_n(\mu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n, \quad (3.5.2)$$

гармонического внутри сферы, и вектора

$$\Pi = \frac{1}{2G} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{n+1} Y_n(\mu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{-(n+1)}, \quad (3.5.3)$$

гармонического вне ее. Буквой G здесь обозначается модуль сдвига.

Решение внешней задачи, как известно, можно получить, заменив n на $-(n+1)$ в решении внутренней. Поэтому сначала рассматривается только последняя. По (3.1.9) определение P_R требует знания гармонического скаляра Ψ ; он может быть найден путем исключения гармонического вектора U из равенств (3.1.6), (3.1.10). Из последнего уравнения, учитывая, что $\nabla^2 U = 0$ и $\nabla^2 \Psi = 0$, имеем

$$\nabla \cdot \Pi = \frac{1}{1-2\nu} \left[(1+\nu) \nabla \cdot U + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R \cdot \nabla \nabla \cdot U + (5-4\nu) R \cdot \nabla \Psi + R \cdot \nabla R \cdot \nabla \Psi \right].$$

Заменив здесь $\nabla \cdot U$ его значением (3.1.6), получим

$$\nabla \cdot \Pi = -2[(1+\nu)\Psi + (1+2\nu)R \cdot \nabla \Psi + R \cdot \nabla R \cdot \nabla \Psi].$$

Теперь, представляя гармонический скаляр Ψ суммой гармонических полиномов

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k,$$

имеем

$$R \cdot \nabla \Psi = \sum_{k=1}^{\infty} k \Psi_k, \quad R \cdot \nabla R \cdot \nabla \Psi = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Psi_k,$$

$$\nabla \cdot \Pi = \sum_{n=0}^{\infty} \nabla \cdot \Pi_n = -2 \sum_{k=0}^{\infty} [k^2 + (1+2\nu)k + (1+\nu)] \Psi_k.$$

Слева стоит сумма гармонических полиномов степени $n-1$, так что, полагая $k = n-1$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{n-1} &= -\frac{1}{2} \frac{\nabla \cdot \Pi_n}{n^2 - (1-2\nu)n + (1-\nu)}, \\ \Psi &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nabla \cdot \Pi_n}{n^2 - (1-2\nu)n + 1-\nu} \end{aligned} \right\} \quad (3.5.4)$$

и, учитывая, что $\nabla \Psi_{n-1}$ — гармонический вектор степени $n-2$, имеем по (3.1.9)

$$\mathbf{P}_R = \frac{2G}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Pi_n + \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2) \frac{(n-2) \nabla \nabla \cdot \Pi_n}{n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu} \right]. \quad (3.5.5)$$

Вместе с тем по (3.1.6), (3.1.1) находим

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-4\nu)n-2(1-\nu)}{n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu} \nabla \cdot \Pi_n, \\ \vartheta = \nabla \cdot \mathbf{u} &= (1-2\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1) \nabla \cdot \Pi_n}{n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.6)$$

Из последней формулы определяется сумма нормальных напряжений

$$\sigma = \sigma_R + \sigma_{\vartheta} + \sigma_{\lambda} = 2G(1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1) \nabla \cdot \Pi_n}{n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu}. \quad (3.5.7)$$

Система приложенных к шару внешних сил должна быть статически эквивалентна нулю — должны обращаться в нуль ее главный вектор \mathbf{V} и главный момент \mathbf{m}^0 :

$$\mathbf{V} = \int \int_O \mathbf{P}_R|_{R=R_0} d\sigma = 0, \quad \mathbf{m}^0 = \int \int_O \mathbf{R}_0 \times \mathbf{P}_R|_{R=R_0} d\sigma = 0. \quad (3.5.8)$$

Известно, что интеграл по поверхности сферы от произведения двух поверхностных векторов Лапласа различных порядков равен нулю; поэтому при вычислении интегралов (3.5.8) следует в разложении (3.5.1) сохранить лишь слагаемое \mathbf{Y}_0 в первом и \mathbf{Y}_1 во втором. Получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= 4\pi R_0 \mathbf{Y}_0 = 0, \quad \mathbf{m} = \int \int_O \frac{\mathbf{R}_0}{R_0} \times \mathbf{Y}_1 d\sigma = \int \int_O \mathbf{n} \times \mathbf{Y}_1 d\sigma = \\ &= 2G \int \int \int_V \nabla \times \Pi_1 d\tau = \frac{8\pi}{3} G R_0^3 \nabla \times \Pi_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

так как $\nabla \times \Pi_1$ — постоянный вектор. Итак, в разложении вектора поверхностных сил должно отсутствовать постоянное слагаемое \mathbf{Y}_0 , а слагаемое $R_0^{-1} \mathbf{Y}_1$ подчинено условию

$$2G \Pi_1 = \frac{R}{R_0} \mathbf{Y}_1 = \nabla H, \quad R_0^{-1} \mathbf{Y}_1 = R^{-1} \nabla H, \quad (3.5.10)$$

где H — некоторая однородная квадратичная форма координат x, y, z . Суммирование в формулах (3.5.5) — (3.5.7) следует начи-

нать с $n = 1$, а во второй группе слагаемых (3.5.5) с $n = 3$. Заменяя n на $-(n + 1)$ в разложениях (3.5.5), (3.5.7), придем к решениям внешней задачи

$$\mathbf{P}_R = \frac{2G}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Pi_{-(n+1)} + \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \frac{(n+3) \nabla \nabla \cdot \Pi_{-(n+1)}}{n^2 + (3-2\nu)n + 3(1-\nu)} \right], \quad (3.5.11)$$

$$\sigma = \sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_\lambda = -2G(1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+3) \nabla \cdot \Pi_{-(n+1)}}{n^2 + (3-2\nu)n + 3(1-\nu)}. \quad (3.5.12)$$

3.6. Вычисление вектора перемещения. Формулами (3.5.5), (3.5.7) определены сумма нормальных напряжений и вектор напряжения на любой концентрической с O поверхности сферы $R < R_0$. Более сложно находится вектор перемещения. Используя формулы

$$\nabla \times \mathbf{a} \Phi = \Phi \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \Phi \times \mathbf{a}, \quad \nabla \times \mathbf{R} \cdot \text{def } \mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{U},$$

по (3.1.10) и (3.1.6) найдем

$$\begin{aligned} \text{rot } \Pi &= \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{R} \times \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{U} - \\ &\quad - \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{R} \times \nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi + 2\mathbf{R} \times \nabla \Psi = \\ &= 2(1+\nu) \mathbf{R} \times \nabla \Psi - (1-4\nu) \mathbf{R} \times \nabla (\mathbf{R} \cdot \nabla \Psi) + \frac{1}{2} \mathbf{R} \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

откуда, учитывая еще, что

$$\mathbf{R} \cdot \nabla \nabla \times \mathbf{U}_n = (n-1) \nabla \times \mathbf{U}_n,$$

и вспомнив (3.5.4), найдем при $n \neq 1$

$$\nabla \times \mathbf{U}_n = \frac{1}{n-1} \left[2\nabla \times \Pi_n - \frac{n(1-4\nu) - 3 + 2\nu}{n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu} \mathbf{R} \times \nabla \nabla \cdot \Pi_n \right]. \quad (3.6.2)$$

Полагая теперь в (3.1.10)

$$\text{def } \mathbf{U} = \nabla \mathbf{U} + \hat{\Omega},$$

$$\mathbf{R} \cdot \text{def } \mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{U} - \hat{\Omega} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{U})$$

и снова применив (3.1.6), получим

$$\Pi = -2\nu \mathbf{R} \Psi + (1-4\nu) \mathbf{R} \mathbf{R} \cdot \nabla \Psi + R^2 \nabla \Psi + \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{U}),$$

так что

$$\begin{aligned} \Pi_n &= [-2\nu + (n-1)(1-4\nu)] \mathbf{R} \Psi_{n-1} + R^2 \nabla \Psi_{n-1} + n \mathbf{U}_n + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{R} \times (\nabla \times \mathbf{U}). \end{aligned}$$

Исключив теперь $\nabla \times \mathbf{U}$ с помощью (3.6.2), а Ψ_{n-1} — по (3.5.4), придем к равенству

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n = & \frac{1}{n} \Pi_n - \frac{1}{n(n-1)} \mathbf{R} \times (\nabla \times \Pi_n) + \\ & + \frac{n(1-4\nu) - 2(1-\nu)}{n[n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu]} \mathbf{R} \nabla \cdot \Pi_n + \\ & + \frac{1-\nu+2\nu\nu}{n(n-1)[n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu]} R^2 \nabla \nabla \cdot \Pi_n \quad (n \neq 1), \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

и по (3.1.1), (3.5.4) вектор перемещения оказывается равным

$$\mathbf{u} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\mathbf{U}_n + \frac{1}{2} (R_0^2 - R^2) \frac{\nabla \nabla \cdot \Pi_n}{n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu} \right] + \mathbf{u}_1. \quad (3.6.4)$$

Очевидно, что слагаемое, соответствующее $n=0$, входит в выражение вектора перемещения сферы как твердого тела. Слагаемое \mathbf{u}_1 представляет вектор, линейно зависящий от координат; оно может быть представлено произведением

$$\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{R} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}^*) \cdot \mathbf{R} + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}}^*) \cdot \mathbf{R}, \quad (3.6.5)$$

где $\hat{\mathbf{A}}$ — постоянный тензор второго ранга, который можно считать симметричным ($\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^*$), так как присутствие в нем кососимметричной части добавило бы к вектору лишь слагаемое

$$\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}}^*) \cdot \mathbf{R} = \hat{\mathbf{\Omega}} \cdot \mathbf{R} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R},$$

входящее в произвольно добавляемый вектор перемещения твердого тела. Вычисляемый по \mathbf{u}_1 тензор напряжения $\hat{T}^{(1)}$ равен

$$\hat{T}^{(1)} = 2G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \hat{E} I_1 (\hat{\mathbf{A}}) + \hat{\mathbf{A}} \right], \quad (3.6.6)$$

так что

$$\mathbf{R} \cdot \hat{T}^{(1)} = R P_R = 2G \Pi_1 = 2G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} R I_1 (\hat{\mathbf{A}}) + u_1 \right]. \quad (3.6.7)$$

Первый инвариант тензора $\hat{\mathbf{A}}$ определяем по (3.6.6), (3.5.7):

$$I_1 (\hat{\mathbf{A}}) = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} I_1 (\hat{T}^{(1)}) = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla \cdot \Pi_1,$$

так что

$$u_1 = \Pi_1 - \frac{\nu}{1+\nu} R \nabla \cdot \Pi_1. \quad (3.6.8)$$

В случае внешней задачи, изменив n на $-(n+1)$ в формуле (3.6.3), имеем

$$U_{-(n+1)} = - \left\{ \frac{1}{n+1} \Pi_{-(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \Pi_{-(n+1)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{(n+1)[n^2 + (3-2\nu)n + 3(1-\nu)]} \left[\{n(1-4\nu) + 3(1-2\nu)\} \mathbf{R} \nabla \cdot \Pi_{-(n+1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(2n+3)\nu-1}{n+2} R^2 \nabla \nabla \cdot \Pi_{-(n+1)} \right] \right\} \quad (3.6.9)$$

для всех $n = 0, 1, 2, \dots$; вектор перемещения определяется формулой

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbf{U}_{-(n+1)} - \frac{1}{2} (R^2 - R_0^2) \frac{\nabla \nabla \cdot \Pi_{-(n+1)}}{n^2 + (3-2\nu)n + 3(1-\nu)} \right]. \quad (3.6.10)$$

3.7. Напряженное состояние в центре шара. Вектор напряжения на произвольно ориентированной площадке в центре шара ($R = 0$), определяемый формулой (3.5.5), равен

$$(\mathbf{P}_R)_{R=0} = 2G \left(\frac{1}{R} \Pi_1 + \frac{R_0^2}{2(7+5\nu)} \frac{\nabla \nabla \cdot \Pi_3}{R} \right)_{R \rightarrow 0} = \\ = \frac{1}{R_0} \left[\mathbf{Y}_1 + \frac{1}{2(7+5\nu)} \left(\frac{\nabla \cdot \nabla R^3 \mathbf{Y}_3}{R} \right)_{R=0} \right] \quad (3.7.1)$$

— для определения напряжений в центре сферы достаточно знать только первый и третий члены разложения (3.5.1) нагрузки в ряд по сферическим векторам Лапласа.

3.8. Тепловые напряжения. Поверхность O сферы предполагается ненагруженной, а температурный режим — стационарным. Вектор перемещения, как в п. 3. 4, представляется в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla \chi, \quad (3.8.1)$$

где χ — частное решение уравнения Пуассона (3.4.4), \mathbf{v} — вектор, определяемый из однородных уравнений равновесия в перемещениях. Тензор напряжений по (1.14.1) гл. IV равен

$$\hat{T} = \hat{T}(\mathbf{u}) - 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \hat{E} = \hat{T}(\mathbf{v}) + \hat{T}(\nabla \chi) - 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \hat{E},$$

где операция \hat{T} над вектором \mathbf{a} определяется очевидным равенством

$$\hat{T}(\mathbf{a}) = 2G \left(-\frac{\nu}{1-2\nu} \hat{E} \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{def} \mathbf{a} \right),$$

так что

$$\hat{T}(\nabla \chi) = 2G \left(-\frac{\nu}{1-2\nu} \hat{E} \nabla^2 \chi + \nabla \nabla \chi \right).$$

Теперь, сославшись на (1.14.8) гл. IV и на (3.1.8), имеем

$$\hat{T} = \hat{T}(v) + 2G(\nabla\nabla\chi - \nabla^2\chi\hat{E}) = \hat{T}(v) + 2G\left(\nabla\nabla\chi - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\theta\hat{E}\right),$$

$$R\mathbf{P}_R = \mathbf{R} \cdot \hat{T} = R\mathbf{P}_R(v) + 2G\left(\mathbf{R} \cdot \nabla\nabla\chi - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\theta\mathbf{R}\right).$$

Но, как указывалось в п. 3.4,

$$\nabla\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \nabla\chi_n = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \left(R\theta_n + \frac{1}{2} R^2 \nabla\theta_n \right),$$

где θ_n — однородные гармонические полиномы n -й степени, по которым разложена в ряд гармоническая функция θ , а χ_n — однородные полиномы $(n+2)$ -й степени, так что

$$\mathbf{R} \cdot \nabla\nabla\chi_n = (n+1) \nabla\chi_n = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{n+1}{2n+3} \left(R\theta_n + \frac{1}{2} R^2 \cdot \nabla\theta_n \right)$$

и, далее,

$$\frac{1}{2G} R\mathbf{P}_R = \frac{1}{2G} R\mathbf{P}_R(v) + \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{n+1}{2n+3} R^2 \nabla\theta_n - \frac{n+2}{2n+3} R\theta_n \right]. \quad (3.8.2)$$

Вектор v определяется краевым условием

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G} R_0 \mathbf{P}_R(v) |_{R=R_0} = \\ & = -\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{n+1}{2n+3} R_0^2 (\nabla\theta_n)_{R=R_0} - \frac{n+2}{2n+3} R_0 (\theta_n)_{R=R_0} \right], \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

и гармонический вектор $\Pi(v)$ оказывается равным

$$\begin{aligned} \Pi(v) = & -\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{2n+3} R_0^2 \nabla\theta_n - \right. \\ & \left. - R_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2) a_{n0}}{2n+3} \left[\left(\frac{R}{R_0} \right)^{n+1} \mathbf{Y}_{n+1}^* + \left(\frac{R}{R_0} \right)^{n-1} \mathbf{Y}_{n-1}^{**} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

где использовано уже известное по п. 3.4 представление вектора $(e_R \theta_n)_{R=R_0}$ по сферическим векторам Лапласа (3.4.8). Теперь по (3.5.5) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} R \mathbf{P}_R = & \frac{1}{2} \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} (R^2 - R_0^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3} \nabla \theta_n - \\ & - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} R_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2n+3} \left[\frac{R}{R_0} \theta_n - (\Pi_{n+1}^* + \Pi_{n-1}^{**}) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} R_0 (R_0^2 - R^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2n+3} \left[\frac{(n-1) \nabla \nabla \cdot \Pi_{n+1}^*}{n^2 + n(1+2\nu) + 1 + \nu} + \right. \\ & \left. + \frac{(n-3) \nabla \nabla \cdot \Pi_{n-1}^{**}}{n^2 - (3-2\nu)n + 3(1-\nu)} \right], \quad (3.8.5) \end{aligned}$$

где введены обозначения гармонических векторов

$$\Pi_{n+1}^* = a_{n0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{n+1} \mathbf{Y}_{n+1}^*, \quad \Pi_{n-1}^{**} = a_{n0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{n-1} \mathbf{Y}_{n-1}^{**}. \quad (3.8.6)$$

Нетрудно проверить, что при линейном законе распределения температуры

$$\theta = a_{00} + \frac{a_{10}}{R_0} z; \quad a_{k0} = 0, \quad k = 2, 3, \dots,$$

вычисляемый по этим формулам вектор \mathbf{P}_R действительно оказывается равным нулю (п. 1.14 гл. IV). Поэтому суммирование надо начинать с $n = 2$.

Напряжение в центре ($R = 0$) определяется заданием лишь второго слагаемого в разложении (3.4.12) температуры в ряд по гармоническим полиномам; остальные слагаемые, в том числе содержащие a_{40} , при $R = 0$ обращаются в нуль. Вычисление, в котором используются формулы (3.8.5), (3.8.6), (3.4.8) и (VI. 2.17), дает

$$(\mathbf{P}_R)_{R=0} = \frac{1}{5} \alpha G \frac{1+\nu}{1-\nu} a_{20} \frac{14-5\nu}{r+5\nu} (2k \cos \vartheta - e_r). \quad (3.8.7)$$

3.9. Напряженное состояние в окрестности сферической полости. На большом удалении от полости напряженное состояние предполагается однородным; оно задается постоянным тензором \hat{T}^∞ . Тензор напряжений при наличии полости обозначается \hat{T} , он представляется суммой

$$\hat{T} = \hat{T}^\infty + \hat{T}^*, \quad (3.9.1)$$

где \hat{T}^* — тензор, обращающийся в нуль на бесконечности (при $R \rightarrow \infty$); им определяется возмущение напряженного состояния

вызываемое полостью. Поверхность последней $R = R_0$ предполагается свободной от нагружения. Поэтому

$$(\mathbf{e}_R \cdot \hat{T})_{R=R_0} = 0, \quad (\mathbf{e}_R \cdot \hat{T}^*)_{R=R_0} = -(\mathbf{e}_R \cdot \hat{T}^\infty)_{R=R_0},$$

или

$$\begin{aligned} R P_R^*|_{R=R_0} &= -R_0 \mathbf{e}_R \cdot \hat{T}^\infty = -R_0 \mathbf{e}_R \cdot i_s i_k i_{sk}^\infty = \\ &= -R_0 i_k [\sin \vartheta (t_{1k}^\infty \cos \lambda + t_{2k}^\infty \sin \lambda) + t_{3k}^\infty \cos \vartheta] = -Y_1(\mu, \lambda). \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

Гармонический вектор Π^* должен быть определен равенством

$$\Pi^* = \Pi_{-2}^* = -\frac{1}{2G} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 Y_1(\mu, \lambda) = -\frac{1}{2G} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \mathbf{R} \cdot \hat{T}^\infty. \quad (3.9.3)$$

Выражение (3.6.10) для вектора перемещения, в котором сохраняется лишь одно слагаемое $n = 1$, записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \frac{1}{4G} R_0^3 \left[\frac{\mathbf{R} \cdot \hat{T}^\infty}{R^3} + \frac{1}{3} \mathbf{R} \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{T}^\infty}{R^3} \right) - \frac{4-10\nu}{7-5\nu} \mathbf{R} \nabla \cdot \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{T}^\infty}{R^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5\nu-1}{3(7-5\nu)} R^2 \nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{T}^\infty}{R^3} + \frac{R^2 - R_0^2}{7-5\nu} \nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{R} \cdot \hat{T}^\infty}{R^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

Пусть, в частности, $\hat{T}^\infty = i_3 i_3 \sigma_z^\infty$, то есть речь идет о напряженном состоянии в растягиваемом стержне при наличии в нем сферической раковины с весьма малым по сравнению с размерами стержня диаметром. Для напряжений на поверхности раковины очевидное, хотя и довольно громоздкое вычисление по формуле (3.9.4) приводит к сравнительно простым формулам

$$\sigma_\vartheta = \frac{\sigma_z^\infty}{2(7-5\nu)} (27 - 15\nu - 30 \cos^2 \vartheta),$$

$$\sigma_\lambda = \frac{\sigma_z^\infty}{2(7-5\nu)} (15\nu - 3 - 30\nu \cos^2 \vartheta)$$

и, в частности, при $\vartheta = \pi/2$

$$\sigma_\vartheta = \sigma_z = \frac{27-15\nu}{2(7-5\nu)} \sigma_z^\infty \approx 2,07 \sigma_z^\infty,$$

$$\sigma_\lambda = \frac{15\nu-3}{2(7-5\nu)} \sigma_z^\infty \approx 0,19 \sigma_z^\infty \quad \left(\nu = \frac{1}{3} \right),$$

а при $\vartheta = 0$

$$\sigma_\vartheta = \sigma_\lambda = -\frac{3+15\nu}{2(7-5\nu)} \sigma_z^\infty \approx -0,75 \sigma_z^\infty.$$

Максимальное растягивающее напряжение создается на экваторе полости, оно в 2,07 раза больше номинального напряжения σ_z^∞ ; сжимающие напряжения $0,75 \sigma_z^\infty$ создаются в полюсах

полости. Концентрация напряжений имеет местный характер. Например, в плоскости экватора $\vartheta = \pi/2$

$$\sigma_z = \sigma_0 = \sigma_z^\infty \left[1 + \frac{4-5\nu}{2(7-5\nu)} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{9}{2(7-5\nu)} \left(\frac{R_0}{R} \right)^5 \right].$$

При $R = R_0$ получаем, конечно, вышеприведенное значение $2,07\sigma_z^\infty$, но уже при $R = 2R_0$ оно падает до $1,03\sigma_z^\infty$.

3.10. Напряженное состояние в окрестности малой сферической полости в скрученном цилиндрическом стержне. Аналогично рассматриваются задачи, в которых задаваемое на бесконечности напряженное состояние неоднородно. Например, в скрученном цилиндрическом стержне

$$\tau_{xz}^\infty = -\frac{M_z}{I_p} y, \quad \tau_{yz}^\infty = \frac{M_z}{I_p} x,$$

или

$$\hat{T}^\infty = \frac{M_z}{I_p} [-(i_3 i_1 + i_1 i_3) y + (i_2 i_3 + i_3 i_2) x], \quad (3.10.1)$$

где M_z — крутящий момент, I_p — полярный момент инерции стержня.

Полагая, как выше,

$$\hat{T} = \hat{T}^\infty + \hat{T}^*,$$

имеем

$$\begin{aligned} (R\mathbf{P}_R^*)_{R=R_0} &= -R_0 \mathbf{e}_R \cdot \hat{T}^\infty = -\frac{M_z R_0^2}{I_p} \sin \vartheta \cos \vartheta (-i_1 \sin \lambda + i_2 \cos \lambda) = \\ &= -\frac{M_z R_0^2}{3I_p} P_2^1(\mu) (-i_1 \sin \lambda + i_2 \cos \lambda) = -\mathbf{Y}_2(\mu, \lambda). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_{-3}^* = -\frac{1}{2G} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \mathbf{Y}_2(\mu, \lambda) = -\frac{M_z}{2GI_p} \left(\frac{R_0}{R} \right)^5 z (-i_1 y + i_2 x),$$

или

$$\mathbf{P}^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R} \right)^5 \mathbf{u}^\infty, \quad \mathbf{u}^\infty = \frac{M_z}{GI_p} (-i_1 y + i_2 x) z, \quad (3.10.2)$$

где \mathbf{u}^∞ — вектор перемещения на бесконечном удалении от полости. В разложении (3.6.10) сохраняется лишь слагаемое $n=2$. Учитывая, что

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{u}^\infty}{R^5} = 0,$$

получаем

$$\mathbf{u}^* = \frac{R_0^5}{6} \left(\frac{\mathbf{u}^\infty}{R^5} + \frac{1}{4} \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \frac{\mathbf{u}^\infty}{R^5} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{R_0}{R} \right)^5 \mathbf{u}^\infty. \quad (3.10.3)$$

В сферических координатах имеем

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^\infty = -\frac{M_z}{GI_p} R^2 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_0}{R} \right)^5 \right] \mathbf{e}_\lambda \sin \vartheta \cos \vartheta = u_\lambda \mathbf{e}_\lambda \quad (3.10.4)$$

и отличны от нуля только напряжения

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta\lambda} &= G \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} - \frac{u_\lambda}{R} \operatorname{ctg} \theta \right) = \frac{M_z}{I_p} R \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R_0^5}{R^5} \right) \sin^2 \theta, \\ \tau_{R\lambda} &= G \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial R} - \frac{u_\lambda}{R} \right) = - \frac{M_z}{I_p} R \left(1 - \frac{R_0^5}{R^5} \right) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.10.5)$$

На поверхности полости

$$\tau_{\theta\lambda} = \frac{5}{4} \frac{M_z}{I_p} R_0 \sin^2 \theta, \quad \tau_{R\lambda} = 0. \quad (3.10.6)$$

Искажение напряженного состояния имеет резко выраженный местный характер. Максимальное касательное напряжение на 25% превосходит номинальное напряжение $\frac{M_z R_0}{I_p}$.

Простота полученного решения объясняется тем, что задача о кручении тела вращения сводится к разысканию одного лишь перемещения u_λ , причем произведение $u_\lambda e^{i\lambda}$ представляет гармоническую функцию (см. п. 1.11 гл. IV).

3.11. Действие массовых сил. При действии массовых сил с потенциалом Φ частное решение уравнений равновесия в перемещениях определяется из соотношений (1.4.7), (1.4.10) гл. IV:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \chi, \quad \nabla^2 \chi = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \Phi. \quad (3.11.1)$$

Далее рассматриваются частные случаи задания Φ .

1°. $\Phi = \Phi(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда и χ разыскивается как функция только r :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \chi &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\chi}{dr} = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \Phi(r), \\ \chi &= \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \left(\int \frac{dr}{r} \int r \Phi(r) dr + C_1 \ln r + C_2 \right), \\ \mathbf{u} &= \nabla \chi = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \int r \Phi(r) dr + \frac{C_1}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.11.2)$$

и, далее, по (1.1.3) гл. IV

$$\hat{T} = \frac{1}{1-\nu} \left\{ \hat{E} \nu \Phi(r) + \right. \\ \left. + (1-2\nu) \left[\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \Phi(r) - \frac{1}{r^2} (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \left(\int r \Phi(r) dr + C \right) \right] \right\}, \quad (3.11.3)$$

причем \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ , \mathbf{k} обозначают единичные векторы цилиндрической системы координат (см. п. III.7).

Например, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω потенциал центробежных сил равен по (1.2.6) гл. I

$$\Phi = -\frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = -\frac{1}{2} \gamma |\omega \times R|^2, \quad (3.11.4)$$

и остающееся конечным при $r = 0$ частное решение для вектора перемещения будет

$$u = -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \frac{\gamma \omega^2}{8g} r^3 e_r, \quad (3.11.5)$$

а отличные от нуля компоненты тензора напряжений равны

$$\sigma_r = -\frac{\gamma \omega^2}{8g} \frac{3-2\nu}{1-\nu} r^2, \quad \sigma_\varphi = -\frac{\gamma \omega^2}{8g} \frac{1+2\nu}{1-\nu} r^2, \quad \sigma_z = -\frac{\gamma \omega^2}{2g} \frac{\nu}{1-\nu} r^2. \quad (3.11.6)$$

2°. $\Phi = \Phi(R)$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Теперь по (3.11.1), разыскивая χ как функцию R , имеем

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} R^2 \frac{d\chi}{dR} = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \Phi(R),$$

$$\chi = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \left(\int^R \frac{dR}{R^2} \int^R R^2 \Phi(R) dR - \frac{C_1}{R} + C_2 \right),$$

так что

$$u = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} e_R \left(\frac{1}{R^2} \int^R R^2 \Phi(R) dR + C_1 \right), \quad (3.11.7)$$

$$\hat{T} = \frac{1}{1-\nu} \left\{ \hat{E} \nu \Phi(R) + (1-2\nu) \left[e_R e_R \Phi(R) - \right. \right. \\ \left. \left. - (2e_R e_R - e_\vartheta e_\vartheta - e_\lambda e_\lambda) \left(\frac{1}{R^3} \int^R R^2 \Phi(R) dR + \frac{C}{R} \right) \right] \right\}. \quad (3.11.8)$$

3°. Потенциал Φ — гармоническая функция, представимая рядом однородных гармонических полиномов:

$$\Phi = \sum_n \Phi_n(x, y, z). \quad (3.11.9)$$

Как и в п. 3.8, найдем

$$\chi = \frac{1-2\nu}{4G(1-\nu)} R^2 \sum_n \frac{\Phi_n(x, y, z)}{2n+3}. \quad (3.11.10)$$

3.12. Гравитирующий шар. Из теории ньютонова потенциала известно, что сила притяжения, действующая на частицу шара единичной массы, направлена к центру шара и пропорциональна по величине радиусу этой частицы:

$$\rho K = -\frac{\gamma}{R_0} \mathbf{R} = -\text{grad } \Phi, \quad \Phi = \frac{\gamma R^2}{2R_0}. \quad (3.12.1)$$

Здесь R_0 — радиус шара, γ — значение объемной силы на поверхности шара, то есть в случае земного шара вес единицы объема. Частное решение (3.11.7) будет

$$\mathbf{u}^* = -\frac{1-2\nu}{20G(1-\nu)} \frac{\gamma R^2}{R_0} \mathbf{R}, \quad (3.12.2)$$

а по (3.11.8) и (3.1.8) находим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} \cdot \hat{T}^* &= R \mathbf{P}_R^* = \frac{3-\nu}{10(1-\nu)} \frac{\gamma R^2}{R_0} \mathbf{R}, \\ \Pi^* &= \frac{3-\nu}{20G(1-\nu)} \gamma R_0 \mathbf{R} = \Pi_1^* = \frac{R}{2GR_0} Y_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.12.3)$$

Поверхность шара не нагружена, и по (3.6.8) на решение (3.12.2) следует наложить решение

$$\mathbf{u}_{**} = -\Pi_1^* + \frac{\nu}{1+\nu} R \nabla \cdot \Pi_1^* = -\frac{3-\nu}{20G(1-\nu)} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \gamma R_0 \mathbf{R}.$$

Получаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_* + \mathbf{u}_{**} = \frac{1-2\nu}{20G(1-\nu)} \gamma R_0 \mathbf{R} \left(\frac{R^2}{R_0^2} - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right). \quad (3.12.4)$$

Вектор напряжения в центре шара определяем по (3.7.1):

$$(\mathbf{P}_R)_{R=0} = -\frac{3-\nu}{10(1-\nu)} \gamma R_0 \mathbf{e}_R. \quad (3.12.5)$$

Для Земли ($\gamma = 5,53 \text{ г/см}^3$, $R_0 = 6,37 \cdot 10^8 \text{ см}$) вычисляемое по этой формуле напряжение оказывается неправдоподобно большим; это указывает на неприменимость принятых методов линейной теории упругости в рассматриваемой задаче.

3.13. Вращающийся шар. Тензор напряжений \hat{T} и вектор перемещения \mathbf{u} представляются в виде

$$\hat{T} = \hat{T}^0 + \hat{T}^*, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^*, \quad (3.13.1)$$

где \hat{T}^0 , \mathbf{u}^0 — частные решения (3.11.6), (3.11.5), определяемые действием центробежных сил. Записывая \hat{T}^0 в виде

$$\hat{T}^0 = -\frac{\gamma \omega^2}{8g(1-\nu)} [e_R e_R (3-2\nu) + e_\lambda e_\lambda (1+2\nu) + 4kk\nu] R^2 (1-\mu^2), \quad (3.13.2)$$

имеем, сославшись на (VI. 2.12), (VI. 2.16),

$$\mathbf{R} \cdot \hat{T}^0 = - \frac{\gamma \omega^2}{20(1-\nu)g} R^3 \left\{ [2(3-2\nu) \mathbf{e}_r P_1^1(\mu) + (3+2\nu) k P_1(\mu)] - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{3} (3-2\nu) \mathbf{e}_r P_3^1(\mu) + (3+2\nu) k P_3(\mu) \right] \right\}, \quad (3.13.3)$$

где, как выше в п. 3.4, введен единичный вектор \mathbf{e}_r , так что

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_r \sin \vartheta + k \cos \vartheta.$$

Условие отсутствия нагружения на поверхности шара $R = R_0$ записывается в виде

$$(\mathbf{R} \cdot \hat{T})_{R=R_0} = (\mathbf{R} \cdot \hat{T}^0 + \mathbf{R} \cdot \hat{T}^*)_{R=R_0} = 0$$

или

$$(\mathbf{R} \mathbf{P}_R^*)_{R=R_0} = - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_R^0)_{R=R_0} = (\Pi_1 + \Pi_3)_{R=R_0}.$$

Здесь Π_1, Π_3 — гармонические при $R < R_0$ векторы

$$\Pi_1 = \frac{R}{R_0} \mathbf{Y}_1(\mu, \lambda), \quad \Pi_3 = \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 \mathbf{Y}_3(\mu, \lambda), \quad (3.13.4)$$

а $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_3$ — сферические векторы Лапласа, определяемые по (3.13.3):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= A [2(3-2\nu) \mathbf{e}_r P_1^1(\mu) + (3+2\nu) k P_1(\mu)], \\ \mathbf{Y}_3 &= -A \left[\frac{1}{3} (3-2\nu) \mathbf{e}_r P_3^1(\mu) + (3+2\nu) k P_3(\mu) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.13.5)$$

причем

$$A = \frac{\gamma \omega^2 R_0^3}{40 G (1-\nu) g}.$$

Вектор перемещения определяется по формулам (3.6.3), (3.6.4), (3.6.8) и (3.13.1), (3.11.5). В п. 4.5 приведены более общие формулы для случая эллипсоида вращения. В полюсе и на экваторе шара вектор перемещения оказывается равным

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} \Big|_{\substack{R=R_0 \\ \vartheta=0}} &= \frac{\gamma \omega^2}{2gG} R_0^3 \left[\frac{2(1-2\nu)}{15(1+\nu)} - \frac{2(2+\nu)}{3(7+5\nu)} \right] k, \\ \mathbf{u} \Big|_{\substack{R=R_0 \\ \vartheta=\pi/2}} &= \frac{\gamma \omega^2}{2gG} R_0^3 \left[\frac{2(1-2\nu)}{15(1+\nu)} + \frac{2+\nu}{3(7+5\nu)} \right] \mathbf{e}_r, \end{aligned} \right\} \quad (3.13.6)$$

где k, \mathbf{e}_r — единичные векторы цилиндрической системы координат. В применении к Земле, задаваясь сжатием у полюсов $\varepsilon_R = 1/300$ и принимая $\nu = 1/3$, находим $G \approx 2,6 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ — это приблизительно значение модуля сдвига стекла.

Вектор напряжения на поверхности шара $R < R_0$, определяемый по (3.5.5), оказывается равным

$$\begin{aligned} P_R = & \frac{\gamma \omega^2}{20g(1-\nu)} (R_0^2 - R^2) \left[2(3-2\nu) e_r P_1^1(\mu) + (3+2\nu) k P_1(\mu) + \right. \\ & \left. + \frac{\nabla \nabla \cdot R^3 Y_3}{(14+10\nu) R A} \right] = \frac{\gamma \omega^2}{20g(1-\nu)} \left\{ \left[2(3-2\nu) + \frac{21-2\nu}{14+10\nu} \right] e_r \sin \vartheta + \right. \\ & \left. + \left(3+2\nu - \frac{21-2\nu}{7+5\nu} \right) k \cos \vartheta \right\} (R_0^2 - R^2). \quad (3.13.7) \end{aligned}$$

Вместе с тем

$$P_R = e_R \cdot \hat{T} = e_r \cdot \hat{T} \sin \vartheta + k \cdot \hat{T} \cos \vartheta,$$

и поэтому на экваторе и в полюсе шара

$$\left. \begin{aligned} (e_r \cdot \hat{T})_{\vartheta=\pi/2} &= \frac{\gamma \omega^2}{20g(1-\nu)} (R_0^2 - R^2) \left[2(3-2\nu) + \frac{21-2\nu}{14+10\nu} \right] e_r, \\ (k \cdot \hat{T})_{\vartheta=0} &= \frac{\gamma \omega^2}{20g(1-\nu)} (R_0^2 - R^2) \left(3+2\nu - \frac{21-2\nu}{7+5\nu} \right) k. \end{aligned} \right\} \quad (3.13.8)$$

Векторы $(e_r \cdot \hat{T})_{\vartheta=\pi/2}$, $(k \cdot \hat{T})_{\vartheta=0}$ коллинеарны соответственно e_r и k , поэтому на экваторе и в полюсе касательные напряжения τ_{rz} отсутствуют, а приведенные формулы определяют нормальные напряжения σ_r и соответственно σ_z .

Сумма нормальных напряжений в центре шара определяется по (3.5.7):

$$\sigma = (\sigma_R + \sigma_\vartheta + \sigma_\lambda)_{R=0} = 2G (\nabla \cdot \Pi_1)_{R=0} = \frac{\gamma \omega^2 R_0^2}{20g(1-\nu)} (15 - 6\nu). \quad (3.13.9)$$

Отсюда и из (3.13.8) имеем

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{R=0} &= (\sigma_\lambda)_{R=0} = \frac{\gamma \omega^2 R_0^2}{20g(1-\nu)} \left[2(3-2\nu) + \frac{21-2\nu}{14+10\nu} \right], \\ (\sigma_z)_{R=0} &= \frac{\gamma \omega^2 R_0^2}{20g(1-\nu)} \left(3+2\nu - \frac{21-2\nu}{7+5\nu} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.13.10)$$

Равенство нормальных напряжений σ_r и σ_λ в центре шара, впрочем, следует и из соображений симметрии.

3.14. Действие сосредоточенных сил. Рассматривается напряженное состояние в сфере, нагруженной уравновешенной системой сосредоточенных сил Q_i , приложенных в точках $R_0 e_R^{(i)}$ поверхности. Конечно, эта система сил предполагается уравновешенной:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N e_R^{(i)} \times Q_i = 0. \quad (3.14.1)$$

Плоскость, проведенная через вектор-радиус точки приложения силы Q_i и линию действия ее, пересечет сферу по меридиональ-

ной плоскости π_i^0 ; положение меридиональной плоскости π_i , проходящей через точку приложения силы \mathbf{Q}_i и точку наблюдения $R\mathbf{e}_R$, определяется углом этой плоскости с плоскостью π_i^0 ; через θ , обозначается угол в плоскости π_i между векторами $\mathbf{e}_R^{(i)}$, \mathbf{e}_R :

$$\gamma_i = \cos \theta_i = \mathbf{e}_R^{(i)} \cdot \mathbf{e}_R = \cos \vartheta \cos \vartheta_i + \sin \vartheta \sin \vartheta_i \cos(\lambda - \lambda_i), \quad (3.14.2)$$

где $(R_0, \vartheta_i, \lambda_i)$ и (R, ϑ, λ) — сферические координаты точек приложения сил и точки наблюдения. Очевидно, что $(\hat{E}$ — единичный тензор)

$$\nabla \gamma_i = \nabla \mathbf{e}_R^{(i)} \cdot \mathbf{e}_R = \nabla \mathbf{e}_R^{(i)} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{e}_R^{(i)} \cdot \frac{\hat{E}}{R} - \mathbf{e}_R^{(i)} \cdot \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{R} (\mathbf{e}_R^{(i)} - \gamma_i \mathbf{e}_R). \quad (3.14.3)$$

Разложение по сферическим поверхностным векторам Лапласа вектора, представляющего сосредоточенную силу \mathbf{Q}_i , получим путем предельного перехода $\varepsilon_i \rightarrow 0$ от поверхностной нагрузки:

$$\mathbf{Q}_i(\theta_i) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_i < \theta_i < \pi, \\ \frac{\mathbf{Q}_i}{\pi R_0^2 \varepsilon_i^2}, & 0 < \theta_i < \varepsilon_i. \end{cases}$$

Сославшись на (VI. 4.8), имеем

$$\mathbf{Q}_i(\theta_i) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\gamma_i) \int_{\cos \varepsilon_i}^1 \frac{\mathbf{Q}_i}{\pi R_0^2 \varepsilon_i^2} P_n(\gamma'_i) d\gamma'_i.$$

Вместе с тем

$$\begin{aligned} (2n+1) P_n &= P'_{n+1} - P'_{n-1}, \\ (2n+1) \int_{\cos \varepsilon_i}^1 P_n(\gamma'_i) d\gamma'_i &= P_{n-1}(\cos \varepsilon_i) - P_{n+1}(\cos \varepsilon_i), \end{aligned}$$

так как $P_h(1) = 1$. Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_i^2} [P_{n-1}(\cos \varepsilon_i) - P_{n+1}(\cos \varepsilon_i)] &= \\ &= \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon_i} \frac{d \cos \varepsilon_i}{d\varepsilon_i} [P'_{n-1}(1) - P'_{n+1}(1)] = \frac{2n+1}{2}, \end{aligned}$$

и, следовательно, представление сосредоточенной силы (расходящимся) рядом по полиномам Лежандра $P_n(\gamma_i)$ будет

$$\mathbf{Q}_i = \frac{1}{4\pi R_0^2} \mathbf{Q}_i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\gamma_i).$$

Сославшись теперь на (3.5.1), (3.5.2), получаем

$$\Pi = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n = \frac{1}{8G\pi R_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i P_n(\gamma_i). \quad (3.14.4)$$

Заметим, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^n P_n(\gamma_i)$$

сходится и имеет суммой

$$\frac{R_0(R_0^2 - R^2)}{(R_0^2 + R^2 - 2RR_0\gamma_i)^{3/2}},$$

так что

$$\Pi = \frac{R_0^2 - R^2}{8\pi G} \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i (R_0^2 + R^2 - 2RR_0\gamma_i)^{-3/2}. \quad (3.14.5)$$

Возвращаясь к (3.14.4), получим

$$\Pi_n = \frac{2n+1}{8\pi GR_0^{n+1}} R^n \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i P_n(\gamma_i)$$

и, далее, сославшись на (3.14.3),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot R^n P_n(\gamma_i) \mathbf{Q}_i &= R^{n-1} [nP_n \mathbf{e}_R + P'_n(\mathbf{e}_R^{(i)} - \gamma_i \mathbf{e}_R)] \cdot \mathbf{Q}_i = \\ &= R^{n-1} (P'_n \mathbf{e}_R^{(i)} - P'_{n-1} \mathbf{e}_R) \cdot \mathbf{Q}_i, \end{aligned} \quad (3.14.6)$$

так как

$$nP_n - \gamma_i P'_n = -P'_{n-1}. \quad (3.14.7)$$

Сумма нормальных напряжений по (3.5.7) представляется рядом

$$\sigma = \frac{1+\nu}{4\pi R_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-1}{n^2-(1-2\nu)n+(1-\nu)} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i \cdot (P'_n \mathbf{e}_R^{(i)} - P'_{n-1} \mathbf{e}_R). \quad (3.14.8)$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \cdot R^n P_n(\gamma_i) \mathbf{Q}_i &= R^{n-2} \{ (n-1) \mathbf{e}_R (P'_n \mathbf{e}_R^{(i)} - P'_{n-1} \mathbf{e}_R) + \\ &+ P''_n (\mathbf{e}_R^{(i)} - \gamma_i \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R^{(i)} - P''_{n-1} (\mathbf{e}_R^{(i)} - \mathbf{e}_R \gamma_i) \mathbf{e}_R - P'_{n-1} (\hat{E} - \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R) \} \cdot \mathbf{Q}_i. \end{aligned}$$

Снова применив (3.14.7), можно этот результат записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \cdot R^n P_n(\gamma_i) \mathbf{Q}_i &= \\ &= R^{n-2} [-\hat{E} P'_{n-1} + \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R P''_{n-2} + \mathbf{e}_R^{(i)} \mathbf{e}_R^{(i)} P''_n - P''_{n-1} (\mathbf{e}_R^{(i)} \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R^{(i)})] \cdot \mathbf{Q}_i, \end{aligned} \quad (3.14.9)$$

и распределение напряжений на поверхностях $R = \text{const}$ по (3.5.5) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 P_R = & \frac{1}{4\pi R_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} \sum_{i=1}^N Q_i P_n(\gamma_i) + \\
 & + \frac{1}{4\pi R_0^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2n+1)(n-2)}{2[n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu]} \left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-3} - \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} \right] \times \\
 & \times \sum_{i=1}^N [-\hat{E} P'_{n-1}(\gamma_i) + e_R e_R P''_{n-2}(\gamma_i) + \\
 & + e_R^{(i)} e_R^{(i)} P''_n(\gamma_i) - P''_{n-1}(\gamma_i) (e_R^{(i)} e_R + e_R e_R^{(i)})] \cdot Q_i. \quad (3.14.10)
 \end{aligned}$$

В центре сферы по (VI.2.12) и (3.7.1) находим

$$\begin{aligned}
 P_R|_{R=0} = & \frac{21}{8\pi R_0^2 (7+5\nu)} \sum_{i=1}^N \left[\left(1 + \frac{10\nu}{7}\right) Q_i \gamma_i + \right. \\
 & \left. + 5\gamma_i Q_i \cdot e_R^{(i)} e_R^{(i)} - Q_i \cdot e_R^{(i)} e_R - Q_i \cdot e_R e_R^{(i)} \right]. \quad (3.14.11)
 \end{aligned}$$

Например, в случае сферы, сжатой двумя сосредоточенными в ее полюсах силами, имеем

$$\begin{aligned}
 Q_1 = -kQ, \quad e_R^{(1)} = k, \quad \gamma_1 = e_R \cdot k = \cos \vartheta, \\
 Q_2 = kQ, \quad e_R^{(2)} = -k, \quad \gamma_2 = -e_R \cdot k = -\cos \vartheta
 \end{aligned}$$

и по (3.14.11)

$$(P_R)_{R=0} = \frac{21Q}{4\pi R_0^2 (7+5\nu)} \left[e_R - \left(5 + \frac{10\nu}{7}\right) k \cos \vartheta \right],$$

так что нормальные напряжения на площадках, параллельных направлению сил и к ним перпендикулярных, соответственно будут ($\nu = 1/3$)

$$\sigma_x = \frac{21Q}{4\pi R_0^2 (7+5\nu)} \approx \frac{Q}{\pi R_0^2} 0,605, \quad \sigma_z = -\frac{42+15\nu}{2\pi R_0^2 (7+5\nu)} Q \approx -2,71 \frac{Q}{\pi R_0^2}.$$

3.15. Случай распределенной нагрузки. В формулах (3.14.10) и (3.14.8) следует заменить суммы интегралами. Задавая

распределение нагружения вектором $\mathbf{P}_R^0(\mu', \lambda')$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_R = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} \int_0^{2\pi} d\lambda' \int_{-1}^1 d\mu' \mathbf{P}_R^0(\mu', \lambda') P_n(\gamma) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2n+1)(n-2)}{2[n^2 - (1-2\nu)n + 1 - \nu]} \left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-3} - \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} \right] \times \\ & \times \int_0^{2\pi} d\lambda' \int_{-1}^1 d\mu' \mathbf{P}_R^0(\mu', \lambda') \cdot [-\hat{E} P'_{n-1}(\gamma) + \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R P''_{n-2}(\gamma) + \\ & + \mathbf{e}'_R \mathbf{e}'_R P''_n(\gamma) + (\mathbf{e}'_R \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_R \mathbf{e}'_R) P''_{n-1}(\gamma)], \quad (3.15.1) \end{aligned}$$

причем $\gamma = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\lambda - \lambda')$. Выражение суммы нормальных напряжений представится в виде

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{1+\nu}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-1}{n^2 - (1-2\nu)n + (1-\nu)} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} d\lambda' \int_{-1}^1 d\mu' \mathbf{P}_R^0(\mu', \lambda') \cdot [\mathbf{e}'_R P'_n(\gamma) - \mathbf{e}_R P'_{n-1}(\gamma)]. \quad (3.15.2) \end{aligned}$$

Заметим, сославшись на (3.14.5), что первую группу слагаемых в (3.15.1) можно записать в форме известного интеграла Пуассона

$$\frac{1}{4\pi R} R_0^2 (R_0^2 - R^2) \int_0^{2\pi} d\lambda' \int_{-1}^1 d\mu' \frac{\mathbf{P}_R^0(\lambda', \mu')}{(R^2 + R_0^2 - 2RR_0\gamma)^{3/2}}.$$

§ 4. Тела вращения

4.1. Интегральное уравнение равновесия. Применяя обозначения п. III.9, рассмотрим тело вращения с ненагруженной боковой поверхностью $q^2 = q_0^2$; ортогональные ей поверхности $q^1 = \pm q_0^1$ будем называть торцевыми; принимается, что поверхность $q^2 = q_*^2$ вырождается в ось вращения Oz и на ней

$$r(q^1, q_*^2) = 0 \quad (4.1.1)$$

и что поверхность $q^1 = 0$ представляет на плоскости $z = 0$ область внутри окружности радиуса b :

$$z(0, q^2) = 0, \quad r(0, q^2) \leq r(0, q_0^2) = b. \quad (4.1.2)$$

Вектор напряжения на торцевой поверхности равен

$$\mathbf{e}_1 \cdot \hat{T} = \sigma_1 \mathbf{e}_1 + \tau_{12} \mathbf{e}_2 + \tau_{1\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (4.1.3)$$

и распределение напряжений на ней статически эквивалентно главному вектору

$$\mathbf{V} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{q_*^2}^{q_0^2} (\sigma_1 \mathbf{e}_1 + \tau_{12} \mathbf{e}_2 + \tau_{1\varphi} \mathbf{e}_\varphi) H_2 r dq^2 \quad (4.1.4)$$

и главному моменту

$$\mathbf{m}^0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{q_*^2}^{q_0^2} (r \mathbf{e}_r + k \mathbf{z}) \times (\sigma_1 \mathbf{e}_1 + \tau_{12} \mathbf{e}_2 + \tau_{1\varphi} \mathbf{e}_\varphi) H_2 r dq^2. \quad (4.1.5)$$

Здесь $H_2 r d\varphi dq^2$ — элемент площади поверхности $q^1 = \text{const}$.

Полагая

$$\mathbf{V} = i_1 V_x + i_2 V_y + k V_z, \quad \mathbf{m}^0 = m_x i_1 + m_y i_2 + m_z k, \quad (4.1.6)$$

где в терминологии теории балок V_x , V_y — перерезывающие, V_z — растягивающая силы, а m_x , m_y — изгибающие, m_z — крутящий моменты, и используя формулы (III.9.8), имеем

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{q_*^2}^{q_0^2} \left[\left(-\sigma_1 \frac{\partial z}{\partial q^2} + \tau_{12} \frac{\partial r}{\partial q^2} \right) \cos \varphi - \tau_{1\varphi} H_2 \sin \varphi \right] r dq^2, \\ V_y &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{q_*^2}^{q_0^2} \left[\left(-\sigma_1 \frac{\partial z}{\partial q^2} + \tau_{12} \frac{\partial r}{\partial q^2} \right) \sin \varphi + \tau_{1\varphi} H_2 \cos \varphi \right] r dq^2, \\ V_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{q_*^2}^{q_0^2} \left(\sigma_1 \frac{\partial r}{\partial q^2} + \tau_{12} \frac{\partial z}{\partial q^2} \right) r dq^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

Вместе с тем

$$\begin{aligned} m^0 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{q_*^2}^{q_0^2} r dq^2 \left\{ \left[-\sigma_1 \left(r \frac{\partial r}{\partial q^2} + z \frac{\partial z}{\partial q^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau_{12} \left(\frac{\partial r}{\partial q^2} z - \frac{\partial z}{\partial q^2} r \right) \right] \mathbf{e}_\varphi + H_2 \tau_{1\varphi} (rk - z \mathbf{e}_r) \right\}, \end{aligned}$$

так что

$$\left. \begin{aligned} m_x &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{q_*^2}^{q_0^2} r dq^2 \left\{ \left[-\sigma_1 \left(r \frac{\partial r}{\partial q^2} + z \frac{\partial z}{\partial q^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau_{12} \left(\frac{\partial r}{\partial q^2} z - \frac{\partial z}{\partial q^2} r \right) \right] \sin \varphi + H_2 \tau_{1\varphi} z \cos \varphi \right\}, \\ m_y &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{q_*^2}^{q_0^2} r dq^2 \left\{ \left[-\sigma_1 \left(r \frac{\partial r}{\partial q^2} + z \frac{\partial z}{\partial q^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau_{12} \left(\frac{\partial r}{\partial q^2} z - \frac{\partial z}{\partial q^2} r \right) \right] \cos \varphi - H_2 \tau_{1\varphi} z \sin \varphi \right\}, \\ m_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{q_*^2}^{q_0^2} r^2 H_2 \tau_{1\varphi} dq^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.8)$$

Краевые условия на боковой поверхности, очевидно, записываются в виде

$$q^2 = q_0^2, \quad \tau_{12} = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \tau_{2\varphi} = 0. \quad (4.1.9)$$

Поскольку боковая поверхность не нагружена, главный вектор V и главный момент m^0 напряжений, распределенных по торцевой поверхности, не зависят от q^1 . Это следует из простейших соображений статики: силы, приложенные к телу, ограниченному двумя произвольно взятыми поверхностями $q^1 = \text{const}$ и боковой поверхностью $q^2 = q_0^2$, находятся в равновесии, так что их главный вектор и главный момент один и тот же на любой поверхности q^1 . Далее на распределение напряжений по этим поверхностям накладывается лишь требование их статической эквивалентности заданным V и m^0 .

Так поставленная задача распадается на четыре существенно различных задачи: 1) растяжение продольной силой V_z ; 2) кручение моментом m_z ; 3) изгиб парой m_x (или m_y); 4) изгиб силой V_x (или V_y). Напряженное состояние в задачах 1) и 2), как подсказывают формулы (4.1.7), (4.1.8), можно считать осесимметричным, причем в задаче растяжения отличны от нуля напряжения σ_1 , σ_2 , σ_φ , τ_{12} и перемещения u_1 , u_2 , а в задаче кручения — напряжения $\tau_{1\varphi}$, $\tau_{2\varphi}$ и перемещение $v = u_\varphi$ (см. п. 1.10 гл. IV). Более сложны задачи изгиба: в них отличны от нуля все компоненты тензора напряжения и вектора перемещения; в соответствии с (4.1.7), (4.1.8) можно принять в задаче

изгиба силой V_x (V_y) и парой m_y (m_x) напряжения и перемещения

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_\varphi, \tau_{12}, u_1, u_2$ пропорциональными $\cos \varphi$ ($\sin \varphi$),

$\tau_{1\varphi}, \tau_{2\varphi}, u_\varphi$ пропорциональными $\sin \varphi$ ($\cos \varphi$).

В рассмотрение удобно ввести «номинальные» напряжения: они определяются, как вычисляемые по элементарной теории напряжения при действии рассматриваемой силы или момента в круглом стержне с радиусом $b = r(0, q_0^2)$:

$$q_x = \frac{V_x}{\pi b^2}, \quad q_z = \frac{V_z}{\pi b^2}; \quad p_y = \frac{m_y b}{I_y} = \frac{4m_y}{\pi b^3}, \quad p_z = \frac{m_z b}{J_p} = \frac{2m_z}{\pi b^3}.$$

Формулы (4.1.7), (4.1.8) после интегрирования по φ можно записать в виде

$$q_x = \frac{1}{b^2} \int_{q_*^2}^{q_0^2} \left(-\sigma_1^* \frac{\partial z}{\partial q^2} + \tau_{12}^* \frac{\partial r}{\partial q^2} - \tau_{1\varphi}^* H_2 \right) r dq^2, \quad (4.1.10)$$

$$q_z = \frac{2}{b^2} \int_{q_*^2}^{q_0^2} \left(\sigma_1 \frac{\partial r}{\partial q^2} + \tau_{12} \frac{\partial z}{\partial q^2} \right) r dq^2, \quad (4.1.11)$$

$$p_x = -\frac{4}{b^3} \int_{q_*^2}^{q_0^2} \left[-\sigma_1^* \left(r \frac{\partial r}{\partial q^2} + z \frac{\partial z}{\partial q^2} \right) + \right. \\ \left. + \tau_{12}^* \left(\frac{\partial r}{\partial q^2} z - \frac{\partial z}{\partial q^2} r \right) + z H_2 \tau_{1\varphi}^* \right] r dq^2, \quad (4.1.12)$$

$$p_z = \frac{4}{b^3} \int_{q_*^2}^{q_0^2} r^2 H_2 \tau_{1\varphi} dq^2. \quad (4.1.13)$$

Здесь, как и в пп. 1.11—1.13 гл. IV, звездочкой отмечены множители перед $\cos \varphi, \sin \varphi$ в выражениях напряжений неосесимметричных задач изгиба.

Интегралы в формулах (4.1.10) и (4.1.12) указывают, что в задачах растяжения и изгиба силой напряжения убывают при $R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$ не медленнее, чем R^{-2} , а в задачах кручения и изгиба парами — не медленнее, чем R^{-3} .

Поскольку величины q_x, \dots, p_z постоянные, не зависящие от q^1 , можно при вычислении по упомянутым формулам, сославшись

на (4.1.2), принять $q^1 = 0$, $z = 0$ и, значит, $\partial z / \partial q^2 = 0$. Приходим к равенствам

$$q_x = \frac{1}{b^2} \int_{q_*^2}^{q_0^2} \left[\left(\tau_{12}^* \frac{\partial r}{\partial q^2} - \tau_{1\Phi}^* H_2 \right) r \right]_{q^1=0} dq^2, \quad (4.1.14)$$

$$q_z = \frac{2}{b^2} \int_{q_*^2}^{q_0^2} \left(\sigma_1 \frac{\partial r^2}{\partial q^2} \right)_{q^1=0} dq^2, \quad (4.1.15)$$

$$p_x = -\frac{4}{b^3} \int_{q_*^2}^{q_0^2} \left[r \left(-\sigma_1^* r \frac{\partial r}{\partial q^2} + \tau_{12}^* r H_2 \right) \right]_{q^1=0} dq^2, \quad (4.1.16)$$

$$p_z = \frac{4}{b^3} \int_{q_*^2}^{q_0^2} (r^2 H_2 \tau_{1\Phi})_{q^1=0} dq^2. \quad (4.1.17)$$

4.2. Растяжение однополлого гиперboloида вращения. С целью определения концентрации напряжений в глубинной выточке на поверхности цилиндрического стержня Нейбер рассмотрел ряд задач о равновесии тела, ограниченного поверхностью однополлого гиперboloида вращения (рис. 18), при различных заданиях главного вектора и главного момента внешних сил на торцевых поверхностях ненагруженного по боковой поверхности деформируемого тела. В этом пункте рассматривается задача растяжения, а далее — кручения и изгиба. В рассмотрение вводятся криволинейные ортогональные координаты п. III. 10

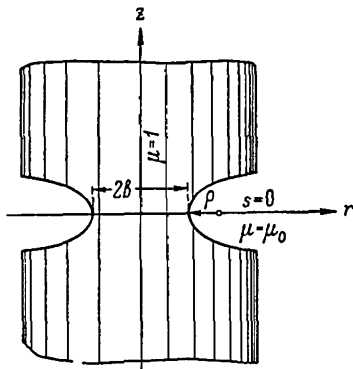


Рис. 18.

$$q^1 = s, \quad q^2 = \mu, \quad q^3 = \Phi; \\ r = a \sqrt{1 + s^2} \sqrt{1 - \mu^2}, \quad z = a s \mu,$$

причем $-\infty \leq s \leq \infty$, $0 \leq \mu \leq 1$ (по III. 10.7) и на оси вращения гиперboloида $q^2 = q_*^2 = \mu = 1$; на ненагруженной поверхности гиперboloида $q^2 = q_0^2 = \mu_0$. Краевые условия (4.1.9) записываются в виде

$$\mu = \mu_0: \quad \sigma_2 = 0, \quad \tau_{12} = 0, \quad (4.2.1)$$

тогда как распределение напряжений на части поверхности любого эллипсоида $s = s_0$, ограниченного поверхностью $\mu = \mu_0$, удовлетворяет условию (4.1.11) или (4.1.15):

$$q_z = \frac{2\sqrt{1+s^2}}{1-\mu_0^2} \int_1^{\mu_0} (-\sigma_{1\mu} \sqrt{1+s^2} + \tau_{12}s \sqrt{1-\mu^2}) d\mu = \\ = \frac{2}{1-\mu_0^2} \int_{\mu_0}^1 (\sigma_1)_{s=0} \mu d\mu, \quad (4.2.2)$$

так как здесь $b^2 = a^2(1-\mu_0^2)$. Напряжения с ростом s убывают не медленнее, чем s^{-2} .

Обращаясь к формулам (1.12.13) гл. IV, имеем следующие выражения напряжений через осесимметричные гармонические функции b_0, b_3 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{a\sigma_1}{2G} &= \frac{1-\mu^2}{s^2+\mu^2} \left[2(1-\nu) \frac{1+s^2}{1-\mu^2} \mu \frac{\partial b_3}{\partial s} + \right. \\ &\quad + 2\nu s \frac{\partial b_3}{\partial \mu} - \frac{1+s^2}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial s^2} + \mu s \frac{\partial^2 b_3}{\partial s^2} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{s}{s^2+\mu^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial s} + \mu s \frac{\partial b_3}{\partial s} \right) - \frac{\mu}{s^2+\mu^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial \mu} + \mu s \frac{\partial b_3}{\partial \mu} \right) \right], \\ \frac{a\sigma_2}{2G} &= \frac{1-\mu^2}{s^2+\mu^2} \left[2(1-\nu) s \frac{\partial b_3}{\partial \mu} + 2\nu \frac{1+s^2}{1-\mu^2} \mu \frac{\partial b_3}{\partial s} - \right. \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial \mu^2} + \mu s \frac{\partial^2 b_3}{\partial \mu^2} \right) + \frac{\mu(1+s^2)}{(s^2+\mu^2)(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial b_0}{\partial \mu} + \mu s \frac{\partial b_3}{\partial \mu} \right) - \\ &\quad \left. - \frac{s(1+s^2)}{(s^2+\mu^2)(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial b_0}{\partial s} + \mu s \frac{\partial b_3}{\partial s} \right) \right], \\ \frac{a\sigma_\varphi}{2G} &= \frac{1-\mu^2}{s^2+\mu^2} \left[2\nu \left(\frac{1+s^2}{1-\mu^2} \mu \frac{\partial b_3}{\partial s} + s \frac{\partial b_3}{\partial \mu} \right) - \right. \\ &\quad - \frac{s}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial s} + \mu s \frac{\partial b_3}{\partial s} \right) + \frac{\mu}{1+s^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial \mu} + \mu s \frac{\partial b_3}{\partial \mu} \right) \right], \\ \frac{a\tau_{12}}{2G} &= \frac{\sqrt{(1-\mu^2)(1+s^2)}}{s^2+\mu^2} \left[(1-2\nu) \left(\mu \frac{\partial b_3}{\partial \mu} + s \frac{\partial b_3}{\partial s} \right) - \right. \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial \mu \partial s} + \mu s \frac{\partial^2 b_3}{\partial \mu \partial s} \right) + \frac{\mu}{s^2+\mu^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial s} + \mu s \frac{\partial b_3}{\partial s} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{s}{s^2+\mu^2} \left(\frac{\partial b_0}{\partial \mu} + \mu s \frac{\partial b_3}{\partial \mu} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.3)$$

Из этих выражений следует, что с ростом s функция b_0 должна возрасти не быстрее $\ln s$, а b_3 — убывать не медленнее, чем s^{-1} .

Осесимметричной гармонической функцией, растущей, как $\ln s$, является

$$\ln \frac{r}{a} = \frac{1}{2} \ln(1 + s^2) + \frac{1}{2} \ln(1 - \mu^2). \quad (4.2.4)$$

Она не остается ограниченной на оси гиперболоида (при $\mu = 1$); но эту особенность можно исключить, добавляя к (4.2.4) решение $Q_0(\mu)$ [см. (VI.3.3)]. Поэтому одним из используемых решений, входящих в состав b_0 , будет

$$\varphi(s, \mu) = \ln \frac{r}{a} + Q_0(\mu) = \frac{1}{2} \ln(1 + s^2) + \ln(1 + \mu). \quad (4.2.5)$$

Осесимметричными решениями уравнения Лапласа, убывающими, как s^{-1} и s^{-2} , являются по (VI.3.7) и (VI.1.8) функции

$$q_0(s)P_0(\mu) = \operatorname{arcc}tg s, \quad q_1(s)P_1(\mu) = (s \operatorname{arcc}tg s - 1)\mu. \quad (4.2.6)$$

Первое принимается за b_3 , второе включается в b_0 . Итак, полагаем

$$\left. \begin{aligned} b_3 &= \frac{a}{2G} C \operatorname{arcc}tg s, \\ b_0 &= \frac{a}{2G} \{A [\ln \sqrt{1 + s^2} + \ln(1 + \mu)] + B (s \operatorname{arcc}tg s - 1)\mu\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

После вычисления по формулам (4.2.3) краевые условия (4.2.1), которым надо удовлетворять при любом s , записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} -\left[\frac{A}{1 + \mu_0} - C(1 - 2\nu) \right] + \frac{1}{\mu_0^2 + s^2} (A - B - C\mu_0^2) &= 0, \\ \left[\frac{A}{1 + \mu_0} - C(1 - 2\nu) \right] + \frac{1}{\mu_0^2 + s^2} (A - B - C\mu_0^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.8)$$

Нет ничего неожиданного в том, что в правильно взятом решении выполнение, скажем, первого краевого условия (для $\sigma_2 = 0$) автоматически влечет выполнение второго. Для такого решения распределенные по поверхностям двух произвольно взятых эллипсоидов, ограниченных куском поверхности $s_1 \leq s \leq s_2$ гиперболоида $\mu = \mu_0$, напряжения уравниваются. Но на этом куске по условию $\sigma_2 = 0$, значит, и напряжения τ_{12} на нем статически эквивалентны нулю, и вследствие произвола выбора s_1, s_2 напряжения $\tau_{12} = 0$.

Получаем

$$\left. \begin{aligned} C(1 - 2\nu) &= \frac{A}{1 + \mu_0}, \quad B = A - C\mu_0^2; \\ \sigma_1|_{s=0} &= \frac{1}{\mu} \left[B - 2(1 - \nu)C + \frac{1}{\mu^2} (B - A) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2.9)$$

и отсюда по (4.2.2)

$$C = -\frac{1}{2} q_z \frac{1 + \mu_0}{1 + 2\nu\mu_0 + \mu_0^2}. \quad (4.2.10)$$

Этим полностью определяется напряженное состояние. Коэффициенты концентрации напряжений σ_1 , σ_φ определяются отношением их в наиболее глубокой точке выточки $\mu = \mu_0$, $s = 0$ (в критической точке) к номинальному напряжению:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{q_z} (\sigma_1)_{\substack{s=0 \\ \mu=\mu_0}} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{1 + \mu_0}{1 + 2\nu\mu_0 + \mu_0^2} [2 + \mu_0^2 - (1 - 2\nu)\mu_0], \\ k_\varphi &= \frac{1}{q_z} (\sigma_\varphi)_{\substack{s=0 \\ \mu=\mu_0}} = \frac{1 - \mu_0^2}{1 + 2\nu\mu_0 + \mu_0^2} \left(\frac{\nu}{\mu_0} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.2.11)$$

Например, при $\mu_0 = 0,2$, принимая $\nu = 0,3$, имеем $k_1 = 5,08$, $k_\varphi = 1,65$. Вместо μ_0 в эту формулу вносят кривизну меридиана в критической точке

$$\frac{a}{\rho} = \frac{1 - \mu_0^2}{\mu_0^2}.$$

Напряжения быстро убывают по мере удаления от критической точки; это позволяет оценивать коэффициент концентрации в точке максимальной кривизны наружной выточки на теле вращения при любой форме меридиана по его значению (4.2.11) для гиперboloида.

4.3. Кручение гиперboloида. Это — наиболее простая задача в рассматриваемой группе задач, так как, в соответствии с п. 1.11 гл. IV, решение сводится к разысканию одной лишь гармонической функции $ve^{i\varphi}$ такой, что v/r убывает с ростом s не медленнее s^{-3} . Решение дается функцией

$$\begin{aligned} v &= aCq_1^1(s) P_1^1(\mu) = aC \left(\frac{s}{1+s^2} - \operatorname{arctg} s \right) \sqrt{1+s^2} \sqrt{1-\mu^2} = \\ &= Cr \left(\frac{s}{1+s^2} - \operatorname{arctg} s \right), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

и по (1.11.3) гл. IV

$$\frac{1}{G} \tau_{1\varphi} = \frac{2C}{1+s^2} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{s^2+\mu^2}}, \quad \tau_{2\varphi} = 0. \quad (4.3.2)$$

Краевое условие на боковой поверхности (4.1.9) удовлетворяется, а постоянная C , определяемая по (4.1.17), оказывается равной

$$C = \frac{3}{8} \frac{p_z}{G} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}(1+\mu_0)}{(2+\mu_0)(1-\mu_0)}. \quad (4.3.3)$$

Коэффициент концентрации напряжения $\tau_{1\varphi}$ дается формулой

$$\left(\frac{\tau_{1\varphi}}{\rho_z} \right)_{\substack{s=0 \\ \mu=\mu_0}} = \frac{3}{4} \frac{(1+\mu_0)^2}{\mu_0(2+\mu_0)}. \quad (4.3.4)$$

4.4. Изгиб гиперboloида. Задачи изгиба тела вращения не осесимметричны, и гармонические функции B_0, B_3 следует брать пропорциональными $\cos \varphi$; при изгибе силой V_x и парой m_y в решение включается также гармоническая функция B_1 , так что

$$B_r = B_1 \cos \varphi, \quad B_\varphi = -B_1 \sin \varphi,$$

и поэтому, приняв

$$B_r = b_r(q^1, q^2) \cos \varphi, \quad B_\varphi = b_\varphi(q^1, q^2) \sin \varphi,$$

имеем в формулах (1.13.5), (1.13.6) гл. IV

$$n=1, \quad b_r = -b_\varphi = B_1, \quad (4.4.1)$$

причем b_r, b_φ — осесимметричные гармонические функции (см. также (1.13.4) гл. IV), равно как $b_0 e^{i\varphi}, b_3 e^{i\varphi}$.

Структура формул (1.2.13), (1.2.14) и (1.13.5), (1.13.6) гл. IV с учетом того, что r, z, H_2 возрастают пропорционально s , H_1 с ростом s остается конечной величиной, а напряжения в задаче изгиба силой (парой) убывают, как $s^{-2}(s^{-3})$, накладывает определенные требования на порядок роста введенных в рассмотрение функций $b_0, b_3, b_r = -b_\varphi$.

Изгиб силой. В состав гармонической функции $b_0 e^{i\varphi}$ вносится слагаемое, остающееся конечным при $s \rightarrow \infty$. Таковыми при $n=1$ являются по (VI.3.12), (VI.3.16), (IV.3.17)

$$\tilde{P}_0^1(s) \tilde{P}_0^1(\mu) = \frac{s\mu}{\sqrt{(1+s^2)(1-\mu^2)}}, \quad \tilde{Q}_0^1(s) Q_0^1(\mu) = \frac{s}{\sqrt{(1+s^2)(1-\mu^2)}}, \quad (4.4.2)$$

разность которых конечна на оси гиперboloида (при $\mu=1$):

$$\varphi_1(s, \mu) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}. \quad (4.4.3)$$

В состав b_0 вносится еще одно слагаемое вида (4.3.1). Функция b_3 должна убывать, как s^{-1} . Таким решением, конечным на оси гиперboloида, является

$$\varphi_2(s, \mu) = -q_0^1(s) [Q_0^1(\mu) - P_0^1(\mu)] = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}. \quad (4.4.4)$$

Наконец, b_r — осесимметричная гармоническая функция, убывающая, как s^{-1} ; таковой является $q_0(s) = \operatorname{arcc}tg s$. Итак, решение задачи строится с помощью функций

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= A \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} + B \left(\frac{s}{1+s^2} - \operatorname{arcc}tg s \right) r, \\ b_3 &= C \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}, \quad b_r = -b_\varphi = D \operatorname{arcc}tg s. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.5)$$

Трех постоянных оказывается достаточным, чтобы удовлетворить трем краевым условиям (4.1.9); четвертое уравнение дается условием (4.1.14).

Изгиб парой m_φ . Набор функций, решающих эту задачу, дается функциями

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= A \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}} + B q_2^1(s) P_2^1(\mu), \\ b_3 &= C \left(\frac{s}{1+s^2} - \operatorname{arcc}tg s \right) r, \\ b_r &= -b_\varphi = D P_1(\mu) q_1(s) = D \mu (s \operatorname{arcc}tg s - 1), \end{aligned} \right\} \quad (4.4.6)$$

причем по (VI.3.7), (VI.3.1.1), (VI.2.16)

$$q_2^1(s) = 3 \sqrt{1+s^2} \left[s \operatorname{arcc}tg s - 1 - \frac{1}{3(1+s^2)} \right], \quad P_2^1(\mu) = 3\mu \sqrt{1-\mu^2}.$$

Опускаем дальнейшее вычисление, которое заняло бы много места. Аналогично рассматриваются задачи о напряженном состоянии упругого пространства при наличии в нем полости, ограниченной поверхностью сжатого эллипсоида вращения, при заданном напряженном состоянии на бесконечности. Способ решения более общей задачи, когда поверхность полости является трехосным эллипсоидом, указан в § 5 этой главы.

4.5. Вращающийся эллипсоид вращения. Предполагается, что эллипсоид вращается вокруг его оси симметрии (оси Oz). Частное решение, соответствующее действию массовой центробежной силы, предполагается выбранным по формулам (3.11.5), (3.11.6). Решение этой осесимметричной задачи строится с помощью бигармонической функции Лява χ (см. п. 1.10 гл. IV). Применяются цилиндрические координаты r, z , так как использование вырожденных эллиптических координат было бы более сложно.

На напряженное состояние \hat{T}^0 , задаваемое формулами (3.11.6), налагается также осесимметричное напряженное состояние \hat{T}^* , определяемое по краевому условию

$$n \cdot \hat{T} = n \cdot \hat{T}^0 + n \cdot \hat{T}^* = 0$$

или, в развернутом виде,

$$\sigma_r^* n_r + \tau_{rz}^* n_z = A r^2 n_r, \quad \tau_{rz}^* n_r + \sigma_z^* n_z = A_1 r^2 n_z, \quad (4.5.1)$$

$$A = \frac{\omega^2 \gamma (3 - 2\nu)}{8g(1 - \nu)}, \quad A_1 = \frac{\omega^2 \gamma \nu}{2g(1 - \nu)}. \quad (4.5.2)$$

Здесь n_r, n_z — проекции на направления e_r, k единичного вектора нормали n к поверхности эллипсоида, так что

$$n = \frac{1}{H_s} \left(\frac{\partial r}{\partial s} e_r + \frac{\partial z}{\partial s} k \right), \quad \frac{n_z}{n_r} = \frac{\partial z / \partial s}{\partial r / \partial s} = \frac{z}{r} \frac{s^2 \pm 1}{s^2} = \frac{z}{r} \frac{a^2}{c^2} = \frac{z}{ra},$$

где $\alpha = c^2/a^2$ — квадрат отношения полуосей эллипсоида, который может быть как сплюснутым, так и вытянутым (см. п. III.10). По (1.10.6) гл. IV приходим к краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} \alpha r \frac{\partial}{\partial z} \left(-\nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right) + z \frac{\partial}{\partial r} \left[-(1 - \nu) \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right] &= A \alpha r^3, \\ \alpha r \frac{\partial}{\partial r} \left[-(1 - \nu) \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right] + \\ &+ z \frac{\partial}{\partial z} \left[-(2 - \nu) \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right] = A_1 r^2 z, \end{aligned} \right\} \quad (4.5.3)$$

которые должны быть выполнены на поверхности эллипсоида

$$z^2 = c^2 - \alpha r^2. \quad (4.5.4)$$

Нетрудно понять, что бигармоническая функция χ должна быть нечетной по z ; тогда в правые части (4.5.3) войдут (после сокращения на r и z) только слагаемые, четные по z , которые далее исключаются с помощью (4.5.4).

Аксиально-симметричные гармонические внутри эллипсоида функции $R^n P_n(\mu)$ представимы следующими однородными полиномами по r, z (см. п. VI.2):

$$R P_1(\mu) = z, \quad R^2 P_2(\mu) = z^2 - \frac{1}{2} r^2, \quad R^3 P_3(\mu) = z^3 - \frac{3}{2} z r^2,$$

$$R^4 P_4(\mu) = z^4 - 3 z^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4, \quad R^5 P_5(\mu) = z^5 - 5 z^3 r^2 + \frac{15}{8} r^4 z$$

(отброшены несущественные числовые множители). Они обозначаются далее $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_5$. Бигармонической функцией является произведение гармонической на z или на $z^2 + r^2 = R^2$. Поэтому в состав χ кроме φ_3, φ_5 включаются

$$(r^2 + z^2) \varphi_1, z \varphi_2, (r^2 + z^2) \varphi_3, z \varphi_4, \dots$$

Оказывается достаточным принять

$$\chi = C_3 c^2 \varphi_3 + C_5 \varphi_5 + D_1 c^2 z r^2 + D_2 \left(z^3 r^2 - \frac{3}{4} r^4 z \right), \quad (4.5.5)$$

причем третье и четвертое бигармонические слагаемые линейно представимы через перечисленные функции.

Определив постоянные, приходим к следующим выражениям компонент тензора \hat{T}^* :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Q} \sigma_r^* &= \left\{ (3-2\nu) [4\alpha(1+\nu) + 2 + \nu] + 4\nu \left(\frac{11}{4} + \frac{5}{2} \nu \right) \right\} (c^2 - z^2) + \\ &+ \left\{ (3-2\nu) \left[\alpha\nu + \frac{1}{4} (3 + \nu) \right] + 4\nu \left[\frac{1}{2} (1 - \alpha) \nu - \frac{3}{4} \alpha \right] \right\} r^2 + \\ &+ a^2 \left\{ 2(3-2\nu) - 4\nu \left[\frac{\nu}{2} + 2\alpha(1+\nu) \right] \right\}, \\ \frac{1}{Q} \sigma_\tau^* &= \left\{ (3-2\nu) [4\alpha(1+\nu) + (2+\nu)] + 4\nu \left(\frac{11}{4} + \frac{5}{2} \nu \right) \right\} (c^2 - z^2) + \\ &+ \left\{ (3-2\nu) \left[\left(3\alpha + \frac{3}{4} \right) \nu + \frac{1}{4} \right] + 4\nu \left(\frac{\alpha\nu}{2} + 2\nu - \frac{\alpha}{4} \right) \right\} r^2 + \\ &+ a^2 \left\{ 2(3-2\nu) - 4\nu \left[\frac{\nu}{2} + 2\alpha(1+\nu) \right] \right\}, \\ \frac{1}{Q} \sigma_z^* &= \left\{ -2(3-2\nu) + 4\nu \left[\frac{\nu}{2} + 2\alpha(1+\nu) \right] \right\} (c^2 - z^2) + \\ &+ \left\{ (3-2\nu) 4\alpha + 4\nu \left[(2+\nu) \alpha + \frac{11+\nu}{4} \right] \right\} r^2, \\ \frac{1}{Q} \tau_{rz}^* &= \left\{ -2(3-2\nu) + 4\nu \left[\frac{\nu}{2} + 2\alpha(1+\nu) \right] \right\} rz, \end{aligned} \right\} \quad (4.5.6)$$

где обозначено

$$Q = \frac{\omega^2 \gamma}{8g(1-\nu)\Delta}, \quad \Delta = 4\alpha^2(1+\nu) + 2\alpha(1+\nu) + \frac{11+\nu}{4}. \quad (4.5.7)$$

Проекция вектора перемещения u на направления e_r, k определяются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{2G}{Q} u_r &= a^2 r \frac{1-\nu}{1+\nu} \left[2(3-2\nu) - 4\nu \left(\frac{\nu}{2} + 2\alpha + 2\alpha\nu \right) \right] + \\ &+ r(c^2 - z^2) \left\{ (3-2\nu) [2 - \nu + 4\alpha(1-\nu)] + 4\nu \left(\frac{11}{4} - 2\alpha\nu - 3\nu \right) \right\} + \\ &+ r^3 \left\{ (3-2\nu) \left[\frac{1}{4} (1-\nu) - \alpha\nu \right] - 4\nu \left(\frac{3}{4} \nu + \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} \nu\alpha \right) \right\} + \frac{2G}{Q} u_r^0, \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{2G}{Q} w &= a^2 z \frac{\nu}{1+\nu} [-4(3-2\nu) + 4\nu(\nu + 4\alpha + 4\alpha\nu)] + \\ &+ z \left(c^2 - \frac{z^2}{3} \right) \{ -2(3-2\nu) [1 + (4\alpha + 1)\nu + 4\nu(2\alpha - 5\nu)] \} + \\ &+ zr^2 \left\{ -(3-2\nu) [\nu - 4\alpha(1-\nu)] + 4\nu \left(\frac{11-10\nu}{4} + 2\alpha \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

В частности, в полюсах и на экваторе эллипсоида вращения

$$(2Gw)_{\substack{z=c \\ r=0}} = \frac{\omega^2 \gamma a^2 c}{8g(1-\nu)\Delta} \left\{ \frac{\nu}{1+\nu} [-4(3-2\nu) + 4\nu(\nu + 4\alpha + 4\alpha\nu)] + \right. \\ \left. + \frac{2}{3}\alpha [-2(3-2\nu)(1+4\alpha\nu + \nu) + 4\nu(2\alpha - 5\nu)] \right\}, \quad (4.5.10)$$

$$(2Gu_r)_{\substack{z=0 \\ r=a}} = \frac{\omega^2 \gamma a^3}{8g(1-\nu)\Delta} \left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} \left[2(3-2\nu) - 4\nu \left(\frac{\nu}{2} + 2\alpha + 2\alpha\nu \right) \right] + \right. \\ \left. + \left[(3-2\nu) \left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{4} - \alpha\nu \right) - 4\nu \left(\frac{3}{4}\nu + \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2}\nu\alpha \right) \right] - \right. \\ \left. - (1-2\nu) \left[4\alpha^2(1+\nu) + 2\alpha(1+\nu) + \frac{11+\nu}{4} \right] \right\}. \quad (4.5.11)$$

При $\alpha = 1$ возвращаемся к формулам (3.13.10) для сферы*).

§ 5. Эллипсоид

5.1. Эластостатическая задача Робена для трехосного эллипсоида. Постановка задачи была дана в п. 4.7 гл. IV, а в п. 3.3 приведено ее решение в наиболее простом случае смещения твердой сферы в неограниченной упругой среде. Здесь эта задача рассматривается в предположении, что смещаемым твердым телом является трехосный эллипсоид

$$\frac{x_1^2}{a^2 \rho_0^2} + \frac{x_2^2}{a^2 (\rho_0^2 - e^2)} + \frac{x_3^2}{a^2 (\rho_0^2 - 1)} - 1 = 0 \quad (5.1.1)$$

с полуосями $a\rho_0$, $a\sqrt{\rho_0^2 - e^2}$, $a\sqrt{\rho_0^2 - 1}$. При решении используются потенциалы простого слоя на эллипсоиде, перечисленные в (VI.8.3) и обозначаемые здесь для упрощения записей через $\psi_i(x, y, z)$. На поверхности эллипсоида и внутри него эти потенциалы принимают значения, соответственно равные

$$\psi_0 = 1; \quad \psi_s = x_s \quad (s = 1, 2, 3), \quad \psi_4 = x_2 x_3, \quad \psi_5 = x_3 x_1, \quad \psi_6 = x_1 x_2, \quad (5.1.2)$$

а вне эллипсоида

$$\psi_0 = \frac{\omega_0(\rho)}{\omega_0(\rho_0)}, \quad \psi_s = \frac{\omega_s(\rho)}{\omega_s(\rho_0)} x_s \quad (s = 1, 2, 3), \quad (5.1.3)$$

$$\psi_4 = \frac{\omega_4(\rho)}{\omega_4(\rho_0)} x_2 x_3, \quad \psi_5 = \frac{\omega_5(\rho)}{\omega_5(\rho_0)} x_3 x_1, \quad \psi_6 = \frac{\omega_6(\rho)}{\omega_6(\rho_0)} x_1 x_2. \quad (5.1.4)$$

Функции $\omega_s(\rho)$ задаются эллиптическими интегралами с помощью формул (VI.7.5)–(VI.7.9); обозначения $\omega_i^{(k)}$ в них здесь заменены на ω_s для $s = 1, 2, 3$, а $\omega_2^{(k)}$ — на ω_s для $s = 4, 5, 6$.

*) Случай вращающегося тонкого сплюсненного эллипсоида, рассмотренный Кри (С. Chree, 1895), может быть получен из вышеприведенных формул при $\alpha \ll 1$.

Далее рассматривается сначала случай задания впаивному в упругую среду эллипсоиду поступательного перемещения

$$\rho = \rho_0: \quad u = u^0 \quad (5.1.5)$$

и затем отдельно — перемещения поворота

$$\rho = \rho_0: \quad u = \theta \times R_0, \quad (5.1.6)$$

где R_0 — вектор-радиус точки на поверхности (5.1.1).

5.2. Поступательное перемещение. Для построения гармонических вектора B и скаляра B_0 в решении Папковича — Нейбера (1.4.10) гл. IV, записываемом здесь в виде

$$u_s = (3 - 4\nu) B_s - \sum_{k=1}^3 x_k \frac{\partial B_k}{\partial x_s} - \frac{\partial B_0}{\partial x_s} \quad (s = 1, 2, 3), \quad (5.2.1)$$

применяются потенциалы $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$. Принимаем

$$B_s = C_s \psi_0, \quad B_0 = M_1 \psi_1 + M_2 \psi_2 + M_3 \psi_3 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (5.2.2)$$

и шести постоянных C_s, M_s оказывается достаточным, чтобы удовлетворить краевым условиям (5.1.5). Действительно, развернутая запись равенств (5.2.1) представляется в виде

$$u_s = (3 - 4\nu) C_s \frac{\omega_s(\rho)}{\omega_0(\rho_0)} - M_s \frac{\omega_s(\rho)}{\omega_s(\rho_0)} + \\ + \frac{1}{\Delta(\rho)} \frac{\partial \rho}{\partial x_s} \left\{ x_1 \left[\frac{C_1}{\omega_0(\rho_0)} + \frac{M_1}{\omega_1(\rho_0) \rho^2} \right] + x_2 \left[\frac{C_2}{\omega_0(\rho_0)} + \frac{M_2}{\omega_2(\rho_0) (\rho^2 - e^2)} \right] + \right. \\ \left. + x_3 \left[\frac{C_3}{\omega_0(\rho_0)} + \frac{M_3}{\omega_3(\rho_0) (\rho_0^2 - 1)} \right] \right\}, \quad (5.2.3)$$

и остается принять

$$\left. \begin{aligned} u_s^0 &= (3 - 4\nu) C_s - M_s \quad (s = 1, 2, 3), \\ \frac{C_1}{\omega_0(\rho_0)} + \frac{M_1}{\omega_1(\rho_0) \rho_0^2} &= 0, \quad \frac{C_2}{\omega_0(\rho_0)} + \frac{M_2}{\omega_2(\rho_0) (\rho_0^2 - e^2)} = 0, \\ \frac{C_3}{\omega_0(\rho_0)} + \frac{M_3}{\omega_3(\rho_0) (\rho_0^2 - 1)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.4)$$

Отсюда находим постоянные C_s, M_s . Используя также соотношения (III. 11.26), приходим к выражениям перемещений

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\sigma_1(\rho)}{\sigma_1(\rho_0)} u_1^0 + \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho^2} x_1 \Phi, \\ u_2 &= \frac{\sigma_2(\rho)}{\sigma_2(\rho_0)} u_2^0 + \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho^2 - e^2} x_2 \Phi, \\ u_3 &= \frac{\sigma_3(\rho)}{\sigma_3(\rho_0)} u_3^0 + \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho^2 - 1} x_3 \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.5)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(\rho) &= (3 - 4\nu) \omega_0(\rho) + \rho_0^2 \omega_1(\rho), \\ \sigma_2(\rho) &= (3 - 4\nu) \omega_0(\rho) + (\rho_0^2 - e^2) \omega_2(\rho), \\ \sigma_3(\rho) &= (3 - 4\nu) \omega_0(\rho) + (\rho_0^2 - 1) \omega_3(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (5.2.6)$$

$$\Phi = \frac{1}{\rho \Delta(\rho) D^2} \left[\frac{u_1^0}{\sigma_1(\rho_0)} \frac{x_1}{\rho^2} + \frac{u_2^0}{\sigma_2(\rho_0)} \frac{x_2}{\rho^2 - e^2} + \frac{u_3^0}{\sigma_3(\rho_0)} \frac{x_3}{\rho^2 - 1} \right], \quad (5.2.7)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} D^2 &= \frac{x_1^2}{\rho^4} + \frac{x_2^2}{(\rho^2 - e^2)^2} + \frac{x_3^2}{(\rho^2 - 1)^2}, \\ \rho \Delta(\rho) D &= \Delta(\rho) H_\rho = a \sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.8)$$

5.3. Распределение напряжений по поверхности эллипсоида.

Зная вектор перемещения, конечно, можно вычислить тензор напряжений в любой точке среды. Его выражение очень громоздко, поэтому ограничимся определением вектора напряжений t_n на поверхности эллипсоида (при $\rho = \rho_0$). Учитывая при этом, что

$$\sigma'_s(\rho_0) = - \frac{4(1 - \nu)}{\Delta(\rho_0)} \quad (s = 1, 2, 3), \quad (5.3.1)$$

имеем ($\rho = \rho_0$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_s} &= \left[- \frac{4(1 - \nu)}{\Delta(\rho_0)} \frac{u_1^0}{\sigma_1(\rho_0)} + \frac{2\rho_0}{\rho_0^2} x_1 \Phi^0 \right] \frac{\partial \rho}{\partial x_s} = \Psi_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_s}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_s} &= \left[- \frac{4(1 - \nu)}{\Delta(\rho_0)} \frac{u_2^0}{\sigma_2(\rho_0)} + \frac{2\rho_0}{\rho_0^2 - e^2} x_2 \Phi^0 \right] \frac{\partial \rho}{\partial x_s} = \Psi_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_s}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_s} &= \left[- \frac{4(1 - \nu)}{\Delta(\rho_0)} \frac{u_3^0}{\sigma_3(\rho_0)} + \frac{2\rho_0}{\rho_0^2 - 1} x_3 \Phi^0 \right] \frac{\partial \rho}{\partial x_s} = \Psi_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_s}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.2)$$

Замечая еще, что на поверхности эллипсоида $n_s = \frac{\partial \rho}{\partial x_s} \rho_0 D_0$, где

n_s — косинус угла единичного вектора нормали к поверхности эллипсоида $\rho = \rho_0$ с осью x_s , имеем

$$\begin{aligned} \frac{t_{n1}}{2G} &= \frac{1}{2G} (\sigma_1 n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3) = \frac{\nu}{1 - 2\nu} \rho_0 D_0 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \sum_{s=1}^3 \Psi_s \frac{\partial \rho}{\partial x_s} + \\ &+ \Psi_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} n_1 + \frac{1}{2} \left(\Psi_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \Psi_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) n_2 + \frac{1}{2} \left(\Psi_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} + \Psi_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) n_3 = \\ &= \frac{1}{2(1 - 2\nu)} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \rho_0 D_0 \sum_{s=1}^3 \Psi_s \frac{\partial \rho}{\partial x_s} + \frac{1}{2\rho_0 D_0} \Psi_1. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Еще раз сославшись на формулы (III.11.26), имеем вместе с тем

$$\sum_{s=1}^3 \Psi_s \frac{\partial \rho}{\partial x_s} = - \frac{4(1-\nu)}{\rho_0 \Delta(\rho_0) D_0^2} \left[\frac{u_1}{\sigma_1(\rho_0)} \frac{x_1}{\rho_0^2} + \frac{u_2^0}{\sigma_2(\rho_0)} \frac{x_2}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{u_3^0}{\sigma_3(\rho_0)} \frac{x_3}{\rho_0^2 - 1} \right] + \\ + \frac{2\Phi^0}{D_0^2} \left(\frac{x_1^2}{\rho_0^4} + \frac{x_2^2}{(\rho_0^2 - e^2)^2} + \frac{x_3^2}{(\rho_0^2 - 1)^2} \right),$$

так что по (5.2.7), (5.2.8)

$$\sum_{s=1}^3 \Psi_s \frac{\partial \rho}{\partial x_s} = -2(1-2\nu)\Phi^0. \quad (5.3.4)$$

Подстановка в (5.3.3) дает теперь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2G} t_{n1} &= \frac{1}{\rho_0 D_0} \left(\frac{1}{2} \Psi_1 - \rho_0 \frac{x_1}{\rho_0^2} \Phi^0 \right) = - \frac{2(1-\nu)}{\rho_0 D_0 \Delta(\rho_0)} \frac{u_1^0}{\sigma_1(\rho_0)}, \\ \frac{1}{2G} t_{n2} &= \frac{1}{\rho_0 D_0} \left(\frac{1}{2} \Psi_2 - \frac{\rho_0 x_2}{\rho_0^2 - e^2} \Phi^0 \right) = - \frac{2(1-\nu)}{\rho_0 D_0 \Delta(\rho_0)} \frac{u_2^0}{\sigma_2(\rho_0)}, \\ \frac{1}{2G} t_{n3} &= \frac{1}{\rho_0 D_0} \left(\frac{1}{2} \Psi_3 - \frac{\rho_0 x_3}{\rho_0^2 - 1} \Phi^0 \right) = - \frac{2(1-\nu)}{\rho_0 D_0 \Delta(\rho_0)} \frac{u_3^0}{\sigma_3(\rho_0)} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.5)$$

или, по (III.11.21) и (III.11.22),

$$t_{ns} = - \frac{4G(1-\nu)}{a \sqrt{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)}} \frac{u_s^0}{\sigma_s(\rho_0)} \quad (s = 1, 2, 3). \quad (5.3.6)$$

Этот неожиданно простой результат, полученный прямым вычислением, может быть сразу же найден, если основываться на представлении вектора Папковича — Нейбера (4.3.15) гл. IV, в котором плотность $\mathbf{a}(M_0)$ как раз является искомым вектором напряжения $-\mathbf{t}_n$ на поверхности полости в упругой среде, что следует из выражения (4.7.1) гл. IV. В нашем случае по (5.2.2) и (5.2.5) проекции вектора \mathbf{B} при $\rho = \rho_0$ равны

$$B_s = \frac{u_s^0}{\sigma_s(\rho_0)} \omega_0(\rho), \quad (5.3.7)$$

а на поверхности эллипсоида имеют постоянные значения, которые являются также значениями этих гармонических функций и внутри эллипсоида. Итак, сославшись на (4.3.15) гл. IV,

имеем

$$-\frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \int \int \frac{t_{ns}}{R} d\sigma = \begin{cases} B_s^{(e)} = \frac{u_s^0}{\sigma_s(\rho_0)} \omega_0(\rho), & \rho > \rho_0, \\ B_s^{(i)} = \frac{u_s^0}{\sigma_s(\rho_0)} \omega_0(\rho_0), & \rho < \rho_0, \end{cases} \quad (5.3.8)$$

и по теореме о разрыве нормальной производной простого слоя

$$\left(\frac{\partial B_s^{(i)}}{\partial n} - \frac{\partial B_s^{(e)}}{\partial n} \right)_{\rho=\rho_0} = -4\pi \frac{t_{ns}}{16\pi G(1-\nu)},$$

или

$$\begin{aligned} t_{ns} &= 4G(1-\nu) \left(\frac{\partial B_s^{(e)}}{\partial n} \right)_{\rho=\rho_0} = 4G(1-\nu) \frac{u_s^0}{\sigma_s(\rho_0)} \left(\frac{\partial \omega_0(\rho)}{H_\rho \partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} = \\ &= -\frac{4G(1-\nu)}{\sigma_s(\rho_0)} \frac{u_s^0}{H_\rho^0 \Delta(\rho_0)}, \end{aligned}$$

как и требовалось.

Уравнением

$$Q_s + \int \int_O t_{ns} d\sigma = 0$$

определяются проекции силы \mathbf{Q} , которую следует приложить к эллипсоиду, чтобы сообщить ему перемещение \mathbf{u}^0 . Имеем по (III. 11.22), (III. 11.23)

$$d\sigma = H_\mu H_\nu d\mu d\nu, \quad \frac{d\sigma}{\Delta(\rho_0) H_\rho^0} = \frac{\sigma(\mu^2 - \nu^2)}{\Delta_1(\mu) \Delta(\nu)} d\mu d\nu,$$

так что по (5.3.6)

$$Q_s = 32G(1-\nu) \frac{au_s^0}{\sigma_s(\rho_0)} \int_e^1 \frac{d\mu}{\Delta_1(\mu)} \int_0^e \frac{\mu^2 - \nu^2}{\Delta(\nu)} d\nu,$$

где интегрирование ведется по октанту эллипсоида. Вычисление дает

$$\begin{aligned} \int_e^1 \frac{\mu^2 d\mu}{\Delta_1(\mu)} \int_0^e \frac{d\nu}{\Delta(\nu)} &= E(e') K(e), \quad - \int_0^e \frac{\nu^2}{\Delta(\nu)} d\nu \int_e^1 \frac{d\mu}{\Delta_1(\mu)} = \\ &= K(e') \left[\int_0^e \sqrt{\frac{1-\nu^2}{e^2-\nu^2}} d\nu - K(e) \right] = K(e') E(e) - K(e') K(e) \\ & \quad (e' = \sqrt{1-e^2}), \end{aligned}$$

так что по известному соотношению Лежандра

$$\int_e^1 \frac{d\mu}{\Delta_1(\mu)} \int_0^e \frac{\mu^2 - \nu^2}{\Delta(\nu)} d\nu = E(e') K(e) + K(e') E(e) - K(e') K(e) = \frac{\pi}{2}.$$

Получаем

$$Q_s = 16\pi G (1 - \nu) \frac{au_s^0}{\sigma_s(\rho_0)} \quad (s = 1, 2, 3). \quad (5.3.9)$$

5.4. Перемещение поворота. Задаем гармонические функции Папповича — Нейбера равенствами

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= D_1 \theta_2 x_3 \omega_3(\rho) - D'_1 \theta_3 x_2 \omega_2(\rho), \\ B_2 &= D_2 \theta_3 x_1 \omega_1(\rho) - D'_2 \theta_1 x_3 \omega_3(\rho), \\ B_3 &= D_3 \theta_1 x_2 \omega_2(\rho) - D'_3 \theta_2 x_1 \omega_1(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (5.4.1)$$

$$B_0 = N_1 \theta_1 x_2 x_3 \omega_4(\rho) + N_2 \theta_2 x_3 x_1 \omega_5(\rho) + N_3 \theta_3 x_1 x_2 \omega_6(\rho), \quad (5.4.2)$$

так что

$$\begin{aligned} x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3 + B_0 &= \theta_1 x_2 x_3 [D_3 \omega_2(\rho) - D'_3 \omega_3(\rho) + N_1 \omega_4(\rho)] + \\ &+ \theta_2 x_3 x_1 [D_1 \omega_3(\rho) - D'_1 \omega_1(\rho) + N_2 \omega_5(\rho)] + \\ &+ \theta_3 x_1 x_2 [D_2 \omega_1(\rho) - D'_2 \omega_2(\rho) + N_3 \omega_6(\rho)]. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Компонент u_1 вектора перемещения представляется формулой

$$\begin{aligned} u_1 &= \theta_2 x_3 [(3 - 4\nu) D_1 \omega_3(\rho) + D'_3 \omega_1(\rho) - N_2 \omega_5(\rho)] - \\ &- \theta_3 x_2 [(3 - 4\nu) D'_1 \omega_2(\rho) + D_2 \omega_1(\rho) + N_3 \omega_6(\rho)] + \\ &+ \frac{1}{\Delta(\rho)} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \left\{ \theta_1 x_2 x_3 \left[\frac{D_3}{\rho^2 - e^2} - \frac{D'_2}{\rho^2 - 1} + \frac{N_1}{(\rho^2 - 1)(\rho^2 - e^2)} \right] + \right. \\ &+ \theta_2 x_3 x_1 \left[\frac{D'_1}{\rho^2 - 1} - \frac{D'_3}{\rho^2} + \frac{N_2}{\rho^2(\rho^2 - 1)} \right] + \\ &\left. + \theta_3 x_1 x_2 \left[\frac{D'_2}{\rho^2} - \frac{D_1}{\rho^2 - e^2} + \frac{N_3}{(\rho^2 - e^2)\rho^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

и аналогично записываются выражения u_2 , u_3 . Теперь краевые условия (5.1.6)

$\rho = \rho_0$: $u_1 = \theta_2 x_3 - \theta_3 x_2$, $u_2 = \theta_3 x_1 - \theta_1 x_3$, $u_3 = \theta_1 x_2 - \theta_2 x_1$ приводят к системе девяти уравнений для такого же числа неизвестных постоянных D_s , D'_s , N_s . Она распадается на три независимые системы, соответствующие поворотам вокруг каждой из

осей эллипсоида. Например, система, порождаемая поворотом θ_1 вокруг оси x_1 , будет

$$\left. \begin{aligned} (3-4\nu) D_3 \omega_2(\rho_0) + D_2' \omega_3(\rho_0) - N_1 \omega_4(\rho_0) &= 1, \\ (3-4\nu) D_2' \omega_3(\rho_0) + D_3 \omega_2(\rho_0) + N_1 \omega_4(\rho_0) &= 1, \\ \frac{N_1}{(\rho_0^2-1)(\rho_0^2-e^2)} + \frac{D_3}{\rho_0^2-e^2} - \frac{D_2'}{\rho_0^2-1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.5)$$

Опуская вычисление, в котором используются также соотношения (VI.7.7)—(VI.7.9), приводим окончательные выражения для перемещений точек упругой среды:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \theta_2 x_3 \frac{\delta_2(\rho)}{\delta_2(\rho_0)} - \theta_3 x_2 \frac{\delta_3^*(\rho)}{\delta_3(\rho_0)} + \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho^2} x_1 \Omega, \\ u_2 &= \theta_3 x_1 \frac{\delta_3(\rho)}{\delta_3(\rho_0)} - \theta_1 x_3 \frac{\delta_1^*(\rho)}{\delta_1(\rho_0)} + \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho^2 - e^2} x_2 \Omega, \\ u_3 &= \theta_1 x_2 \frac{\delta_1(\rho)}{\delta_1(\rho_0)} - \theta_2 x_1 \frac{\delta_2^*(\rho)}{\delta_2(\rho_0)} + \frac{\rho_0^2 - e^2}{\rho^2 - 1} x_3 \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.6)$$

Здесь обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1(\rho) &= 2(1-2\nu) \omega_2(\rho) \omega_3(\rho_0) + \\ &\quad + \omega_4(\rho_0) [(\rho_0^2 - e^2) \omega_2(\rho) + (\rho_0^2 - 1) \omega_3(\rho)], \\ \delta_2(\rho) &= 2(1-2\nu) \omega_3(\rho) \omega_1(\rho_0) + \omega_5(\rho_0) [(\rho_0^2 - 1) \omega_3(\rho) + \rho_0^2 \omega_1(\rho)], \\ \delta_3(\rho) &= 2(1-2\nu) \omega_1(\rho) \omega_2(\rho_0) + \omega_6(\rho_0) [\rho_0^2 \omega_1(\rho) + (\rho_0^2 - e^2) \omega_2(\rho)], \end{aligned} \right\} \quad (5.4.7)$$

а функции $\delta_s^*(\rho)$ отличаются от $\delta_s(\rho)$ заменой индексов в первом слагаемом, например:

$$\delta_1^*(\rho) = 2(1-2\nu) \omega_2(\rho_0) \omega_3(\rho) + \omega_4(\rho_0) [(\rho_0^2 - e^2) \omega_2(\rho) + (\rho_0^2 - 1) \omega_3(\rho)], \quad (5.4.8)$$

и очевидно, что $\delta_s^*(\rho_0) = \delta_s(\rho_0)$. Функция Ω в решениях (5.4.6) определяется равенством

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{\rho \Delta(\rho) D^2} \left[\frac{\theta_1}{\delta_1(\rho_0)} \frac{\omega_2(\rho_0) - \omega_3(\rho_0)}{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)} x_2 x_3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta_2}{\delta_2(\rho_0)} \frac{\omega_3(\rho_0) - \omega_1(\rho_0)}{(\rho^2 - 1)\rho^2} x_3 x_1 + \frac{\theta_3}{\delta_3(\rho_0)} \frac{\omega_1(\rho_0) - \omega_2(\rho_0)}{\rho^2(\rho^2 - e^2)} x_1 x_2 \right]. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

5.5. Распределение напряжений по поверхности эллипсоида.

Вычисление проводится в предположении, что только $\theta_1 \neq 0$; соображения симметрии подскажут вслед за этим запись формул для общего случая.

По (5.4.1) и (5.4.5) имеем

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -\theta_1 D'_2 x_3 \omega_3(\rho), \quad B_3 = \theta_1 D_3 x_2 \omega_2(\rho), \quad (5.5.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D'_2 &= \frac{1}{2(1-\nu) \delta_1(\rho_0)} [(\rho_0^2 - 1) \omega_4(\rho_0) + (1 - 2\nu) \omega_2(\rho_0)], \\ D_3 &= \frac{1}{2(1-\nu) \delta_1(\rho_0)} [(\rho_0^2 - e^2) \omega_4(\rho_0) + (1 - 2\nu) \omega_3(\rho_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.2)$$

Подобно (5.3.8) имеем теперь

$$-\frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \int \int \frac{t_{n2}}{R} d\sigma = \begin{cases} -\theta_1 D'_2 x_3 \omega_3(\rho) = B_2^{(e)}, & \rho > \rho_0, \\ -\theta_1 D'_2 x_3 \omega_3(\rho_0) = B_2^{(l)}, & \rho < \rho_0, \end{cases}$$

а также

$$-\frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \int \int \frac{t_{n3}}{R} d\sigma = \begin{cases} \theta_1 D_3 x_2 \omega_2(\rho) = B_3^{(e)}, & \rho > \rho_0, \\ \theta_1 D_3 x_2 \omega_2(\rho_0) = B_3^{(l)}, & \rho < \rho_0, \end{cases}$$

и применение теоремы о нормальной производной потенциала простого слоя приводит к следующим выражениям компонент вектора напряжений на поверхности эллипсоида:

$$\left. \begin{aligned} t_{n2} &= \frac{2G\theta_1 x_3}{\delta_1(\rho_0) H_\rho^0 \Delta(\rho_0)} \left[\omega_4(\rho_0) + \frac{1-2\nu}{\rho_0^2 - 1} \omega_2(\rho_0) \right], \\ t_{n3} &= \frac{2G\theta_1 x_2}{\delta_1(\rho_0) H_\rho^0 \Delta(\rho_0)} \left[\omega_4(\rho_0) + \frac{1-2\nu}{\rho_0^2 - e^2} \omega_3(\rho_0) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.3)$$

Моменты m_s^O относительно осей x_s , которые должны быть приложены к эллипсоиду, чтобы сообщить ему поворот θ , определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} m_1^O &= - \int \int_O (x_2 t_{n3} - x_3 t_{n2}) d\sigma = \frac{2G\theta_1}{\delta_1(\rho_0)} \{ (1-2\nu) [\omega_2(\rho_0) J_3 + \\ &\quad + \omega_3(\rho_0) J_2] + \omega_4(\rho_0) [(\rho_0^2 - e^2) J_2 + (\rho_0^2 - 1) J_3] \}, \\ m_2^O &= - \int \int_O (x_3 t_{n1} - x_1 t_{n3}) d\sigma = \frac{2G\theta_2}{\delta_2(\rho_0)} \{ (1-2\nu) [\omega_3(\rho_0) J_1 + \\ &\quad + \omega_1(\rho_0) J_3] + \omega_5(\rho_0) [(\rho_0^2 - 1) J_3 + \rho_0^2 J_1] \}, \\ m_3^O &= - \int \int_O (x_1 t_{n2} - x_2 t_{n1}) d\sigma = \frac{2G\theta_3}{\delta_3(\rho_0)} \{ (1-2\nu) [\omega_1(\rho_0) J_2 + \\ &\quad + \omega_2(\rho_0) J_1] + \omega_6(\rho_0) [\rho_0^2 J_1 + (\rho_0^2 - e^2) J_2] \}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.4)$$

Здесь

$$J_1 = \frac{1}{\rho_0^2 \Delta(\rho_0)} \int_0 \int x_1^2 \frac{d\sigma}{H_\rho^0}, \quad J_2 = \frac{1}{(\rho_0^2 - e^2) \Delta(\rho_0)} \int_0 \int x_2^2 \frac{d\sigma}{H_\rho^0},$$

$$J_3 = \frac{1}{(\rho_0^2 - 1) \Delta(\rho_0)} \int_0 \int x_3^2 \frac{d\sigma}{H_\rho^0}.$$

Учитывая равенства

$$n_1 = \frac{x_1}{\rho_0 H_\rho^0}, \quad n_2 = \frac{x_2 \rho_0}{(\rho_0^2 - e^2) H_\rho^0}, \quad n_3 = \frac{x_3 \rho_0}{(\rho_0^2 - 1) H_\rho^0}, \quad (5.5.5)$$

имеем

$$\frac{x_1^2}{H_\rho^0} = \rho_0 n_1 x_1, \quad \frac{x_2^2}{H_\rho^0} = \frac{\rho_0^2 - e^2}{\rho_0} n_2 x_2, \quad \frac{x_3^2}{H_\rho^0} = \frac{\rho_0^2 - 1}{\rho_0} n_3 x_3. \quad (5.5.6)$$

Вместе с тем

$$\int_0 \int n_1 x_1 d\sigma = \int_0 \int n_2 x_2 d\sigma = \int_0 \int n_3 x_3 d\sigma = \int_0 \int \int_V d\tau =$$

$$= \frac{4}{3} \pi abc = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0 \sqrt{(\rho_0^2 - 1)(\rho_0^2 - e^2)},$$

так что

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

и выражения (5.5.4) приводятся к виду

$$m_s^0 = \frac{8\pi a^3}{3} G \theta_s \gamma_s(\rho_0) \quad (s = 1, 2, 3), \quad (5.5.7)$$

где введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1(\rho_0) &= \frac{1}{\delta_1(\rho_0)} \{ (1 - 2\nu) [\omega_2(\rho_0) + \omega_3(\rho_0)] + \\ &\quad + (2\rho_0^2 - 1 - e^2) \omega_4(\rho_0) \}, \\ \gamma_2(\rho_0) &= \frac{1}{\delta_2(\rho_0)} \{ (1 - 2\nu) [\omega_3(\rho_0) + \omega_1(\rho_0)] + (2\rho_0^2 - 1) \omega_5(\rho_0) \}, \\ \gamma_3(\rho_0) &= \frac{1}{\delta_3(\rho_0)} \{ (1 - 2\nu) [\omega_1(\rho_0) + \omega_2(\rho_0)] + (2\rho_0^2 - e^2) \omega_6(\rho_0) \}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.8)$$

5.6. Эллипсоидальная полость в неограниченной упругой среде. Напряженное состояние на бесконечном удалении от полости задается тензором

$$\hat{T}^\infty = i_1 i_1 q_1 + i_2 i_2 q_2 + i_3 i_3 q_3, \quad (5.6.1)$$

главные оси которого параллельны осям эллипсоидальной поверхности полости

$$D_1 = \frac{x^2}{\rho_0^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - 1} - a^2 = 0. \quad (5.6.2)$$

Тензор напряжений \hat{T} представляется суммой тензора \hat{T}^∞ и корректирующего тензора \hat{T}^* :

$$\hat{T} = \hat{T}^\infty + \hat{T}^*, \quad (5.6.3)$$

определяемого по краевому условию

$$\rho = \rho_0: \quad \mathbf{n} \cdot \hat{T}^* = -\mathbf{n} \cdot \hat{T}^\infty = -(n_1 i_1 q_1 + n_2 i_2 q_2 + n_3 i_3 q_3) \quad (5.6.4)$$

выражающему, что поверхность полости не нагружена; через n_s обозначены проекции внешней нормали к этой поверхности на координатные оси.

Вектор перемещения, соответствующий корректирующему тензору \hat{T}^* , представляется через гармонические функции B_s, B_0 Папковича — Нейбера по формуле (1.4.10) гл. IV:

$$u_s = 4(1 - \nu) B_s - \frac{\partial}{\partial x_s} (B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_0).$$

Сославшись также на формулу (1.4.17) гл. IV, можно после несложного преобразования привести краевые условия (5.6.4) к виду *)

$$-\frac{1}{2G} n_s q_s = n_s \operatorname{div} \mathbf{B} + (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial B_s}{\partial n} - n_s \operatorname{div} \mathbf{B} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial B_k}{\partial x_s} n_k \right) - \\ - \sum_{k=1}^3 x_k \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_k}{\partial x_s} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial B_0}{\partial x_s} \quad (s = 1, 2, 3). \quad (5.6.5)$$

Гармонические функции B_s естественно задать потенциалами (VI. 8.9), принимающими на поверхности $\rho = \rho_0$ значения, пропорциональные координатам:

$$B_1 = A_1 x \omega_1(\rho), \quad B_2 = A_2 y \omega_2(\rho), \quad B_3 = A_3 z \omega_3(\rho), \quad (5.6.6)$$

причем функции $\omega_s(\rho)$ определены эллиптическими интегралами. Гармонический скаляр B_0 зададим в виде

$$B_0 = C_1 (\rho_0^2 - \sigma_1)^2 F_4 \omega_4(\rho) + C_2 (\rho_0^2 - \sigma_2)^2 F_5 \omega_5(\rho) + A \omega + A_0 a^2 \omega_0(\rho). \quad (5.6.7)$$

Здесь $F_4 \omega_4(\rho)$, $F_5 \omega_5(\rho)$ — потенциалы, обозначенные в п. VI. 8 через $F_2^{(4)} \omega_2^{(4)}$, $F_2^{(5)} \omega_2^{(5)}$,

$$\left. \begin{aligned} F_4 &= \frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_1 - e^2} + \frac{z^2}{\sigma_1 - 1} - a^2, & F_5 &= \frac{x^2}{\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2 - e^2} + \frac{z^2}{\sigma_2 - 1} - a^2, \\ \omega_4(\rho) &= \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - \sigma_1)^2 \Delta(\lambda)}, & \omega_5(\rho) &= \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - \sigma_2)^2 \Delta(\lambda)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.6.8)$$

*) В укороченных записях, конечно, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

тогда как ω — ньютонов потенциал (VI. 8.20):

$$\omega = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left(a^2 - \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2 - e^2} - \frac{z^2}{\lambda^2 - 1} \right) = a^2 \omega_0 - x^2 \omega_1 - y^2 \omega_2 - z^2 \omega_3. \quad (5.6.9)$$

В преобразованиях краевых условий (5.6.5) существенно используются равенства (III. 11.19), (III. 11.21), (III. 11.26) и выражения проекций вектора нормали

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{x}{\rho H_\rho} = \frac{x}{\rho^2 \sqrt{D_2}}, & n_2 &= \frac{y\rho}{(\rho^2 - e^2) H_\rho} = \frac{y}{(\rho^2 - e^2) \sqrt{D_2}}, \\ n_3 &= \frac{z\rho}{(\rho^2 - 1) H_\rho} = \frac{z}{(\rho^2 - 1) \sqrt{D_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.10)$$

Здесь D_2 — форма, обозначенная в п. III. 11 через D_ρ^2 :

$$D_2 = \frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^2}. \quad (5.6.11)$$

В рассмотрение вводится также форма

$$D_3 = \frac{x^2}{\rho^6} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^3} + \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^3} = -\frac{1}{2\rho} \frac{\partial D_2}{\partial \rho}, \quad (5.6.12)$$

причем последнее соотношение легко проверить, обратившись к указанным только что равенствам. Для укорочения записей вводятся также обозначения форм

$$\Phi_1(x, y, z) = A_1 \frac{x^2}{\rho^2} + A_2 \frac{y^2}{\rho^2 - e^2} + A_3 \frac{z^2}{\rho^2 - 1} + A_0 a^2, \quad (5.6.13)$$

$$\Phi_2(x, y, z) = A_1 \frac{x^2}{\rho^4} + A_2 \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^2} + A_3 \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^2}, \quad (5.6.14)$$

$$G_i = \frac{x^2}{\rho^2 \sigma_i} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)(\sigma_i - e^2)} + \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)(\sigma_i - 1)} \quad (i = 1, 2). \quad (5.6.15)$$

Выражения производных первого порядка от функций, содержащих ρ и декартовы координаты, несложны; например, сославшись на (VI. 7.5), (III. 11.26), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} x \omega_1(\rho) &= \omega_1(\rho) + x \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \\ &= \omega_1(\rho) - \frac{x}{\rho^2 \Delta(\rho)} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \omega_1(\rho) - \frac{x^2}{\rho^5 D_2 \Delta(\rho)}. \end{aligned} \quad (5.6.16)$$

Еще проще вычисление производной по нормали

$$\frac{\partial}{\partial n} x \omega_1(\rho) = n_1 \omega_1(\rho) + \frac{x}{H_\rho} \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} = n_1 \left(\omega_1 - \frac{1}{\rho \Delta(\rho)} \right). \quad (5.6.17)$$

С помощью формул (5.6.10) производятся преобразования вида

$$x n_2 = \frac{xy}{(\rho^2 - e^2) \sqrt{D_2}} = n_1 y \frac{\rho^2}{\rho^2 - e^2}$$

и т. д., позволяющие в записи первого краевого условия (5.6.5) вынести в правой части за скобку n_1 , второго — n_2 , третьего — n_3 . Более громоздки выражения вторых производных; это вычисление облегчается тем, что вторые производные в краевых условиях (5.6.5) представляют находимые по правилу (5.6.17) производные по нормали от первых производных функций Папковича — Нейбера. Особенно просты вычисления, относящиеся к потенциалу (5.6.9); сославшись на соотношение (5.6.2), выполняющееся согласно (III.11.9), при любом ρ имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_s} = -2x_s \omega_s, \quad \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \omega}{\partial x_s} = -2n_s \left(\omega_s - \frac{1}{\rho \Delta(\rho)} \right). \quad (5.6.18)$$

Следует еще заметить, что одно из слагаемых, включенных в состав B_0 , излишне, так как эти четыре функции связаны линейным соотношением (VI.8.16).

5.7. Краевые условия. В каждое из трех уравнений, выражающих краевые условия (5.6.5), входят две группы слагаемых. В первую группу (I_s) входят величины, постоянные на поверхности полости $\rho = \rho_0$; вторая группа (II_s) содержит слагаемые, зависящие не только от ρ_0 , но и от декартовых координат x, y, z точки на этой поверхности. Приходим к равенству: $\rho = \rho_0$

$$\begin{aligned} \frac{q_s}{4G} = & - \left\{ (1-2\nu) A_s \omega_s + \nu \left(A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 + A_3 \omega_3 + \frac{A_s}{\rho \Delta} \right) + A \left(\omega_s - \frac{1}{\rho \Delta} \right) - \right. \\ & - \left[C_1 \frac{(\rho^2 - \sigma_1)^2}{\sigma_1 - \alpha_s} \omega_4 + C_2 \frac{(\rho^2 - \sigma_2)^2}{\sigma_2 - \alpha_s} \omega_5 \right] + \left(\frac{C_1}{\sigma_1 - \alpha_s} + \frac{C_2}{\sigma_2 - \alpha_s} \right) \frac{\rho^2 - \alpha_s}{\rho \Delta} \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{\rho^3 \Delta^3 D_2} \left\{ \left[\chi_s(\rho) - \frac{D_3}{D_2} \rho^2 \Delta^2 \right] (\Phi_1 + C_1 F_4 + C_2 F_5) + \right. \\ & + 2\rho^2 \Delta^2 \left(\frac{C_1}{\rho^2 - \sigma_1} F_4 + \frac{C_2}{\rho^2 - \sigma_2} F_5 \right) + \rho^2 \Delta^2 (\Phi_2 - C_1 G_1 - C_2 G_2) \left. \right\} \quad (5.7.1) \\ & (s = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

причем $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = e^2$, $\alpha_3 = 1$ и введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} 2\chi_s &= 3\rho^4 - 2(1 + e^2)\rho^2 + e^2 + \frac{\rho^2 \Delta^2}{\rho^2 - \alpha_s}, \\ \Delta^2(\rho) &= (\rho^2 - 1)(\rho^2 - e^2), \\ \chi_1 &= 2\rho^4 - \frac{3}{2}(1 + e^2)\rho^2 + e^2, \\ \chi_2 &= 2\rho^4 - \left(\frac{3}{2} + e^2 \right) \rho^2 + \frac{1}{2}e^2, \\ \chi_3 &= 2\rho^4 - \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \right) \rho^2 + \frac{1}{2}e^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.2)$$

Следует потребовать, чтобы квадратичный полином

$$\Phi_1 + C_1 F_4 + C_2 F_5$$

делился нацело на D_2 ; при учете (5.6.2) это условие записывается в виде

$$\Phi_1 + C_1 F_4 + C_2 F_5 = \kappa D_2 + \lambda D_1 \quad (5.7.3)$$

и приводит к четырем уравнениям

$$\frac{A_s}{\rho^2 - \alpha_s} + \frac{C_1}{\sigma_1 - \alpha_s} + \frac{C_2}{\sigma_2 - \alpha_s} = \frac{\kappa}{(\rho^2 - \alpha_s)^2} + \frac{\lambda}{\rho^2 - \alpha_s} \quad (5.7.4)$$

$$(s = 1, 2, 3),$$

$$C_1 + C_2 = \lambda + A_0. \quad (5.7.5)$$

Вторая группа слагаемых в уравнениях (5.7.1) теперь приводится к виду

$$\Pi_s = \frac{1}{\rho^3 \Delta^3} \kappa \chi_s(\rho) + \left[-\kappa D_3 + 2 \left(\frac{C_1}{\rho^2 - \sigma_1} F_4 + \frac{C_2}{\rho^2 - \sigma_2} F_5 \right) + \right. \\ \left. + \Phi_2 - C_1 G_1 - C_2 G_2 \right] \frac{1}{D_2 \rho \Delta}, \quad (5.7.6)$$

и оказывается возможным член в квадратных скобках приравнять λD_2 . Действительно, приняв

$$-\kappa D_3 + 2 \left(\frac{C_1}{\rho^2 - \sigma_1} F_4 + \frac{C_2}{\rho^2 - \sigma_2} F_5 \right) + \\ + \Phi_2 - C_1 G_1 - C_2 G_2 - \lambda D_2 = 2\mu D_1 = 0$$

приходим к системе четырех уравнений

$$\frac{C_1}{\rho^2 - \sigma_1} + \frac{C_2}{\rho^2 - \sigma_2} = \mu, \quad (5.7.7) \\ - \frac{\kappa}{(\rho^2 - \alpha_s)^3} + \frac{A_s - \lambda}{(\rho^2 - \alpha_s)^2} + 2 \left[\frac{C_1}{(\rho^2 - \sigma_1)(\sigma_1 - \alpha_s)} + \frac{C_2}{(\rho^2 - \sigma_2)(\sigma_2 - \alpha_s)} \right] - \\ - \frac{1}{\rho^2 - \alpha_s} \left(\frac{C_1}{\sigma_1 - \alpha_s} + \frac{C_2}{\sigma_2 - \alpha_s} \right) = \frac{2\mu}{\rho^2 - \alpha_s} \quad (s = 1, 2, 3), \quad (5.7.8)$$

причем система уравнений (5.7.8) тождественно удовлетворяется в силу (5.7.4), (5.7.7). Действительно, по (5.7.4) она может быть записана в виде

$$\frac{C_1}{\sigma_1 - \alpha_s} \left(\frac{1}{\rho^2 - \sigma_1} - \frac{1}{\rho^2 - \alpha_s} \right) + \frac{C_2}{\sigma_2 - \alpha_s} \left(\frac{1}{\rho^2 - \sigma_2} - \frac{1}{\rho^2 - \alpha_s} \right) = \frac{\mu}{\rho^2 - \alpha_s},$$

то есть приводится к (5.7.7).

Краевые условия (5.7.1) теперь дают систему уравнений, правые части которой, как и надо, постоянны при $\rho = \rho_0$:

$$-\frac{q_s}{4G} = (1 - 2\nu) A_s \omega_s + \nu \left(A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 + A_3 \omega_3 + \frac{A_s}{\rho \Delta} \right) + A \left(\omega_s - \frac{1}{\rho \Delta} \right) - \\ - \frac{\kappa \chi_s}{\rho^3 \Delta^3} - \frac{\lambda}{\rho \Delta} - \left[C_1 \frac{(\rho^2 - \sigma_1)^2}{\sigma_1 - \alpha_s} \omega_4 + C_2 \frac{(\rho^2 - \sigma_2)^2}{\sigma_2 - \alpha_s} \omega_5 \right] + \\ + \left(\frac{C_1}{\sigma_1 - \alpha_s} + \frac{C_2}{\sigma_2 - \alpha_s} \right) \frac{\rho^2 - \alpha_s}{\rho \Delta}. \quad (5.7.9)$$

5.8. Выражения постоянных через три параметра. Определив постоянные C_1 , C_2 по (5.7.5), (5.7.7), имеем (здесь и далее $\rho = \rho_0$)

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} [(\lambda + A_0)(\rho^2 - \sigma_1) - \mu(\rho^2 - \sigma_1)(\rho^2 - \sigma_2)], \\ C_2 &= \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} [- (\lambda + A_0)(\rho^2 - \sigma_2) + \mu(\rho^2 - \sigma_1)(\rho^2 - \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (5.8.1)$$

и по (5.7.4)

$$\begin{aligned} \frac{A_s - \lambda}{\rho^2 - \alpha_s} - \frac{\kappa}{(\rho^2 + \alpha_s)^2} &= \\ &= \frac{1}{(\sigma_1 - \alpha_s)(\sigma_2 - \alpha_s)} [- (\lambda + A_0)(\rho^2 - \alpha_s) + \mu(\rho^2 - \sigma_1)(\rho^2 - \sigma_2)]. \end{aligned}$$

Но по определению (VI.6.8) чисел σ_1 , σ_2

$$\sum_{s=1}^3 \frac{1}{\sigma_k - \alpha_s} = 0, \quad \sigma_1 \sigma_2 = \frac{1}{3} e^2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{2}{3} (1 + e^2) \quad (k = 1, 2). \quad (5.8.2)$$

Отсюда следует, что постоянные A_s должны быть связаны равенством

$$\sum_{s=1}^3 \left[\frac{A_s - \lambda}{\rho^2 - \alpha_s} - \frac{\kappa}{(\rho^2 - \alpha_s)^2} \right] = 0,$$

которому можно удовлетворить, лишь приняв

$$\lambda + A_0 = 0. \quad (5.8.3)$$

Но тогда по (5.8.1)

$$C_1 = -C_2 = C = \frac{\mu}{\sigma_1 - \sigma_2} (\rho^2 - \sigma_1)(\rho^2 - \sigma_2), \quad (5.8.4)$$

и параметр μ далее можно заменить на C . По (5.7.4) получаем

$$A_s = \lambda + \frac{\kappa}{\rho^2 - \alpha_s} + C(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\rho^2 - \alpha_s}{(\sigma_1 - \alpha_s)(\sigma_2 - \alpha_s)} \quad (s = 1, 2, 3) \quad (5.8.5)$$

или, подробнее,

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \lambda + \frac{\kappa}{\rho_0^2} + \frac{3C}{e^2} (\sigma_1 - \sigma_2) \rho_0^2, \\ A_2 &= \lambda + \frac{\kappa}{\rho_0^2 - e^2} - \frac{3C}{e^2 (1 - e^2)} (\sigma_1 - \sigma_2) (\rho_0^2 - e^2), \\ A_3 &= \lambda + \frac{\kappa}{\rho_0^2 - 1} + \frac{3C}{1 - e^2} (\sigma_1 - \sigma_2) (\rho_0^2 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (5.8.6)$$

Постоянные A_s выражены через три параметра, но в краевые условия входит еще четвертый параметр A ; его присутствие

излишне. Действительно, обратившись к исходному представлению перемещений через гармонические функции B_s, B_0 :

$$u_s = 4(1 - \nu) A_s x_s \omega_s(\rho) - \frac{\partial \Psi}{\partial x_s}, \quad \Psi = \sum_{k=1}^3 A_k x_k^2 \omega_k + B_0,$$

и сославшись на (5.6.7), (5.8.3), (5.8.6), (5.6.9), имеем

$$\begin{aligned} \Psi = (A - \lambda) \omega + \sum_{k=1}^3 \frac{\kappa}{\rho_0^2 - \alpha_k} x_k^2 \omega_k + C [(\rho_0^2 - \sigma_1)^2 F_4 \omega_4 - (\rho_0^2 - \sigma_2)^2 F_5 \omega_5] + \\ + C (\sigma_1 - \sigma_2) \sum_{k=1}^3 \frac{\rho_0^2 - \alpha_k}{(\sigma_1 - \alpha_k)(\sigma_2 - \alpha_k)} \omega_k x_k^2. \end{aligned} \quad (5.8.7)$$

В выражениях трех перемещений по (5.6.18) постоянные λ, A войдут в единой комбинации

$$2[(1 - 2\nu)\lambda + A]x_s \omega_s,$$

так что сохранение постоянной A одновременно с λ приводит только к замене обозначений.

Сумма трех эллиптических интегралов $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ выражается элементарно:

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 - e^2} + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \right) = \\ = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2\lambda^2 - (1 + e^2)}{\Delta^2(\lambda)} \right] d\lambda = [\rho \Delta(\rho)]^{-1}, \end{aligned} \quad (5.8.8)$$

что легко проверить дифференцированием.

Крайевые условия (5.7.9) теперь представляются тремя уравнениями, содержащими такое же число неизвестных λ, κ, C ; при $\rho = \rho_0$ имеем

$$\begin{aligned} -\frac{q_s}{4G} = \lambda(1 - 2\nu) \left(\omega_s - \frac{1}{\rho \Delta} \right) + \kappa \left[(1 - 2\nu) \frac{\omega_s}{\rho^2 - \alpha_s} + \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{\omega_1}{\rho^2} + \frac{\omega_2}{\rho^2 - e^2} + \frac{\omega_3}{\rho^2 - 1} \right) \right] + \frac{1}{\rho \Delta} \left(\frac{\nu}{\rho^2 - \alpha_s} - \frac{\chi_s(\rho)}{\rho^2 \Delta^2} \right) + \\ + C (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\rho^2 - \alpha_s}{(\sigma_1 - \alpha_s)(\sigma_2 - \alpha_s)} \omega_s + \right. \\ \left. + 3\nu \left(\frac{\rho^2}{e^2} \omega_1 - \frac{\rho^2 - e^2}{e^2(1 - e^2)} \omega_2 + \frac{\rho^2 - 1}{1 - e^2} \omega_3 \right) - \frac{1 - \nu}{(\sigma_1 - \alpha_s)(\sigma_2 - \alpha_s)} \frac{\rho^2 - \alpha_s}{\rho \Delta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \int_{\rho}^{\infty} \left[\frac{(\rho^2 - \sigma_1)^2}{\sigma_1 - \alpha_s} \frac{1}{(\lambda^2 - \sigma_1)^2} - \frac{(\rho^2 - \sigma_2)^2}{\sigma_2 - \alpha_s} \frac{1}{(\lambda^2 - \sigma_2)^2} \right] \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.8.9)$$

Перемещения определяются соотношениями (здесь, конечно, надо различать ρ и ρ_0)

$$\begin{aligned}
 u_s = 2(1-2\nu) \left[\lambda + \frac{\kappa}{\rho_0^2 - \alpha_s} + C \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\rho_0^2 - \alpha_s)}{(\sigma_1 - \alpha_s)(\sigma_2 - \alpha_s)} \right] x_s \omega_s(\rho) - \\
 - 2C \left[\frac{(\rho_0^2 - \sigma_1)^2}{\sigma_1 - \alpha_s} \omega_4(\rho) - \frac{(\rho_0^2 - \sigma_2)^2}{\sigma_2 - \alpha_s} \omega_5(\rho) \right] x_s + \\
 + \frac{1}{\Delta(\rho)} \frac{\partial \rho}{\partial x_s} \left\{ \kappa \left[\frac{x_1^2}{\rho_0^2 \rho^2} + \frac{x_2^2}{(\rho_0^2 - e^2)(\rho^2 - e^2)} + \frac{x_3^2}{(\rho_0^2 - 1)(\rho^2 - 1)} \right] + \right. \\
 + 3C(\sigma_1 - \sigma_2) \left[\frac{\rho_0^2}{e^2} \frac{x_1^2}{\rho^2} - \frac{\rho_0^2 - e^2}{e^2(1 - e^2)} \frac{x_2^2}{\rho^2 - e^2} + \frac{\rho_0^2 - 1}{1 - e^2} \frac{x_3^2}{\rho^2 - 1} \right] + \\
 \left. + C \left[\frac{(\rho_0^2 - \sigma_1)^2}{(\rho^2 - \sigma_1)^2} F_4 - \frac{(\rho_0^2 - \sigma_2)^2}{(\rho^2 - \sigma_2)^2} F_5 \right] \right\}. \quad (5.8.10)
 \end{aligned}$$

Здесь, напомним,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = e^2, \quad \alpha_3 = 1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_s} = \frac{x_s}{\rho(\rho^2 - \alpha_s)} \frac{1}{D_2}, \\
 (\sigma_1 - \alpha_1)(\sigma_2 - \alpha_1) = \frac{e^2}{3}, \quad (\sigma_1 - \alpha_2)(\sigma_2 - \alpha_2) = -\frac{1}{3} e^2(1 - e^2), \\
 (\sigma_1 - \alpha_3)(\sigma_2 - \alpha_3) = \frac{1}{3}(1 - e^2).
 \end{aligned}$$

5.9. Сфероидальная полость в упругой среде. Пусть поверхность полости представляет эллипсоид вращения, а поле тензора напряжения \hat{T}^∞ симметрично относительно оси вращения этого эллипсоида.

При $e = 0$ поверхность полости представляет сплюснутый эллипсоид вращения вокруг оси z ; тогда, полагая

$$\rho^2 = 1 + s^2, \quad d\rho = \frac{s ds}{\sqrt{1 + s^2}},$$

имеем

$$\Delta(\rho) = s \sqrt{1 + s^2} \quad \rho \Delta(\rho) = s(1 + s^2)$$

и далее, сославшись на (VI.3.7), (VI.3.13), (VI.7.5), находим

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_0 &= \int_s^\infty \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} = \operatorname{arctg} s = q_0(s), \\
 \omega_1 &= \omega_2 = \int_s^\infty \frac{d\lambda}{(1 + \lambda^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} s - \frac{s}{1 + s^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{q_1'(s)}{\sqrt{1 + s^2}}, \\
 \omega_3 &= \int_s^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2(1 + \lambda^2)} = \left(\frac{1}{s} - \operatorname{arctg} s \right) = -\frac{1}{s} q_1(s).
 \end{aligned} \right\} \quad (5.9.1)$$

В предположении $q_1 = q_2$ задача будет осесимметричной и второе краевое условие (5.8.9) повторяет первое; достаточно сохранить лишь две постоянные λ , κ . Приходим к краевым условиям: при $s = s_0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_1}{4G} &= \lambda (1 - 2\nu) (\omega_1 + \omega_3) - \kappa \left[\frac{\omega_1(s_0)}{1 + s_0^2} + \nu \frac{\omega_3(s_0)}{s_0^2} + \frac{2\nu s_0^2 - 4s_0^2 - 1}{2s_0^3(1 + s_0^2)^2} \right], \\ \frac{q_3}{4G} &= 2\lambda (1 - 2\nu) \omega_1(s_0) + 2\kappa \left[\omega_1(s_0) \left(\frac{1 - \nu}{s_0^2} - \frac{\nu}{s_0^2 + 1} \right) + \frac{1}{2s_0(1 + s_0^2)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.9.2)$$

Перемещения определяются формулами (5.8.10):

$$\left. \begin{aligned} u_r &= 2(1 - 2\nu) \left(\lambda + \frac{\kappa}{1 + s_0^2} \right) r \omega_1(s) + \\ &\quad + \frac{\kappa}{s(1 + s^2)^2 D_2} r \left[\frac{r^2}{(s_0^2 + 1)(s^2 + 1)} + \frac{z^2}{s_0^2 s^2} \right], \\ w &= 2(1 - 2\nu) \left(\lambda + \frac{\kappa}{s_0^2} \right) z \omega_3(s) + \\ &\quad + \frac{\kappa}{s^3(1 + s^2) D_2} z \left[\frac{r^2}{(s_0^2 + 1)(s^2 + 1)} + \frac{z^2}{s_0^2 s^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.9.3)$$

$$D_2 = \frac{r^2}{(s^2 + 1)^2} + \frac{z^2}{s^4}.$$

В случае вытянутого эллипсоида вращения $\rho = s$, $e = 1$, $\Delta(\rho) = s^2 - 1$ и по (VI.3.3), (VI.3.11) имеем

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(s) &= \int_s^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} = Q_0(s), \\ \omega_1(s) &= \int_s^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 (\lambda^2 - 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} = \frac{1}{s} Q_1(s), \\ \omega_2(s) = \omega_3(s) &= \int_s^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{Q_1'(s)}{\sqrt{s^2 - 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.9.4)$$

При $q_2 = q_3$ приходим также к двум уравнениям для определения постоянных κ , λ .

5.10. Круговая щель в упругой среде. Представляя коэффициенты уравнений (5.9.2) при малых s_0 степенными рядами

$$\omega_1(s_0) = \frac{\pi}{4} - s_0 + \dots \quad \omega_3(s_0) = \frac{1}{s_0} - \frac{\pi}{2} + s_0 + \dots,$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{q_1}{4G} &= (1-2\nu)\lambda\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{s_0} + \dots\right) - \kappa\left[\frac{\nu}{s_0^2}\left(\frac{1}{s_0} - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2s_0^3} + \dots\right], \\ \frac{q_3}{8G} &= (1-2\nu)\lambda\left(\frac{\pi}{4} - s_0 + \dots\right) + \kappa\left[\frac{1}{s_0^2}(1-\nu)\left(\frac{\pi}{4} - s_0\right) + \frac{1}{2s_0} + \dots\right],\end{aligned}$$

которой можно удовлетворить, разыскивая неизвестные λ , κ также в форме рядов

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 s_0 + \dots, \quad \kappa = \kappa_2 s_0^2 + \dots \quad (5.10.1)$$

в которых

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2\pi G} q_3, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\pi G} q_3 \text{ и т. д.} \quad (5.10.2)$$

Случаю круговой щели в упругой среде соответствует $s_0 \rightarrow 0$, $\lambda = \lambda_0$, $\kappa = \kappa_2 s_0^2$. Решение оказывается не зависящим от q_1 , так как наличие такой щели не изменяет напряженного состояния, создаваемого нагружением, параллельным плоскости щели (корректирующий тензор будет нулем).

При найденных значениях постоянных λ , κ корректирующий вектор перемещения (5.9.3) определяется его проекциями u_r , w на направления осей e_r , k цилиндрической системы координат:

$$\left. \begin{aligned}Gu_r &= -\frac{q_3}{\pi} \left[(1-2\nu) r \omega_1(s) - \frac{z^2 r}{(1+s^2)^2 s^3 D_2} \right], \\ Gw &= \frac{q_3}{\pi} \left[(1-2\nu) z \omega_3(s) + \frac{z^3}{(1+s^2)^2 s^5 D_2} \right], \\ D_2 &= \frac{r^2}{(1+s^2)^2} + \frac{z^2}{s^4},\end{aligned} \right\} \quad (5.10.3)$$

причем цилиндрические координаты выражаются через сфероидальные μ , s (координаты сжатого эллипсоида) по формулам (III. 10.1):

$$r = a \sqrt{1+s^2} \sqrt{1-\mu^2}, \quad z = a s \mu. \quad (5.10.4)$$

Это позволяет записать соотношения (5.10.3) также в виде

$$\left. \begin{aligned}\frac{G\pi}{q_3} u_r &= -(1-2\nu) r \omega_1(s) + a \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+s^2}} \frac{\mu^2 s}{s^2 + \mu^2}, \\ \frac{G\pi}{q_3} w &= (1-2\nu) z \omega_3(s) + a \frac{\mu^3}{s^2 + \mu^2}.\end{aligned} \right\} \quad (5.10.5)$$

Известно, что значениям $\mu = 0$, $s \neq 0$ соответствует часть плоскости $z = 0$ вне круга $r = a$, а $\mu \neq 0$, $s = 0$ — внутри этого круга. На самой окружности $s = 0$, $\mu = 0$. Поэтому перемещение w

в плоскости щели $z = 0$ оказывается непрерывной функцией r , равной

$$w = \frac{q_3}{\pi G} \begin{cases} a\mu = \sqrt{a^2 - r^2}, & r < a \quad (s = 0), \\ 0, & r > a \quad (\mu = 0). \end{cases} \quad (5.10.6)$$

Для вычисления напряжений используются формулы дифференцирования

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial z} &= \frac{\mu(1+s^2)}{a(s^2+\mu^2)}, & \frac{\partial \mu}{\partial z} &= \frac{s(1-\mu^2)}{a(s^2+\mu^2)}, \\ \frac{\partial s}{\partial r} &= \frac{sr}{a^2(s^2+\mu^2)}, & \frac{\partial \mu}{\partial r} &= -\frac{\mu r}{a^2(s^2+\mu^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.10.7)$$

Касательное напряжение τ_{rz} оказывается равным нулю на всей плоскости щели:

$$\frac{1}{G} \tau_{rz} \Big|_{z=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{z=0} = \begin{cases} 0, & s = 0, \quad \mu \neq 0, \\ 0, & s \neq 0, \quad \mu = 0. \end{cases} \quad (5.10.8)$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \frac{G\pi}{q_3} \operatorname{div} u &= (1-2\nu) \left[\omega_3 - \frac{1}{s} - 2\omega_1 + \frac{s}{s^2+\mu^2} \left(1 + \frac{1-\mu^2}{1+s^2} \right) \right] + \dots, \\ \frac{G\pi}{q_3} \frac{\partial w}{\partial z} &= (1-2\nu) \left(\omega_3 - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+\mu^2} \right) + \dots, \\ \frac{G\pi}{q_3} \frac{\partial u}{\partial r} &= (1-2\nu) \left[\omega_1 - \frac{s(1-\mu^2)}{(1+s^2)(s^2+\mu^2)} \right] + \dots, \\ \frac{G\pi}{q_3} \frac{u}{r} &= - (1-2\nu) \omega_1 + \dots, \end{aligned}$$

причем слагаемые, обращающиеся в нуль на плоскости $z = 0$ (при $s = 0$ или при $\mu = 0$), не выписаны; они остаются непрерывными при приближении в плоскости $z = 0$ к фокальному кругу $s = 0, \mu = 0$.

Получаем на плоскости $z = 0$

$$\sigma_z = \begin{cases} -q_3, & s = 0, \\ \frac{2q_3}{\pi} \left[(1-\nu) \omega_3 - 2\nu\omega_1 + \frac{\nu}{s(1+s^2)} \right], & \mu = 0, \end{cases} \quad (5.10.9)$$

и при приближении к фокальному кругу $s = 0$ со стороны $s > 0$ (то есть $r > a$) нормальное напряжение испытывает разрыв непрерывности

$$\sigma_z \Big|_{\substack{\mu=0 \\ s \rightarrow 0}} - \sigma_z \Big|_{\substack{\mu=0 \\ s=0}} = \frac{2q_3}{\pi} \frac{1}{s} = \frac{2q_3}{\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (5.10.10)$$

Рассмотренное здесь напряженное состояние реализуется в упругом полупространстве, покрытом снабженной круговым вырезом ($r \leq a$) твердой гладкой плитой; по кругу $r \leq a$ распре-

делено давление q_3 , а плита не допускает нормального перемещения w , не препятствуя перемещениям u , в ее плоскости.

Из вышеприведенных формул легко получить также распределения напряжений σ_r , σ_ϕ на плоскости $z = 0$.

5.11. Эллиптическая щель в упругой среде. Аналогично рассматривается задача о напряженном состоянии в упругой среде с эллиптической щелью — щель представляет эллиптическую площадку в плоскости $z = 0$, ограниченную фокальным эллипсом E_0 [см. (III. 1.16)]. Решение системы уравнений (5.8.9) представляется рядами по степеням параметра $\sqrt{\rho_0^2 - 1} = e$:

$$\lambda = \lambda_0 + \dots, \quad \kappa = \kappa_2 e^2 + \dots, \quad C = C_0 + \dots,$$

и для решения задачи о щели достаточно ограничиться первыми членами этих рядов. Учитывая, что по (5.8.8), (5.7.2)

$$\omega_3 = \frac{1}{\rho \Delta} - (\omega_1 + \omega_2), \quad \chi_1(1) = \chi_2(1) = \frac{1}{2}(1 - e^2),$$

$$\chi_3(1) = 1 - e^2, \quad \Delta = \sqrt{1 - e^2} e,$$

можно записать первые два уравнения (5.8.9) в этом приближении в виде

$$0 = \lambda_0(1 - 2\nu) + \frac{1}{2}\kappa_2(1 - 2\nu) + \frac{3C_0}{e^2}(1 - \nu)(\sigma_1 - \sigma_2),$$

$$0 = \lambda_0(1 - 2\nu) + \frac{1}{2}\kappa_2(1 - 2\nu) - \frac{3C_0}{e^2}(1 - \nu)(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Из них следует

$$C_0 = 0, \quad \lambda_0 = -\frac{1}{2}\kappa_2,$$

после чего из третьего уравнения (5.8.9) легко найти

$$\kappa_2 = \frac{q_3}{2G(\omega_1 + \omega_2)}, \quad \lambda_0 = -\frac{q_3}{4G(\omega_1 + \omega_2)}. \quad (5.11.1)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} = \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)], \\ \omega_2 &= \int_1^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} = \frac{E(e) - (1 - e^2) K(e)}{e^2 (1 - e^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.11.2)$$

где K , E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, так что

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{E}{1 - e^2} \quad (5.11.3)$$

и при $e = 0$ возвращаемся к формулам (5.10.2) для случая круглой щели.

Решение задачи — выражение проекций вектора перемещения (5.8.10) — записывается в виде, аналогичном (5.10.3):

$$\left. \begin{aligned} Gu &= \frac{q_3(1-e^2)}{2E(e)} \left[-(1-2\nu) x \omega_1(\rho) + \frac{x z^2}{\rho^3 \Delta(\rho) (\rho^2-1) D_2} \right], \\ Gv &= \frac{q_3(1-e^2)}{2E(e)} \left[-(1-2\nu) y \omega_2(\rho) + \frac{y z^2}{\rho \Delta^3(\rho) D_2} \right], \\ Gw &= \frac{q_3(1-e^2)}{2E(e)} \left[(1-2\nu) z \omega_3(\rho) + \frac{z^3}{\rho (\rho^2-1)^2 \Delta(\rho) D_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.11.4)$$

Это решение записывается также в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= -2A \left[(1-2\nu) x \omega_1(\rho) + z^2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right], \\ v &= -2A \left[(1-2\nu) y \omega_2(\rho) + z^2 \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right], \\ w &= 2A \left[(1-2\nu) z \omega_3(\rho) - z^2 \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.11.5)$$

$$A = \frac{q_3(1-e^2)}{4GE(e)}, \quad (5.11.6)$$

и его можно представить через функции Папковича — Нейбера $B_1 = -Ax\omega_1(\rho)$, $B_2 = -Ay\omega_2(\rho)$, $B_3 = Az\omega_3(\rho)$, $B_0 = Aa^2\omega_0(\rho)$.
(5.11.7)

Проверим, что оно удовлетворяет всем условиям задачи.

Действительно, сославшись на формулы (III. 11.26) и (5.8.8) и учитывая равенство

$$\omega_3(\rho) = \frac{1}{1-e^2} \left[-E(\varphi, e) + \frac{\rho^2 - e^2}{\rho \Delta(\rho)} \right], \quad \varphi = \arcsin \frac{1}{\rho},$$

имеем

$$\begin{aligned} \vartheta &= 2(1-2\nu) \nabla \cdot \mathbf{B} = \\ &= -2A \left\{ \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \frac{1}{\rho \Delta(\rho) D_2} \left[\frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^2} - \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^2} \right] \right\} (1-2\nu) = \\ &= -\frac{4A(1-2\nu)}{1-e^2} \left[E(\varphi, e) - \frac{\rho^2 - e^2}{\rho \Delta(\rho)} + \frac{z^2(1-e^2)}{\rho \Delta(\rho) (\rho^2 - 1)^2 D_2} \right] \end{aligned}$$

и также

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= -2A \left\{ (1-2\nu) \left[\omega_1 + \omega_2 - \frac{1}{\rho \Delta(\rho) D_2} \left(\frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - e^2)^2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + z^3 \left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} \right) \right\} = \\ &= -2A \left[(1-2\nu) \left(-\omega_3 + \frac{z^2}{(\rho^2 - 1)^2 \rho \Delta(\rho) D_2} \right) + z^2 \left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Значения входящих сюда величин на плоскости $z = 0$ в области внутри эллипса E_0 ($\rho = 1$) и вне его ($\mu = 1$) определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{\rho^2 - 1} &= \frac{a^2}{1 - e^2} (1 - \mu^2)(1 - \nu^2) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{вне } E_0, \\ \frac{a^2}{1 - e^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} \right) & \text{внутри } E_0, \end{cases} \\ z\omega_3 &= \frac{z}{1 - e^2} \left[-E(\varphi, e) + \frac{\rho^2 - e^2}{\rho\Delta(\rho)} \right] = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{вне } E_0, \\ \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} \right)^{1/2} & \text{внутри } E_0, \end{cases} \\ -z^2 \frac{\partial \omega_3}{\partial z} &= \frac{z^3}{\rho\Delta(\rho)(\rho^2 - 1)^2 D_2} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{вне } E_0, \\ \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} \right)^{1/2} & \text{внутри } E_0, \end{cases} \\ \Phi &= \begin{cases} -\frac{4A(1 - 2\nu)}{1 - e^2} \left[E(\varphi, e) - \frac{\rho^2 - e^2}{\rho\Delta(\rho)} \right] & \text{вне } E_0, \\ -\frac{4A(1 - 2\nu)}{1 - e^2} E(e) & \text{внутри } E_0. \end{cases} \end{aligned}$$

На всей плоскости $z = 0$

$$z^2 \left(\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial y^2} \right) = 0,$$

откуда следует, что на этой плоскости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = \frac{1}{2} \Phi \quad (\text{при } z = 0).$$

Поэтому нормальное напряжение $\sigma_z|_{z=0}$, вычисляемое с учетом напряжения на бесконечности

$$\sigma_z|_{z=0} = q_3 + 2G \left(\frac{\partial v}{1 - 2\nu} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) = q_3 + \frac{G}{1 - 2\nu} \Phi,$$

оказывается равным

$$\sigma_z|_{z=0} = \begin{cases} \frac{q_3}{E(e)} \left[E(e) - E(\varphi, e) + \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 - e^2}{\rho^2 - 1}} \right] & \text{вне } E_0, \\ 0 & \text{внутри } E_0. \end{cases} \quad (5.11.8)$$

На эллипсе E_0 это напряжение претерпевает разрыв непрерывности.

Проверим еще, что касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} отсутствуют на всей плоскости $z = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \tau_{xz} \Big|_{z=0} &= 2A \left[(1-2\nu) \left(z \frac{\partial \omega_3}{\partial x} - x \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right) - 2z \frac{\partial \omega_3}{\partial x} - 2z^2 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial z} \right] \Big|_{z=0} = \\ &= -4A \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(z \omega_3 + z^2 \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) \right] \Big|_{z=0} = 0, \end{aligned}$$

так как равна нулю по вышесказанному величина в скобках.

Отметим еще легко получаемое из приведенных формул выражение перемещения w :

$$w = \begin{cases} 0 & \text{вне } E_0, \\ \frac{q_3 \sqrt{1-e^2}}{GE(e)} a (1-\nu) \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right]^{1/2} & \text{внутри } E_0. \end{cases}$$

Оно остается непрерывным на E_0 .

§ 6. Контактные задачи

6.1. Задача о жестком штампе. Краевое условие. В контактных задачах теории упругости рассматривается напряженное состояние, возникающее в прижатых друг к другу упругих телах. Одно из тел, в частности, может быть абсолютно твердым (жесткий штамп), а упругое тело представлено упругим полупространством. Решение этой простейшей задачи оказывается при некоторых добавочных предположениях достаточным для построения решения более общей задачи Герца о контакте двух упругих тел.

Плоскость, ограничивающую полупространство, примем за плоскость Oxy , направив ось Oz внутрь полупространства. Основание, которым штамп прижат к полупространству, может быть или плоским, или иметь форму выпуклой поверхности S (рис. 19). Со штампом связывается система осей $O\xi\eta$, начало которой расположено на поверхности S , а ось $O\xi$ направлена по нормали к этой поверхности внутрь штампа. В начальном состоянии, пока штамп не нагружен, начала систем осей $O\xi\eta\zeta$, $Oxyz$, равно как и оси ξ и x , η и y , совпадают, тогда как оси z и ζ имеют прямо противоположные направления; указанные системы осей поэтому разноименны (первая — левая, вторая — правая).

В системе осей ξ , η , ζ уравнение поверхности S основания штампа представляется в форме

$$\zeta = \varphi(\xi, \eta), \quad (6.1.1)$$

и при принятом выборе осей

$$\varphi(0, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\eta=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)_{\xi=\eta=0} = 0. \quad (6.1.2)$$

В случае плоского штампа уравнение плоскости, его ограничивающей, будет просто:

$$\xi = 0. \quad (6.1.3)$$

При нагружении штамп перемещается, погружаясь в деформируемую им упругую среду; величины, характеризующие перемещение штампа, считаются малыми того же порядка, что и перемещения точек среды.

На плоскости Oxy рассматривается область Ω , содержащая точки, располагающиеся после деформации на смещенной поверхности основания S штампа. Как всегда, краевые условия будем относить к недеформированной поверхности упругого тела, то есть к плоскости $z = 0$. Основание штампа считается абсолютно гладким; поэтому принимается, что касательные напряжения τ_{zx} , τ_{yz} отсутствуют на всей плоскости $z = 0$:

$$z = 0: \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (6.1.4)$$

Нормальные напряжения отсутствуют на плоскости $z = 0$ вне области соприкосновения Ω штампа со средой. В точках же области Ω упругая среда подвергается действию сжимающей нагрузки $p(x, y)$, так что

$$\sigma_z = \begin{cases} 0, & z \notin \Omega, \\ -p(x, y) & z \in \Omega. \end{cases} \quad (6.1.5)$$

Конечно, функция $p(x, y)$ наперед не задана — это основная неизвестная задачи. Равновесие штампа при условиях (6.1.4), (6.1.5) возможно при действии лишь силы Q , параллельной оси Oz ; обозначая через x_0 , y_0 координаты точки пересечения линии действия этой силы с плоскостью Oxy , можно записать следующие уравнения равновесия штампа:

$$Q = \iint_{\Omega} p(x, y) d\sigma, \quad x_0 Q = \iint_{\Omega} x p(x, y) d\sigma, \quad y_0 Q = \iint_{\Omega} y p(x, y) d\sigma \quad (6.1.6)$$

$$(d\sigma = dx dy).$$

Таковы интегральные условия, которым удовлетворяет неизвестное распределение давления $p(x, y)$.

Переходим к записи краевого условия для перемещения w точек области Ω ; оно должно быть выражено через величины, определяющие перемещение штампа. Под действием силы Q он

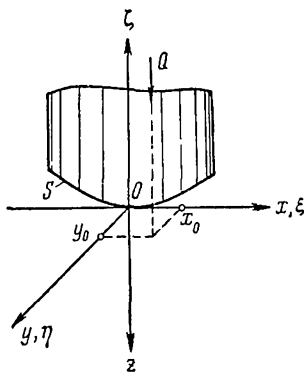


Рис. 19.

переместится поступательно и совершит поворот. Поступательное перемещение δ параллельно оси z , а поворот произойдет вокруг некоторой оси в плоскости Oxy ; через β_x , β_y назовем проекции вектора малого поворота. Через три величины δ , β_x , β_y могут быть выражены перемещения точек поверхности S основания штампа, и требуется составить выражения координат точек x_s , y_s , z_s этой поверхности в системе осей $Oxyz$. Таблица косинусов углов осей этой системы с осями $O\xi\eta\zeta$ будет

	ξ	η	ζ
x	1	0	$-\beta_y$
y	0	1	β_x
z	$-\beta_y$	β_x	-1

Непривычная расстановка знаков в этой таблице обусловлена разноименностью систем осей. В системе осей $Oxyz$ координаты начала системы осей $\xi\eta\zeta$ будут 0, 0, δ ; поэтому формулы преобразования координат точки ξ , η , $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ на S будут

$$\left. \begin{aligned} x_s &= 0 + \xi - \beta_y \zeta = \xi - \beta_y \varphi(\xi, \eta), \\ y_s &= 0 + \eta + \beta_x \zeta = \eta + \beta_x \varphi(\xi, \eta), \\ z_s &= \delta - \zeta - \beta_y \xi + \beta_x \eta = \delta - \varphi(\xi, \eta) - \beta_y \xi + \beta_x \eta. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.7)$$

Из равенств (6.1.2) следует, что величина $\varphi(\xi, \eta)$ имеет второй порядок малости относительно величин, характеризующих протяженность контактной поверхности; это позволяет пренебречь произведениями $\beta_x \varphi$, $\beta_y \varphi$ в формулах (6.1.7). Тогда

$$x_s = \xi, \quad y_s = \eta, \quad z_s = \delta - \beta_y x_s + \beta_x y_s - \varphi(x_s, y_s). \quad (6.1.8)$$

Пусть $(x, y, 0)$ — точка области Ω , которая при деформации перейдет в точку (x_s, y_s, z_s) на S :

$$x_s = x + u, \quad y_s = y + v, \quad z_s = w, \quad (6.1.9)$$

где, конечно, u , v , w обозначают проекции перемещения точки $(x, y, 0)$ на Ω . По (6.1.8), (6.1.9) имеем теперь

$$\left. \begin{aligned} u &= \xi - x, \quad v = \eta - y, \\ w &= \delta - \beta_y(x + u) + \beta_x(y + v) - \varphi(x + u, y + v). \end{aligned} \right\} \quad (6.1.10)$$

В последнем из этих равенств пренебрегаем произведениями $\beta_x v$, $\beta_y u$, а также полагаем

$$\varphi(x + u, y + v) \approx \varphi(x, y).$$

Приходим к искомому краевому условию

$$z = 0, \quad (x, y) \in \Omega: \quad w = \delta - \beta_y x + \beta_x y - \varphi(x, y). \quad (6.1.11)$$

В случае плоского штампа оно упрощается и принимает вид

$$z = 0, (x, y) \in \Omega: w = \delta - \beta_y x + \beta_x y. \quad (6.1.12)$$

Задача о штампе теперь сведена к смешанной краевой задаче теории упругости: во-первых, касательные напряжения τ_{zx} , τ_{yz} обращаются в нуль на всей плоскости $z = 0$; во-вторых, вне области Ω этой плоскости обращаются в нуль нормальные напряжения; в-третьих, задано нормальное перемещение w точек области Ω . Величины β_x , β_y , δ наперед неизвестны; для их определения используются уравнения равновесия штампа (6.1.6).

Сказанное можно пояснить еще так: точкам области Ω на плоскости $z = 0$ сообщаются нормальные перемещения w по заданному закону (6.1.11) или (6.1.12), для чего по площади Ω должно быть распределено нормальное давление по наперед неизвестному закону $p(x, y)$. В образованную «впадину» вставляется штамп, прижимаемый для сохранения равновесия вертикальной силой Q .

Если пренебречь искажением, вносимым поворотом, то область Ω в случае плоского штампа определяется формой его поперечного сечения, нормального оси ξ . На контуре этой области нормальное напряжение σ_z разрывно. Для неплоского штампа, поверхность которого не имеет угловых линий ($\partial\varphi/\partial\xi$, $\partial\varphi/\partial\eta$ непрерывны), контур C области Ω определяется условием, что на нем

$$p(x_c, y_c) = 0. \quad (6.1.13)$$

Тогда по (6.1.5) нормальное напряжение будет непрерывным на всей плоскости $z = 0$. Постановка этого условия диктуется тем, что при отсутствии угловой линии на поверхности штампа среда плавно прилегает к его основанию*).

Величина $w(x_c, y_c)$ представляет перемещение точек упругой среды вдоль контура C области Ω (на плоскости $z = 0$). Погрузением штампа в среду δ_1 следует назвать величину, определяемую равенством [см. (6.1.11)]

$$\delta_1 = \delta - w(x_c, y_c) = \beta_y x_c - \beta_x y_c + \varphi(x_c, y_c), \quad (6.1.14)$$

выражающим, что перемещение штампа δ равно сумме его погружения в среду и перемещения ее в точках кривой C .

Штамп должен быть прижат по всей поверхности соприкосновения, так что искомое распределение давления удовлетворяет условию

$$p(x, y) \geq 0 \quad (x, y) \in \Omega, \quad (6.1.15)$$

причем равенство выполняется лишь на контуре C области Ω .

*) Задача о штампе с неплоским основанием допускает при условиях (6.1.4), (6.1.5), (6.1.6) и (6.1.11) семейство решений, зависящих от одного параметра, определяемого требованием плавного прилегания среды к поверхности штампа (6.1.13).

Это условие накладывает ограничение на расположение линии действия прижимающей штамп силы Q .

6.2. Способ решения задачи о жестком штампе. В п. 2.3 была рассмотрена задача Буссинеска о напряженном состоянии упругого полупространства, на границе которого $z = 0$ отсутствуют касательные напряжения τ_{zx} , τ_{yz} , а нормальное напряжение распределено по заданному закону. Решение сводилось к разысканию гармонической функции ω (по ней квадратурами определялась еще одна гармоническая функция $\tilde{\omega}$ *)), которая была определена потенциалом простого слоя, распределенного по площади загрузки Ω с плотностью, равной интенсивности нормального давления $p(x, y)$:

$$\omega = \iint_{\Omega} \frac{p(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} d\sigma' \quad (d\sigma' = dx' dy'). \quad (6.2.1)$$

Касательные и нормальные напряжения на площадках $z = \text{const}$ определялись по формулам (2.3.5):

$$\tau_{zx} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}, \quad \tau_{yz} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z}, \quad \sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right), \quad (6.2.2)$$

а перемещения — формулами (2.3.4):

$$u = -\frac{1}{4\pi G} \left[z \frac{\partial \omega}{\partial x} + (1-2\nu) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \right], \quad v = -\frac{1}{4\pi G} \left[z \frac{\partial \omega}{\partial y} + (1-2\nu) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \right], \quad (6.2.3)$$

$$w = \frac{1-\nu}{2\pi G} \omega - \frac{1}{4\pi G} z \frac{\partial \omega}{\partial z}. \quad (6.2.4)$$

Известно, что нормальная производная потенциала простого слоя, распределенного по плоской области, определяется равенством (2.3.6):

$$z=0: \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow +0} = \begin{cases} -2\pi p(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (6.2.5)$$

Поэтому, сославшись на (6.2.2), можно заключить, что решение, определяемое через потенциал ω , удовлетворяет условиям (6.1.4), (6.1.5) задачи о жестком штампе, причем требуется подчинить выбор плотности $p(x, y)$ условию (6.1.11). Оно по (6.2.4) сводится к интегральному уравнению первого рода для искомого распределения нормального давления

$$w(x, y, 0) = \delta - \beta_y x + \beta_x y - \Phi(x, y) = \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y') d\sigma'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (6.2.6)$$

*) В п. 2.3 она обозначалась ω_1 .

или, в случае плоского штампа, по (6.1.12)

$$w(x, y, 0) = \delta - \beta_y x + \beta_x y = \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_{\Omega} \frac{p(x', y') d\sigma'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}. \quad (6.2.7)$$

Решение задачи в замкнутом виде можно получить в предположении, что областью соприкасания Ω является эллиптическая площадка, ограниченная эллипсом E_0 :

$$E_0: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} - 1 = 0. \quad (6.2.8)$$

Для плоского штампа полуоси a , $a\sqrt{1-e^2}$ задаются формой его прижатой поверхности. В задаче о неплоском штампе уравнение поверхности S представляется ее разложением в степенной ряд, начинающийся, согласно (6.1.2), с членов второй степени относительно ξ , η :

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \right)_0 \xi^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} \right)_0 \xi \eta + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right)_0 \eta^2 \right] + \dots$$

При надлежащем выборе направлений осей ξ , η слагаемое, содержащее произведение $\xi\eta$, может быть сделано равным нулю. Тогда

$$\xi = \frac{\xi^2}{2R_1} + \frac{\eta^2}{2R_2} + \dots \quad (6.2.9)$$

Здесь R_1^{-1} , R_2^{-1} — кривизны главных нормальных сечений поверхности S в точке касания ее с плоскостью, ограничивающей полупространство. Предполагается, что они положительны и что через R_1 обозначен больший из двух радиусов кривизны.

В уравнении (6.2.9), удовлетворяясь рассмотрением только локальных эффектов, ограничимся учетом лишь написанных членов второй степени; это значит, что поверхность S аппроксимируется в области ее касания с плоскостью $z = 0$ эллиптическим параболоидом. Теперь краевое условие (6.2.6) записывается в виде

$$\delta - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} \right) = \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_{\Omega} \frac{p(x', y') d\sigma}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (6.2.10)$$

— мы ограничиваемся в задаче о неплоском штампе только случаем его поступательного перемещения ($\beta_x = \beta_y = 0$). Область интегрирования Ω , как указывалось выше, считается расположенной внутри эллипса E_0 ; его параметры a , e теперь наперед неизвестны. Они определяются в конечном счете по заданию прижимающей силы Q и кривизн R_1^{-1} , R_2^{-1} прижимаемой по-

верхности. Принимается, что на E_0 давление $p(x, y)$ обращается в нуль, то есть выполнено условие (6.1.13).

Следует отличать границу площадки контакта (эллипс E_0) от контура поперечного сечения штампа плоскостью $\xi = \text{const}$.

Эллиптическая пластинка, имеющая «верх» ($z > 0$) и «низ» ($z < 0$), ограниченная фокальным эллипсом E_0 , представляет одну из координатных поверхностей $\rho = 1$ семейства эллипсоидов $\rho = \text{const}$ в системе эллиптических координат ρ, μ, ν [см. п. III. 11, в частности формулу (III. 11.16)]. Поэтому естественно ввести в рассмотрение потенциал простого слоя $\omega(x, y, z; \rho_0)$ на поверхности эллипсоида Ω_* ($\rho = \rho_0 > 1$), определив эту непрерывную гармоническую функцию ее значением $\omega(x, y, z; \rho_0)$ на Ω_* . Можно для задачи о плоском штампе по (6.2.6) принять

$$\text{на } \Omega_*: \quad \omega(x, y, z; \rho_0) = \frac{2\pi G}{1-\nu} (\delta - \beta_y x + \beta_x y), \quad (6.2.11)$$

а по (6.2.10) для неплоского штампа

$$\text{на } \Omega_*: \quad \omega(x, y, z; \rho_0) = \frac{2\pi G}{1-\nu} \left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right). \quad (6.2.12)$$

Теперь, составив решения $\omega_i(x, y, z; \rho_0)$, $\omega_e(x, y, z; \rho_0)$ внутренней и внешней задач Дирихле при этих заданиях на поверхности эллипсоида $\rho = \rho_0$, придем к функции

$$\omega(x, y, z; \rho_0) = \begin{cases} \omega_i(x, y, z; \rho_0), & \rho < \rho_0, \\ \omega_e(x, y, z; \rho_0), & \rho > \rho_0, \end{cases} \quad (6.2.13)$$

непрерывной во всем пространстве и обращающейся на бесконечности в нуль; она представляет потенциал простого слоя с плотностью $p(x, y, z)$, определяемой равенством

$$\left(\frac{\partial \omega_e}{\partial n} - \frac{\partial \omega_i}{\partial n} \right)_{(x, y, z) \in \Omega_*} = -4\pi p. \quad (6.2.14)$$

Поскольку плоскость $z = 0$ является плоскостью симметрии эллипсоида $\rho = \rho_0$, а заданные на этой поверхности значения $\omega(x, y, z; \rho_0)$ функций ω_i , ω_e не зависят от z , то плотность p будет четна относительно z .

Для определения потенциала $\omega(x, y, z)$ простого слоя на эллиптической пластинке остается провести предельный переход

$$\omega(x, y, z) = \lim_{\rho_0 \rightarrow 1} \omega(x, y, z; \rho_0) = \lim_{\rho_0 \rightarrow 1} \omega_e(x, y, z; \rho_0). \quad (6.2.15)$$

Потенциал $\omega(x, y, z)$ удовлетворяет условиям (6.1.11) или (6.1.12) на поверхности пластинки Ω . При вычислении плотности следует иметь в виду, что на каждый элемент площади пластинки лягут два симметрично расположенных относительно плоскости $z = 0$ элемента эллипсоида Ω_* с одинаковой плотностью; поэтому плотность распределения слоя на Ω , получаемая в предельном переходе по формуле (6.2.14), должна быть удвоена:

$$p(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\rho_0 \rightarrow 1} \left(\frac{\partial \omega_e(x, y, z; \rho_0)}{\partial n} - \frac{\partial \omega_i(x, y, z; \rho_0)}{\partial n} \right). \quad (6.2.16)$$

Этим определяется интенсивность давления по поверхности соприкосновения штампа с упругой средой.

В предложенном способе решения избегнуто непосредственное рассмотрение интегральных уравнений первого рода (6.2.6), (6.2.7); кроме того, отпадает вычисление интеграла (6.2.1) по найденной плотности — функция ω строится по (6.2.15), что предполагает лишь знание решения внешней задачи Дирихле для эллипсоида (см. п. VI.8).

6.2а. Представление сил и моментов, прилагаемых к неплоскому штампу. Предположив известным решение задачи о плоском штампе, можно получить выражения сил и моментов, которые следует приложить к штампу, основание которого очерчено по заданной поверхности $\varphi(\xi, \eta) = \zeta$, чтобы сообщить ему поступательное перемещение δ и повороты β_x, β_y . Поперечное сечение плоского штампа должно быть таким же по размерам и по форме, как и площадка соприкосновения (наперед неизвестная область Ω плоскости $z = 0$) неплоского штампа.

Через $q_0(x, y)$ назовем распределение давления по основанию плоского штампа, когда последнему сообщается поступательное перемещение $\delta^0 = 1$, но отсутствует его поворот ($\beta_x^0 = 0, \beta_y^0 = 0$). Для главного вектора и главных моментов этого распределения принимаются обозначения

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= \int_{\Omega} \int q_0(x, y) d\omega, & \int_{\Omega} \int y q_0(x, y) d\omega &= y_0 Q_0, \\ & - \int_{\Omega} \int x q_0(x, y) d\omega &= -x_0 Q_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1a)$$

Аналогично в рассмотрение вводятся распределения давлений $q_1(x, y), q_2(x, y)$, при которых отсутствует поступательное перемещение штампа ($\delta^{(1)} = 0, \delta^{(2)} = 0$), но возникают повороты, равные соответственно $\beta_x^{(1)} = 1, \beta_y^{(1)} = 0$ и $\beta_x^{(2)} = 0, \beta_y^{(2)} = 1$. Для главных

векторов и главных моментов этих распределений принимаются аналогичные обозначения ($s = 1, 2$):

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= \int_{\Omega} \int q_s(x, y) do, \quad \int_{\Omega} \int y q_s(x, y) do = y_s Q_s, \\ &\quad - \int_{\Omega} \int x q_s(x, y) do = -x_s Q_s. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.2a)$$

Из этих определений и теоремы взаимности следует симметричность матрицы

$$\begin{vmatrix} Q_0 & y_0 Q_0 & -x_0 Q_0 \\ Q_1 & y_1 Q_1 & -x_1 Q_1 \\ Q_2 & y_2 Q_2 & -x_2 Q_2 \end{vmatrix}. \quad (6.2.3a)$$

Вместе с тем, сославшись на (6.2.7), имеем

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_{\Omega} \int \frac{q_0(x', y') do'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}, \\ y &= \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_{\Omega} \int \frac{q_1(x', y') do'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}, \\ -x &= \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_{\Omega} \int \frac{q_2(x', y') do'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4a)$$

Рассматривая теперь неплоский штамп и называя P, m_1, m_2 главный вектор и главные моменты приложенных к нему сил, имеем

$$P = \int_{\Omega} \int p(x, y) do, \quad m_1 = \int_{\Omega} \int y p(x, y) do, \quad m_2 = - \int_{\Omega} \int x p(x, y) do, \quad (6.2.5a)$$

причем $p(x, y)$ — распределение давления по контактной поверхности штампа с упругим полупространством. Вместе с тем по (6.2.6)

$$\delta - \beta_y x' + \beta_x y' - \varphi(x', y') = \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_{\Omega} \int \frac{p(x, y) do}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}}, \quad (6.2.6a)$$

где δ, β_x, β_y — поступательное перемещение и углы поворота штампа при действии этой силы и моментов.

Обратившись теперь (6.2.5а) и первому соотношению (6.2.4а), получим

$$\begin{aligned} P &= \iint_{\Omega} p(x, y) d\sigma = \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} p(x, y) d\sigma \iint_{\Omega} \frac{q_0(x', y') d\sigma'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \\ &= \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} q_0(x', y') d\sigma' \iint_{\Omega} \frac{p(x, y) d\sigma}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}} \end{aligned}$$

или, по (6.2.6а), (6.2.1а),

$$P + \iint_{\Omega} q_0(x', y') \varphi(x', y') d\sigma' = Q_0(\delta + \beta_x y_0 - \beta_y x_0). \quad (6.2.7а)$$

Аналогично этому, используя второе и третье равенства (6.2.4а), а также (6.2.2а), (6.2.5а), (6.2.6а), придем к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} m_1 + \iint_{\Omega} q_1(x', y') \varphi(x', y') d\sigma' &= Q_1(\delta + \beta_x y_1 - \beta_y x_1), \\ m_2 + \iint_{\Omega} q_2(x', y') \varphi(x', y') d\sigma' &= Q_2(\delta + \beta_x y_2 - \beta_y x_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8а)$$

Уравнения (6.2.7а), (6.2.8а) еще не решают поставленной задачи, поскольку не известна область интегрирования Ω — поперечное сечение введенного в рассмотрение плоского штампа. Очевидно, что как заданные $(\delta, \beta_x, \beta_y, \varphi(x, y))$, так и искомые величины (P, m_1, m_2) не должны зависеть от параметров, задающих форму и размеры Ω . Эти соображения дают средство для определения Ω .

Изложенный здесь прием разыскания сил и моментов, не предусматривающий знания распределения давления $p(x, y)$ по основанию неплоского штампа, эффективно применим, к сожалению, только к случаю штампа эллиптического (в частности, круглого) поперечного сечения, так как требуемые решения в замкнутом виде интегральных уравнений второго рода (6.2.4а) известны только для плоского эллиптического (круглого) штампа.

6.3. Плоский, эллиптический в плане штамп. Функции $\omega_i(x, y, z; \rho_0)$, $\omega_e(x, y, z; \rho_0)$ определяются формулами (VI.8.9):

$$\begin{aligned} \omega_l &= \frac{2\pi G}{1-\nu} (\delta - \beta_y x + \beta_x y), \\ \omega_e &= \frac{2\pi G}{1-\nu} \left[\delta \frac{\omega_0(\rho)}{\omega_0(\rho_0)} - \beta_y x \frac{\omega_1(\rho)}{\omega_1(\rho_0)} + \beta_x y \frac{\omega_2(\rho)}{\omega_2(\rho_0)} \right], \end{aligned}$$

так что по (6.2.15)

$$\omega = \frac{2\pi G}{1-\nu} \left[\delta \frac{\omega_0(\rho)}{\omega_0(1)} - \beta_y x \frac{\omega_1(\rho)}{\omega_1(1)} + \beta_x y \frac{\omega_2(\rho)}{\omega_2(1)} \right], \quad (6.3.1)$$

а для определения распределения давления по площади штампа служит формула (VI.8.15); в ней теперь

$$F(x, y, 0) = \frac{2\pi G}{1-\nu} (\delta - \beta_y x + \beta_x y),$$

а величина $R(1)$ для каждого слагаемого, входящего в это выражение, задается формулами (VI.6.2), (VI.6.4). Получаем

$$p(x, y) = \frac{G}{(1-\nu) a \sqrt{1-e^2}} \left[\frac{\delta}{\omega_0(1)} - \beta_y \frac{x}{\omega_1(1)} + \beta_x \frac{y}{(1-e^2) \omega_2(1)} \right] \times \\ \times \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right)^{-1/2}. \quad (6.3.2)$$

Постоянные δ , β_x , β_y находятся из уравнений равновесия (6.1.6):

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{G}{(1-\nu) a \sqrt{1-e^2}} \frac{\delta}{\omega_0(1)} \iint_{\Omega} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2} d\sigma = \\ &= \frac{2\pi a G}{1-\nu} \frac{\delta}{\omega_0(1)}, \\ x_0 Q &= - \frac{G}{(1-\nu) a \sqrt{1-e^2}} \frac{\beta_y}{\omega_1(1)} \iint_{\Omega} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2} d\sigma = \\ &= - \frac{2\pi a^3 G}{3(1-\nu)} \frac{\beta_y}{\omega_1(1)}, \\ y_0 Q &= \frac{G}{(1-\nu) a (1-e^2)^{3/2}} \frac{\beta_x}{\omega_2(1)} \iint_{\Omega} y^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2} d\sigma = \\ &= \frac{2\pi a^3 G}{3(1-\nu)} \frac{\beta_x}{\omega_2(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.3)$$

Величины $\omega_s(1)$ определяются полными эллиптическими интегралами $K(e)$, $E(e)$ с модулем e :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(1) &= \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} = \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-e^2)(\lambda^2-1)}} = K(e), \\ \omega_1(1) &= \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} = \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)] = D(e), \\ \omega_2(1) &= \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2-e^2) \Delta(\lambda)} = \frac{1}{e^2} \left[\frac{E(e)}{1-e^2} - K(e) \right] = \frac{B(e)}{1-e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.4)$$

Обозначения $D(e)$, $B(e)$ для представленных комбинаций полных эллиптических интегралов первого и второго рода

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \psi}}, \quad E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

приняты в известном справочнике таблиц и формул Янке и Эмде; там же имеются таблицы этих величин *).

Получаем

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{Q(1-\nu)}{2\pi a G} K(e), \quad \beta_x = 3 \frac{Q(1-\nu)}{2\pi a^3 G} y_0 \frac{B(e)}{1-e^2}, \\ \beta_y &= -3 \frac{Q(1-\nu)}{2\pi a^3 G} x_0 D(e). \end{aligned} \right\} \quad (6.3.5)$$

Распределение давления теперь представляется в виде

$$p(x, y) = \frac{1}{2} p_m \left[1 + \frac{3xx_0}{a^2} + \frac{3yy_0}{a^2(1-e^2)} \right] \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right)^{-1/2}, \quad (6.3.6)$$

причем p_m — среднее давление:

$$p_m = \frac{Q}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}. \quad (6.3.7)$$

Давление p , равное половине среднего в центре штампа, возрастает неограниченно при приближении к контуру области загрузки, являющемуся угловой линией штампа. Штамп будет прижат к упругому полупространству по всей поверхности соприкосновения, если линия действия силы Q проходит внутри эллиптического цилиндра с полуосями $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}a\sqrt{1-e^2}$.

Выражение (6.3.1) потенциала ω записывается в виде

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{Q}{a} \left[\omega_0(\rho) + \frac{3xx_0}{a^2} \omega_1(\rho) + \frac{3yy_0}{a^2} \omega_2(\rho) \right] = \\ &= \frac{Q}{a} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left(1 + \frac{3xx_0}{a^2\lambda^2} + \frac{3yy_0}{a^2(\lambda^2-e^2)} \right). \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

6.4. Перемещения и напряжения. Для вычисления компонент u , v вектора перемещения требуется знание производных

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = - \int_z^\infty \frac{\partial \omega}{\partial x} dz, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = - \int_z^\infty \frac{\partial \omega}{\partial y} dz. \quad (6.4.1)$$

*) Э. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, «Наука», 1964.

Здесь по (6.3.8) и (III.11.26)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{3Qx_0}{a^3} \omega_1(\rho) - \frac{Q}{a\Delta(\rho)} \left[1 + \frac{3xx_0}{a^2\rho^2} + \frac{3yy_0}{a^2(\rho^2 - e^2)} \right] \frac{x}{\rho^3 D_\rho^2}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{3Qy_0}{a^3} \omega_2(\rho) - \frac{Q}{a\Delta(\rho)} \left[1 + \frac{3xx_0}{a^2\rho^2} + \frac{3yy_0}{a^2(\rho^2 - e^2)} \right] \frac{y}{\rho(\rho^2 - e^2) D_\rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2)$$

Приходим к вычислению интегралов вида

$$\int_z^\infty dz \int_\rho^\infty \chi(\lambda) d\lambda, \quad \int_z^\infty f(x, y, \rho) \frac{dz}{D_\rho^2 \Delta(\rho)}.$$

По (III.11.9) и (III.11.26) имеем

$$\left. \begin{aligned} z(\lambda) &= a \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[1 - \frac{x^2}{a^2 \lambda^2} - \frac{y^2}{a^2 (\lambda^2 - e^2)} \right]^{1/2} = a \sqrt{\lambda^2 - 1} \gamma(x, y, \lambda), \\ \frac{dz}{D_\rho^2 \Delta(\rho)} &= \frac{\rho(\rho^2 - 1)}{z \Delta(\rho)} d\rho = \rho \sqrt{\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 - e^2}} \frac{d\rho}{z}, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.3)$$

причем второе равенство получено дифференцированием (III.11.9) по ρ при постоянных x, y . Итак,

$$\begin{aligned} - \int_z^\infty dz \int_\rho^\infty \chi(\lambda) d\lambda &= \int_\rho^\infty [z - z(\lambda)] \chi(\lambda) d\lambda, \\ \int_z^\infty f(x, y, \rho) \frac{dz}{D^2 \Delta(\rho)} &= \int_\rho^\infty \frac{f(x, y, \lambda)}{z(\lambda)} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - e^2}} \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Применив эти равенства, получаем по (6.4.2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} &= \frac{3Qx_0}{a^3} \int_\rho^\infty [z - z(\lambda)] \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} + \\ &+ \frac{Qx}{a^2} \int_\rho^\infty \left[1 + \frac{3xx_0}{a^2 \lambda^2} + \frac{3yy_0}{a^2 (\lambda^2 - e^2)} \right] \frac{d\lambda}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - e^2} \gamma(x, y, \lambda)}, \\ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} &= \frac{3Qy_0}{a^3} \int_\rho^\infty [z - z(\lambda)] \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} + \\ &+ \frac{Qy}{a^2} \int_\rho^\infty \left[1 + \frac{3xx_0}{a^2 \lambda^2} + \frac{3yy_0}{a^2 (\lambda^2 - e^2)} \right] \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2)^{3/2} \gamma(x, y, \lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.4)$$

Выражения перемещений, составляемые по (6.2.3), (6.2.4), в случае центрально нагруженного штампа ($x_0 = y_0 = 0$) будут

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Qx}{4\pi G a^2} \left[\frac{z \Delta(\rho)}{a \rho (\rho^2 - \mu^2) (\rho^2 - \nu^2)} - \frac{m-2}{m} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 (\lambda^2 - e^2) \gamma(x, y, \lambda)} \right], \\ v &= \frac{Qy}{4\pi G a^2} \left[\frac{z \rho \Delta(\rho)}{a (\rho^2 - e^2) (\rho^2 - \mu^2) (\rho^2 - \nu^2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m-2}{m} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2)^{3/2} \gamma(x, y, \lambda)} \right], \\ w &= \frac{Qz}{4\pi G a^3} \frac{z \rho \Delta(\rho)}{(\rho^2 - 1) (\rho^2 - \mu^2) (\rho^2 - \nu^2)} + \frac{Q(m-1)}{2\pi G m a} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \\ &\quad \left(m = \frac{1}{\nu}, \text{ число Пуассона} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.4.5)$$

Здесь использованы соотношения (III. 11.21), (III. 11.12):

$$D_{\rho}^2 = \frac{H_{\rho}^2}{\rho^2} = a^2 \frac{(\rho^2 - \nu^2) (\rho^2 - \mu^2)}{\rho^2 (\rho^2 - e^2) (\rho^2 - 1)}.$$

Интересно отметить, что интегралы, входящие в выражения u , v , вычисляются элементарно.

Объемное расширение вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{m-2}{2\pi G m} \frac{\partial \omega}{\partial z} = - \frac{Q(m-2)}{2\pi G m a^3} \frac{z \rho \Delta(\rho)}{(\rho^2 - 1) (\rho^2 - \mu^2) (\rho^2 - \nu^2)}. \quad (6.4.6)$$

В точках на оси z имеем

$$\nu = 0, \quad \mu = e, \quad z = a \sqrt{\rho^2 - 1}, \quad (6.4.7)$$

и вычисление напряжений в точках этой оси приводит к формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} p_m \sqrt{\frac{1-e^2}{\rho^2 - e^2}} \left[\frac{m-2}{m e^2} (\rho - \sqrt{\rho^2 - e^2}) - \frac{1}{\rho^3} \right], \\ \sigma_y &= \frac{1}{2} p_m \frac{\sqrt{1-e^2}}{\rho} \left[\frac{m-2}{m e^2} (\rho - \sqrt{\rho^2 - e^2}) - \frac{1-e^2}{(\rho^2 - e^2)^{3/2}} \right], \\ \sigma_z &= - \frac{1}{2} p_m \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{1-e^2}{\rho^2 - e^2}} \left(\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} + \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 - e^2} + 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.4.8)$$

Касательные напряжения на оси z отсутствуют.

6.5. Неплоский штамп. По (6.2.12) краевое условие для потенциала ω представляется в виде

$$z = 0, \quad (x, y) \in \Omega: \quad \omega(x, y, 0) = \frac{2\pi G}{1-\nu} \left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right), \quad (6.5.1)$$

причем плотность этого потенциала по (6.1.13) должна обращаться в нуль на эллипсе E_0 , ограничивающем область соприкасания Ω . В п. VI. 8 показано, что последнему условию удовлетворяет потенциал (VI. 8.19)

$$\omega = \frac{1}{2} C \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2 \lambda^2} - \frac{y^2}{a^2 (\lambda^2 - e^2)} - \frac{z^2}{a^2 (\lambda^2 - 1)} \right]$$

с плотностью (VI. 8.18)

$$p(x, y) = \frac{C}{2\pi a \sqrt{1-e^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}}.$$

Определяя постоянную C по уравнению равновесия (6.1.6), имеем

$$Q = \iint_{\Omega} p(x, y) d\sigma = \frac{1}{3} aC, \quad C = \frac{3Q}{a},$$

так что

$$p(x, y) = \frac{3}{2} p_m \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}}, \quad p_m = \frac{Q}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}. \quad (6.5.2)$$

Максимальное давление в центре площадки равно 1,5 среднего давления p_m ; эпюра распределения давления представляет поверхность полуэллипсоида, опирающегося на ограничивающий площадку соприкасания эллипс E_0 .

Потенциал ω представляется в виде

$$\omega = \frac{3Q}{2a} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 \lambda^2} - \frac{y^2}{a^2 (\lambda^2 - e^2)} - \frac{z^2}{a^2 (\lambda^2 - 1)} \right), \quad (6.5.3)$$

причем постоянные a, e должны быть определены из условия (6.5.1), принимающего вид

$$\begin{aligned} \frac{2\pi G}{1-\nu} \left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right) &= \frac{3Q}{2a} \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 \lambda^2} - \frac{y^2}{a^2 (\lambda^2 - e^2)} \right) = \\ &= \frac{3Q}{2a} \left[K(e) - \frac{x^2}{a^2} D(e) - \frac{y^2}{a^2} \frac{B(e)}{1-e^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

Здесь использованы формулы (6.3.4). Приходим к равенствам

$$\delta = \frac{3Q(1-\nu)}{4\pi a G} K(e), \quad \frac{1}{R_1} = \frac{3Q(1-\nu)}{2\pi a^3 G} D(e), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{3Q(1-\nu)}{2\pi a^3 G} \frac{B(e)}{1-e^2}. \quad (6.5.5)$$

Ими определяются поступательное перемещение штампа δ , большая полуось a и эксцентриситет e площадки соприкасания. Последний находим из соотношения

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(1-e^2) D(e)}{B(e)} = \frac{(1-e^2) [K(e) - E(e)]}{E(e) - (1-e^2) K(e)}, \quad (6.5.6)$$

после чего определяются a , δ :

$$a = \left[\frac{Q(1-\nu)}{G} R_1 \right]^{1/3} \alpha_a, \quad \delta = \left[\frac{Q(1-\nu)}{G \sqrt{R_1}} \right]^{2/3} \alpha_\delta, \quad (6.5.7)$$

где обозначено

$$\alpha_a = \left[\frac{3}{2\pi} D(e) \right]^{1/3}, \quad \alpha_\delta = \left[\frac{9}{32\pi^2 D(e)} \right]^{1/3} K(e). \quad (6.5.8)$$

В табл. 3 для некоторых значений e^2 приведены значения R_2/R_1 , α_a , α_δ . Пользуясь этой таблицей, по заданному отношению кривизны находим e^2 и далее α_a , α_δ .

На рис. 20 приведен график зависимости R_2/R_1 от e^2 . Смещение штампа δ оказалось пропорциональным $Q^{2/3}$; этот необычный для линейной теории упругости результат, конечно, объясняется тем, что одновременно с ростом силы увеличивается площадь площадки соприкасания.

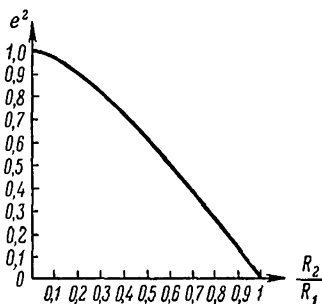


Рис. 20.

6.5а. Определение сил и моментов, действующих на неплоский, эллиптический в плане штамп. Здесь применяется прием определения этих величин, изложенный в п. 6.2а.

По (6.3.2) и (6.2.4а) имеем

$$\left. \begin{aligned} q_0(x, y) &= \frac{G}{(1-\nu) a \sqrt{1-e^2} \omega_0(1)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right]^{-1/2}, \\ q_1(x, y) &= \frac{G}{(1-\nu) a (1-e^2)^{3/2} \omega_2(1)} y \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right]^{-1/2}, \\ q_2(x, y) &= \frac{-G}{(1-\nu) a \sqrt{1-e^2} \omega_1(1)} x \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right]^{-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.5.1a)$$

и отличны от нуля только диагональные элементы матрицы (6.2.3а), по (6.3.3), (6.2.1а), (6.2.2а) равные

$$Q_0 = \frac{2\pi a G}{(1-\nu) \omega_0(1)}, \quad y_1 Q_1 = \frac{2\pi a^3 G}{3(1-\nu) \omega_2(1)}, \quad x_2 Q_2 = -\frac{2\pi a^3 G}{3(1-\nu) \omega_1(1)}. \quad (6.5.2a)$$

Т а б л и ц а 3

e^2	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
R_2/R_1	1	0,963	0,925	0,885	0,846	0,806	0,765	0,724	0,682	0,637	0,594
α_a	0,722	0,726	0,731	0,736	0,741	0,747	0,753	0,760	0,767	0,775	0,783
α_b	0,520	0,523	0,526	0,530	0,534	0,538	0,543	0,547	0,553	0,559	0,565
e^2	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1
R_2/R_1	0,594	0,549	0,502	0,454	0,405	0,353	0,297	0,233	0,174	0,101	0
α_a	0,783	0,793	0,803	0,815	0,829	0,844	0,863	0,888	0,921	0,975	—
α_b	0,565	0,571	0,580	0,589	0,597	0,609	0,623	0,642	0,668	0,713	—

По (6.2.9)

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}. \quad (6.5.3a)$$

Теперь, снова обратившись к (6.3.3), по (6.2.7a) получим

$$P + \frac{\pi G}{3(1-\nu)\omega_0(1)} \frac{a^3}{R_1} \left(1 + \frac{1-e^2}{R_2} R_1\right) = \frac{2\pi a G}{(1-\nu)\omega_0(1)} \delta, \quad (6.5.4a)$$

причем $\omega_0(1) = K(e)$, а величины P , R_1 , R_2 , δ не зависят от a , e^2 . Учитывая соотношения

$$2 \frac{dK}{de^2} = \frac{B(e)}{1-e^2}, \quad B(e) + D(e) = K(e)$$

и дифференцируя (6.5.4a) по a и e^2 , найдем

$$\frac{a^2}{R_1} \left(1 + \frac{1-e^2}{R_2} R_1\right) = 2\delta, \quad \frac{D(e)}{R_2} = \frac{B(e)}{(1-e^2)R_1}, \quad (6.5.5a)$$

причем второе равенство повторяет (6.5.6), а первое дает

$$\frac{a^2}{R_1} = 2\delta \frac{D(e)}{K(e)}. \quad (6.5.6a)$$

Отсюда и из (6.5.4a) легко получить теперь соотношения (6.5.5).

Подынтегральные выражения в формулах (6.2.8a) нечетны по y и соответственно по x (см. (6.5.1a), (6.5.2a)). Поэтому выражения моментов приводятся к виду

$$m_1 = \frac{2\pi a^3 G}{3(1-\nu)\omega_2(1)} \beta_x, \quad m_2 = \frac{2\pi a^3 G}{3(1-\nu)\omega_1(1)} \beta_y, \quad (6.5.7a)$$

внешне не отличающемся от (6.3.3), — следует иметь в виду, что теперь a^3 не задано, а определено вышеприведенными формулами.

6.6. Перемещения и напряжения. Имеем (см. также (5.6.18))

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{3Qx}{a^3} \omega_1(\rho), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{3Qy}{a^3} \omega_2(\rho), \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{3Qz}{a^3} \omega_3(\rho). \quad (6.6.1)$$

По (6.4.4) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} &= -\frac{3Qx}{a^3} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} [z - z(\lambda)], \\ \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} &= -\frac{3Qy}{a^3} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} [z - z(\lambda)] \\ &\quad \left(\omega(x, y, z) = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.6.2)$$

и выражения перемещений по (6.2.3), (6.2.4) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{3Qx}{4\pi G a^3} \left[2(1-\nu) z \omega_1(\rho) - (1-2\nu) \int_{\rho}^{\infty} \frac{z(\lambda) d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} \right], \\ v &= \frac{3Qy}{4\pi G a^3} \left[2(1-\nu) z \omega_2(\rho) - (1-2\nu) \int_{\rho}^{\infty} \frac{z(\lambda) d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} \right], \\ w &= \frac{3Q(1-\nu)}{4\pi G a} \omega + \frac{3Qz^2}{4\pi G a^3} \omega_3(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (6.6.3)$$

причем $z(\lambda)$ определяется по (6.4.3), и интегралы

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^{\infty} \frac{z(\lambda) d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} &= a \int_{\rho}^{\infty} \frac{\gamma(x, y, \lambda) d\lambda}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - e^2}}, \\ \int_{\rho}^{\infty} \frac{z(\lambda) d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} &= a \int_{\rho}^{\infty} \frac{\gamma(x, y, \lambda) d\lambda}{(\lambda^2 - e^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

выражаются через элементарные функции.

Зная перемещения, находим напряжения. Ограничимся приведением результатов, относящихся к центру площадки соприкосновения и к ее контуру.

В центре $(x, y, z = 0)$

$$\sigma_x = -\frac{3}{2} p_m \frac{2\nu a + b}{a + b}, \quad \sigma_y = -\frac{3}{2} p_m \frac{2\nu b + a}{a + b}, \quad \sigma_z = -\frac{3}{2} p_m, \quad (6.6.4)$$

где $b = a \sqrt{1 - e^2}$. На контуре

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = -\sigma_y = -\frac{1-2\nu}{e^2} \frac{3}{2} p_m \sqrt{1-e^2} \times \\ \times \left[1 - \frac{x}{2ae} \ln \frac{a+ex}{a-ex} - \frac{y}{ae} \operatorname{arctg} \frac{ey}{a(1-e^2)} \right], \\ \tau_{xy} = -\frac{1-2\nu}{e^2} \frac{3}{2} p_m \sqrt{1-e^2} \frac{xy}{a^2} \left[\frac{a}{2ex} \ln \frac{a+ex}{a-ex} - \frac{a}{ey} \operatorname{arctg} \frac{ey}{a(1-e^2)} \right], \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.5)$$

В частности, на концах большой и малой полуосей эллипса имеем соответственно

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = -\sigma_y = -(1-2\nu) \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2} \frac{3}{2} p_m \left(1 - \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \\ (x = a, y = 0), \\ \sigma_x = -\sigma_y = -(1-2\nu) \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2} \frac{3}{2} p_m \left(1 - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \operatorname{arctg} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \right) \\ (x = 0, y = b). \end{aligned} \right\} \quad (6.6.6)$$

6.7. Соприкасание поверхностей. Рассматриваются два тела, ограниченные выпуклыми поверхностями S_1, S_2 и соприкасающиеся в точке O . Принимая эту точку за начало систем координат, проведем оси z_1, z_2 , перпендикулярные к общей касательной плоскости Π поверхностей S_1, S_2 в точке O , внутрь каждого из тел. Оси $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ систем $Ox_1y_1z_1, Ox_2y_2z_2$, связанных с первым и соответственно со вторым телом, направим в плоскости Π по главным нормальным сечениям поверхностей S_1, S_2 . Уравнения поверхностей S_1, S_2 в этих системах осей в окрестности точки соприкосновения O представляются в виде

$$z_1 = \frac{x_1^2}{2R_1'} + \frac{y_1^2}{2R_2'} + \dots, \quad z_2 = \frac{x_2^2}{2R_1''} + \frac{y_2^2}{2R_2''} + \dots, \quad (6.7.1)$$

где $1/R_1', 1/R_2'$ — главные кривизны поверхности S_1 в точке O , положительные, если соответствующий центр кривизны расположен внутри тела, то есть на положительной оси z_1 ; аналогичное значение имеют величины $1/R_1'', 1/R_2''$ для поверхности S_2 . В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением локальных явле-

ний в области контакта; это позволяет сохранить в уравнениях (6.7.1) только написанные слагаемые.

Расстояние между двумя точками M_1 , M_2 поверхностей S_1 , S_2 , расположенными на одном перпендикуляре к плоскости Π , равно

$$z = z_1 + z_2 = \frac{x_1^2}{2R'_1} + \frac{y_1^2}{2R'_2} + \frac{x_2^2}{2R''_1} + \frac{y_2^2}{2R''_2}, \quad (6.7.2)$$

и очевидно, что $z > 0$; на рис. 21, а и б показаны два возможных расположения поверхностей S_1 , S_2 при их внешнем и внутреннем соприкосновении.

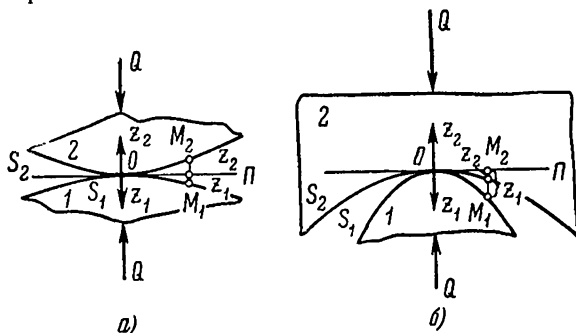


Рис. 21.

Дальнейшее рассмотрение имеет целью представить z в виде

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}, \quad (6.7.3)$$

для чего вводится новая система осей Oxy ; если обозначить через ω_1 , ω_2 углы, составляемые осями x_1 , x_2 с осью x , то по формулам преобразования координат

$$x_1 = x \cos \omega_1 + y \sin \omega_1, \quad y_1 = -x \sin \omega_1 + y \cos \omega_1,$$

$$x_2 = x \cos \omega_2 + y \sin \omega_2, \quad y_2 = -x \sin \omega_2 + y \cos \omega_2,$$

и выражение z представится в виде

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + \frac{1}{2} xy (g_1 \sin 2\omega_1 + g_2 \sin 2\omega_2), \quad (6.7.4)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{\cos^2 \omega_1}{R'_1} + \frac{\sin^2 \omega_1}{R'_2} + \frac{\cos^2 \omega_2}{R''_1} + \frac{\sin^2 \omega_2}{R''_2}, \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{\sin^2 \omega_1}{R'_1} + \frac{\cos^2 \omega_1}{R'_2} + \frac{\sin^2 \omega_2}{R''_1} + \frac{\cos^2 \omega_2}{R''_2}, \\ g_1 &= \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}, \quad g_2 = \frac{1}{R''_2} - \frac{1}{R''_1}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.5)$$

Через α назовем угол между осями x_1, x_2 (отсчитываемый от x_1 к x_2):

$$\alpha = \omega_2 - \omega_1, \quad (6.7.6)$$

и введем в рассмотрение средние кривизны поверхностей S_1, S_2 в точке O :

$$2H_1 = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}, \quad 2H_2 = \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2}, \quad (6.7.7)$$

так что

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2(H_1 + H_2). \quad (6.7.8)$$

Теперь подберем величину

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \omega_1 + \frac{\alpha}{2} = \omega_2 - \frac{\alpha}{2} \quad (6.7.9)$$

так, чтобы обратить в нуль слагаемое в (6.7.4), содержащее произведение xy :

$$g_1 \sin 2\omega_1 + g_2 \sin 2\omega_2 = (g_1 + g_2) \sin 2\omega \cos \alpha - (g_1 - g_2) \cos 2\omega \sin \alpha = 0. \quad (6.7.10)$$

Вместе с тем по (6.7.5) и (6.7.9) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= H_1 + H_2 + \frac{1}{2} [(g_1 + g_2) \cos 2\omega \cos \alpha + (g_1 - g_2) \sin 2\omega \sin \alpha], \\ \frac{1}{R_2} &= H_1 + H_2 - \frac{1}{2} [(g_1 + g_2) \cos 2\omega \cos \alpha + (g_1 - g_2) \sin 2\omega \sin \alpha]. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.11)$$

Из двух уравнений: (6.7.10) и первого уравнения (6.7.11) найдем теперь $\cos 2\omega, \sin 2\omega$:

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\omega &= \frac{2}{\Delta^2} \left(\frac{1}{R_1} - H_1 - H_2 \right) (g_1 + g_2) \cos \alpha, \\ \sin 2\omega &= \frac{2}{\Delta^2} \left(\frac{1}{R_1} - H_1 - H_2 \right) (g_1 - g_2) \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (6.7.12)$$

где

$$\Delta = (g_1^2 + g_2^2 + 2g_1 g_2 \cos 2\alpha)^{1/2}. \quad (6.7.13)$$

Теперь $\frac{1}{R_1}$ находится по условию $\sin^2 2\omega + \cos^2 2\omega = 1$, после чего $\frac{1}{R_2}$ определится по (6.7.8):

$$\frac{1}{R_1} = H_1 + H_2 - \frac{1}{2} \Delta, \quad \frac{1}{R_2} = H_1 + H_2 + \frac{1}{2} \Delta, \quad (6.7.14)$$

через R_1 обозначена бóльшая из двух величин R_1, R_2 . По (6.7.12) имеем также

$$\cos 2\omega = -\frac{1}{\Delta} (g_1 + g_2) \cos \alpha, \quad \sin 2\omega = -\frac{1}{\Delta} (g_1 - g_2) \sin \alpha. \quad (6.7.15)$$

Таким образом определена система осей Oxy , в которых квадратичная форма (6.7.4) приведена к сумме квадратов (6.7.3), и найдены коэффициенты этой формы $\frac{1}{2R_1}$, $\frac{1}{2R_2}$. Они оба положительны, так как $z > 0$ при любых значениях переменных x , y .

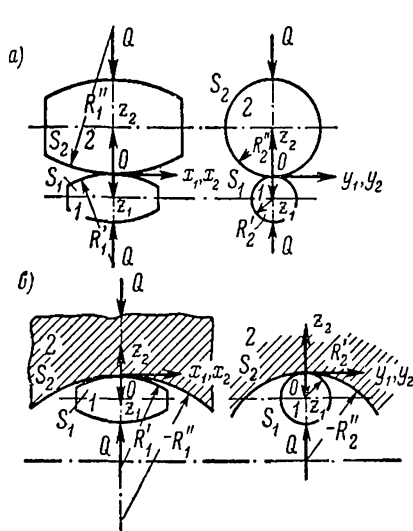


Рис. 22.

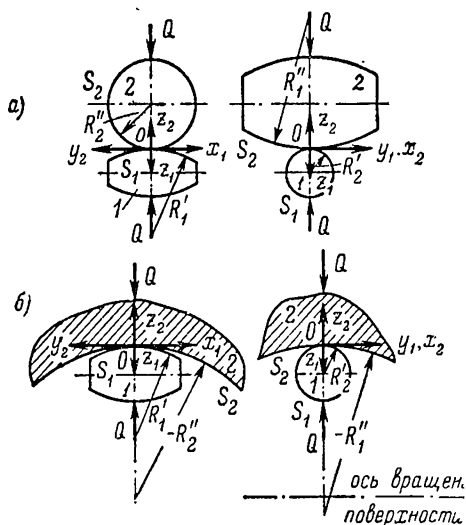


Рис. 23.

В частном случае поверхностей вращения с параллельными осями при их внешнем (рис. 22, а) и внутреннем (рис. 22, б) соприкосновении имеем $\alpha = 0$ и по (6.7.13), (6.7.5)

$$\Delta = \left| \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_1} - \frac{1}{R''_2} \right|.$$

Тогда при

$$\Delta = \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_2} - \frac{1}{R''_1}$$

имеем

$$\omega = 0, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2}. \quad (6.7.16)$$

Если же

$$\Delta = \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_1} - \frac{1}{R''_2},$$

то

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1} \quad (6.7.17)$$

и в обоих случаях $R_1 > R_2$.

Случай поверхностей вращения с осями, расположенными накрест, представлен на рис. 23, а при внешнем соприкосновении и на рис. 23, б при внутреннем. Теперь $\alpha = \pi/2$, так что

$$\Delta = |g_1 - g_2| = \left| \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2} \right|$$

и при

$$\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R''_2} \geq 0$$

соответственно имеем

$$\omega = \frac{3\pi}{4} \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_1}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_2}, \quad (6.7.18)$$

$$\omega = \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_2}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_1}. \quad (6.7.19)$$

Интересен также случай соприкосновения поверхностей вращения в точке на оси вращения z . Тогда

$$\frac{1}{R'_1} = \frac{1}{R'_2} = \frac{1}{R'}, \quad \frac{1}{R''_1} = \frac{1}{R''_2} = \frac{1}{R''}.$$

Угол α произвольный, а $g_1 = g_2 = 0$, $\Delta = 0$. Получаем при внешнем соприкосновении

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}, \quad (6.7.20)$$

и эта же формула сохраняется и при внутреннем соприкосновении, но тогда большая по модулю из двух величин R' , R'' отрицательна.

Например, для двух соприкасающихся извне шаров радиусов R' , R'' по (6.7.20)

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''},$$

а для шара радиуса R' в сферической полости радиуса R''

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R''}.$$

При соприкосновении двух цилиндров радиусов a и b с накрест расположенными осями

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{b} \quad (a > b).$$

В случае шара S_1 радиуса R в цилиндрическом желобе S_2 радиуса $r > R$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R},$$

причем ось x направлена перпендикулярно образующей цилиндра.

6.8. Задача Герца о сжатии упругих тел. Два упругих тела прижаты друг к другу силами Q , линия действия которых перпендикулярна общей касательной плоскости Π поверхностей S_1 и S_2 тел в точке O . Под действием сил Q тела деформируются в области, примыкающей к месту контакта, и сближаются друг с другом. Назовем через $-\delta_1$, $-\delta_2$ проекции поступательного перемещения первого и второго тел на оси z_1 и z_2 , которые, напомним, направлены внутрь соответствующих тел. Можно также определить δ_1 и δ_2 как перемещения достаточно удаленных от места контакта точек первого и соответственно второго тела, а величину

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (6.8.1)$$

называть сближением тел.

Рассмотрим две точки M_1 , M_2 первого и второго тел, расположенные в области, примыкающей к месту контакта, на общем перпендикуляре к плоскости Π . В системах осей Ox_1z_1 , Ox_2z_2 , введенных в п. 6.7, координаты этих точек до деформации соответственно будут (z_1, x, y) и (z_2, x, y) . При деформации тел точкам M_1 , M_2 сообщаются перемещения, проекции которых на оси z_1 , z_2 обозначаются через w_1 , w_2 . Одновременно точки M_1 , M_2 сместятся вместе со своими телами и займут положения M'_1 , M'_2 ; поэтому после деформации интересующие нас координаты z'_1 , z'_2 точек M'_1 , M'_2 станут равными

$$z'_1 = z_1 + w_1 - \delta_1, \quad z'_2 = z_2 + w_2 - \delta_2 \quad (6.8.2)$$

и расстояние $M'_1M'_2$ станет равным

$$z' = z'_1 + z'_2 = z_1 + z_2 + w_1 + w_2 - (\delta_1 + \delta_2) \quad (6.8.3)$$

или, по (6.8.1), (6.7.3),

$$z' = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + w_1 + w_2 - \delta. \quad (6.8.4)$$

Для тех точек M_1 , M_2 первого и второго тел, которые после деформации вступят в контакт, это расстояние станет равным нулю, а для точек вблизи места контакта оно положительно. Поэтому поверхность Ω контакта можно определить как место точек, для которых

$$z' = 0, \quad w_1 + w_2 = \delta - \frac{x^2}{R_1} - \frac{y^2}{R_2}, \quad (6.8.5)$$

тогда как вне контактной площади

$$z' > 0, \quad w_1 + w_2 > \delta - \frac{x^2}{R_1} - \frac{y^2}{R_2}. \quad (6.8.6)$$

По поверхности контакта действует нормальное давление с интенсивностью $p(x, y)$, тогда как касательные напряжения на ней считаем отсутствующими. Далее предполагается, что при рассмотрении локальных эффектов в окрестности контакта можно заменить соприкасающиеся тела двумя упругими полупространствами, прижатыми друг другу по площадке Ω , расположенной в разделяющей полупространства плоскости Π — касательной плоскости поверхностей S_1, S_2 в точке O . На этой плоскости $z_1 = 0, z_2 = 0$. Как и в п. 6.5, площадка соприкасания определяется областью внутри эллипса

$$E_0: \quad 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 0, \quad (6.8.7)$$

оси которого x, y определены в п. 6.7. Давление $p(x, y)$ на E_0 принимается равным нулю.

Напряженное состояние в каждом из полупространств определяется с помощью функции $\omega_i(x, y, z_i)$ ($i = 1, 2$), являющейся потенциалом простого слоя, распределенного по площадке Ω с интенсивностью $p(x, y)$. По (6.2.1) имеем

$$\omega_i(x, y, z_i) = \iint_{\Omega} \frac{p(x', y') d\sigma'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_i^2]^{1/2}}, \quad (6.8.8)$$

и можно ограничиться рассмотрением одного лишь потенциала

$$\omega(x, y, z) = \iint_{\Omega} \frac{p(x', y') d\sigma'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{1/2}}, \quad (6.8.9)$$

считая z положительным в каждом из полупространств. При вычислении же перемещений по формулам (6.2.3), (6.2.4), конечно, следует упругим постоянным придавать соответствующие значения: G_1, ν_1 и G_2, ν_2 .

По (6.2.4) на площадке соприкасания

$$\omega_1 = \frac{1-\nu_1}{2\pi G_1} \omega(x, y, 0), \quad \omega_2 = \frac{1-\nu_2}{2\pi G_2} \omega(x, y, 0), \quad (6.8.10)$$

и, следовательно, по (6.8.5) на Ω

$$\omega = \frac{2\pi}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \left(\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \right), \quad (6.8.11)$$

где обозначено

$$\vartheta_i = \frac{1-\nu_i}{G_i} \quad (i = 1, 2). \quad (6.8.12)$$

Потенциал ω определяется условием (6.8.11) и требованием обращения в нуль плотности $p(x, y)$ на контуре E_0 площадки Ω . Эта задача лишь заменой обозначения

$$\frac{1-\nu}{G} \quad \text{на} \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2} \quad (6.8.13)$$

отличается от задачи п. 6.5 о действии неплоского штампа на упругое полупространство. Поэтому результаты решения задачи о штампе тотчас же переносятся на задачу о контакте упругих тел, прижатых друг к другу силами Q . Ход решения этой задачи такой:

1) По заданным кривизнам $(1/R'_1, 1/R'_2)$, $(1/R''_1, 1/R''_2)$ поверхностей S_1, S_2 соприкасающихся тел в точке соприкосновения O и по углу α определяются с помощью формул (6.7.14) и (6.7.15) величины $1/R_1, 1/R_2$ и направления осей x, y — угол ω .

2) По (6.5.6) определяется эксцентриситет e площадки соприкосновения.

3) Большая полуось эллипса a и сближение тел δ определяются с помощью формул

$$a = [QR_1(\vartheta_1 + \vartheta_2)]^{1/3} \alpha_a, \quad \delta = \left[\frac{Q}{V R_1} (\vartheta_1 + \vartheta_2) \right]^{2/3} \alpha_\delta, \quad (6.8.14)$$

причем функции эксцентриситета α_a, α_δ задаются формулами (6.5.8).

4) Перемещения определяются по формулам (6.6.3) с заменой v, G на v_i, G_i ($i = 1, 2$); конечно, при вычислении напряжений следует также в формулах п. 6.6 заменить v на v_i .

§ 7. Равновесие упругого кругового цилиндра

7.1. Дифференциальные уравнения равновесия кругового цилиндра. В последующем ограничиваемся рассмотрением случаев аксиально-симметричной и изгибной деформаций цилиндра. В первом случае осевое w , радиальное u и кольцевое v (перпендикулярное меридиональным плоскостям) перемещения являются функциями цилиндрических координат r, z . Для деформации, названной изгибной, первые две компоненты w и u вектора перемещения принимаются пропорциональными косинусу, а v — синусу азимутального угла φ . Общий случай (пропорциональность $\cos n\varphi$ и соответственно $\sin n\varphi$) здесь не рассматривается. Вместо r, z вводятся безразмерные переменные x, ξ :

$$x = \frac{r}{a}, \quad \xi = \frac{z}{a}, \quad (7.1.1)$$

где a — наружный радиус цилиндра. Для полого цилиндра длины $2l$ с внутренним радиусом b

$$\frac{b}{a} = x_1 \leq x < 1, \quad -L \leq \xi \leq L = \frac{l}{a}. \quad (7.1.2)$$

Аксиально-симметричный случай, как говорилось уже в п. 1.10 гл. IV, распадается на задачу о меридиональной деформации и задачу кручения. Решение первой может быть выражено через три функции Папковича — Нейбера (достаточно,

впрочем, двух). Сохраняя обозначения пп. 1.12 и 1.13 гл. IV, две из них назовем b_0 , b_3 — это гармонические функции; третья обозначается b_r , причем гармонической функцией является произведение $b_r e^{i\varphi}$:

$$\nabla^2 b_0 = 0, \quad \nabla^2 b_3 = 0, \quad \nabla^2 b_r - \frac{b_r}{x^2} = 0. \quad (7.1.3)$$

Здесь в обозначениях (7.1.1)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \quad (7.1.4)$$

По (1.12.16) и (1.13.3) гл. IV перемещения выражаются через эти функции формулами ($n = 0$)

$$\left. \begin{aligned} u &= a \left[-\frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial x} + (3 - 4\nu) b_r - x \frac{\partial b_r}{\partial x} \right], \\ w &= a \left[(3 - 4\nu) b_3 - \frac{\partial b_0}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - x \frac{\partial b_r}{\partial \xi} \right], \end{aligned} \right\} \quad (7.1.5)$$

а отличные от нуля напряжения по (1.12.13), (1.13.5) гл. IV равны

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_r &= 2\nu \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial b_r}{\partial x} + 2\nu \frac{b_r}{x} - x \frac{\partial^2 b_r}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{2G} \sigma_z &= 2(1 - \nu) \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial^2 b_3}{\partial \xi^2} \right) + 2\nu \left(\frac{\partial b_r}{\partial x} + \frac{b_r}{x} \right) - x \frac{\partial^2 b_r}{\partial \xi^2}, \\ \frac{1}{2G} \sigma_\varphi &= 2\nu \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \frac{1}{x} \left(\frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial x} \right) - (1 - 2\nu) \frac{\partial b_r}{\partial x} + (3 - 2\nu) \frac{b_r}{x}, \\ \frac{1}{2G} \tau_{rz} &= (1 - 2\nu) \frac{\partial b_3}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial x \partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 b_3}{\partial x \partial \xi} \right) + (1 - 2\nu) \frac{\partial b_r}{\partial \xi} - x \frac{\partial^2 b_r}{\partial \xi \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.6)$$

В задаче о кручении отлично от нуля только перемещение v , и по (1.11.3) гл. IV отличные от нуля напряжения $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{z\varphi}$ определяются из формул

$$\frac{a}{G} \tau_{r\varphi} = x \frac{\partial}{\partial x} \frac{v}{x}, \quad \frac{a}{G} \tau_{z\varphi} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad (7.1.7)$$

причем $v e^{i\varphi}$ — гармоническая функция,

$$\nabla^2 v - \frac{v}{x^2} = 0. \quad (7.1.8)$$

В случае изгибной деформации в рассмотрение вводятся четыре функции b_0 , b_3 , b_r , b_φ . Функции $b_0 e^{i\varphi}$, $b_3 e^{i\varphi}$ гармонические, тогда как по (1.13.4) гл. IV дифференциальные уравнения, определяющие (при $n = 1$) функции b_r , b_φ , будут

$$\nabla^2 b_r - \frac{2b_r}{x^2} - \frac{2b_\varphi}{x^2} = 0, \quad \nabla^2 b_\varphi - \frac{2b_\varphi}{x^2} - \frac{2b_r}{x^2} = 0,$$

и следует ввести в рассмотрение их полусумму и полуразность

$$p = \frac{1}{2}(b_r + b_\varphi), \quad q = \frac{1}{2}(b_r - b_\varphi), \quad b_r = p + q, \quad b_\varphi = p - q. \quad (7.1.9)$$

Введенные функции определяются поэтому из дифференциальных уравнений

$$\nabla^2 p - \frac{4}{x^2} p = 0, \quad \nabla^2 q = 0, \quad \nabla^2 b_0 - \frac{b_0}{x^2} = 0, \quad \nabla^2 b_3 - \frac{b_3}{x^2} = 0. \quad (7.1.10)$$

Выражения перемещений по (1.12.16) и (1.13.3) гл. IV приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} u &= a \cos \varphi \left[- \left(\frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial x} \right) + (3 - 4\nu)(p + q) - x \frac{\partial(p + q)}{\partial x} \right], \\ w &= a \cos \varphi \left[(3 - 4\nu)b_3 - \left(\frac{\partial b_0}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial \xi} \right) - x \frac{\partial(p + q)}{\partial \xi} \right], \\ v &= a \sin \varphi \left[\frac{1}{x}(b_0 + \xi b_3) + (5 - 4\nu)p - (3 - 4\nu)q \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.11)$$

Напряжения определяются формулами (1.12.13), (1.12.14) и (1.13.5), (1.13.6) гл. IV:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r}{2G} &= \cos \varphi \left[2\nu \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^2 b_3}{\partial x^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial(p + q)}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - x \frac{\partial^2(p + q)}{\partial x^2} + 4\nu \frac{p}{x} \right], \\ \frac{\sigma_z}{2G} &= \cos \varphi \left[2(1 - \nu) \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial^2 b_3}{\partial \xi^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\nu \frac{\partial(p + q)}{\partial x} - x \frac{\partial^2(p + q)}{\partial \xi^2} + 4\nu \frac{p}{x} \right], \\ \frac{\sigma_\varphi}{2G} &= \cos \varphi \left[2\nu \frac{\partial b_3}{\partial \xi} - \frac{1}{x} \left(\frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x^2}(b_0 + \xi b_3) - (1 - 2\nu) \frac{\partial(p + q)}{\partial x} + 4(2 - \nu) \frac{p}{x} \right], \\ \frac{\tau_{rz}}{2G} &= \cos \varphi \left[(1 - 2\nu) \frac{\partial b_3}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 b_0}{\partial x \partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 b_3}{\partial x \partial \xi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2\nu) \frac{\partial(p + q)}{\partial \xi} - x \frac{\partial^2(p + q)}{\partial \xi \partial x} \right], \\ \frac{\tau_{r\varphi}}{2G} &= \sin \varphi \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\partial b_0}{\partial x} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial x} \right) - \frac{1}{x^2}(b_0 + \xi b_3) + \right. \\ &\quad \left. + (3 - 2\nu) \frac{\partial p}{\partial x} - 4(1 - \nu) \frac{p}{x} - (1 - 2\nu) \frac{\partial q}{\partial x} \right], \\ \frac{\tau_{z\varphi}}{2G} &= \sin \varphi \left[-(1 - 2\nu) \frac{b_3}{x} + \frac{1}{x} \left(\frac{\partial b_0}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial b_3}{\partial \xi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (3 - 2\nu) \frac{\partial p}{\partial \xi} - (1 - 2\nu) \frac{\partial q}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.12)$$

Уравнения статики в цилиндрических координатах в аксиально-симметричном случае записываются по (1.10.3) гл. IV в виде: для меридиональной деформации

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{x} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \xi} + \rho a K_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial x} + \frac{\tau_{rz}}{x} + \rho a K_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.1.13)$$

и для деформации кручения

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \xi} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{x} + \rho a K_\varphi = 0. \quad (7.1.14)$$

Конечно, решения (7.1.6) и соответственно (7.1.7) удовлетворяют, при отсутствии массовых сил, этим уравнениям.

В задаче об изгибной деформации уравнения статики (1.9.4) гл. IV представляется в виде ($n = 1$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{x} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \xi} + \frac{\tau'_{r\varphi}}{x} + \rho a K_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial x} + \frac{\tau_{rz}}{x} + \frac{\tau'_{z\varphi}}{x} + \rho a K_z &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial x} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{x} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{x} \sigma'_\varphi + \rho a K_\psi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.15)$$

причем штрихом указывается на замену $\sin \varphi$ в выражениях $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{z\varphi}$ на $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ на $\cos \varphi$ — в выражении σ_φ .

В аксиально-симметричном случае распределенные по поперечному сечению цилиндра напряжения приводятся к осевой силе и крутящему моменту:

$$Z = 2\pi a^2 \int_{x_1}^1 \sigma_z x \, dx, \quad m_z = 2\pi a^3 \int_{x_1}^1 \tau_{z\varphi} x^2 \, dx. \quad (7.1.16)$$

С помощью уравнений равновесия (7.1.13) и (7.1.14) эти величины легко выразить через напряжения на внутренней и внешней поверхностях полого цилиндра:

$$\left. \begin{aligned} Z &= Z_0 + 2\pi a^2 \int_0^\xi [x_1 (\tau_{rz})_{x=x_1} - (\tau_{rz})_{x=1}] d\xi, \\ m_z &= m_z^0 + 2\pi a^3 \int_0^\xi [x_1^2 (\tau_{r\varphi})_{x=x_1} - (\tau_{r\varphi})_{x=1}] d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.17)$$

где Z_0 , m_z^0 — осевая сила и крутящий момент в сечении $\xi = 0$.

При деформации изгиба напряжения σ_z , τ_{rz} , $\tau_{z\varphi}$ в поперечном сечении статически эквивалентны поперечной силе X и изгибающему моменту m_y относительно оси y в плоскости $z = 0$:

$$X = \pi a^2 \int_{x_1}^1 (\tau_{rz}^* - \tau_{z\varphi}^*) x dx, \quad m_y = a \zeta X - \pi a^3 \int_{x_1}^1 x^2 \sigma_z^* dx, \quad (7.1.18)$$

причем звездочками обозначены множители при $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ в соответствующих выражениях напряжений. Выражая X , m_y с помощью уравнений равновесия (7.1.15) через напряжения на поверхностях $x = x_1$, $x = 1$, придем к формулам

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + \pi a^2 \int_0^{\zeta} [x_1 (\sigma_r^* - \tau_{r\varphi}^*)_{x=x_1} - (\sigma_r^* - \tau_{r\varphi}^*)_{x=1}] d\zeta, \\ m_y &= m_y^0 + \pi a^3 \int_0^{\zeta} \{ x_1 [\zeta (\sigma_r^* - \tau_{r\varphi}^*) - x_1 \tau_{rz}^*]_{x=x_1} - \\ &\quad - [\zeta (\sigma_r^* - \tau_{r\varphi}^*) - \tau_{rz}^*]_{x=1} \} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.19)$$

Эти выражения легко непосредственно получить, рассматривая равновесие конечной части цилиндра между сечениями $\zeta = 0$ и $\zeta = \zeta$.

7.2. Задача Ляме для полого цилиндра. Рассматривается осесимметричная задача о напряженном состоянии в полом цилиндре под действием нормального давления, равномерно распределенного по боковой поверхности

$$x = 1: \quad \sigma_r = -p_0, \tau_{rz} = 0; \quad x = x_1: \quad \sigma_r = -p_1, \tau_{rz} = 0. \quad (7.2.1)$$

В решении Папковича — Нейбера достаточно удержать только одну функцию b_r , считая ее не зависящей от ζ ; тогда по (7.1.3)

$$b_r'' + \frac{1}{x} b_r' - \frac{1}{x^2} b_r = 0,$$

так что

$$b_r = C_1 x + \frac{C_2}{x}. \quad (7.2.2)$$

Поэтому

$$\frac{1}{2G} \sigma_r = 2C_1 - 4(1-\nu) \frac{C_2}{x^2}, \quad \frac{\sigma_\varphi}{2G} = 2C_1 + 4(1-\nu) \frac{C_2}{x^2}, \quad \frac{\sigma_z}{2G} = 4\nu C_1. \quad (7.2.3)$$

Определив постоянные C_1, C_2 по краевым условиям (7.2.1), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{(1-x_1^2)x^2} [(x^2-1)p_1x_1^2 - (x^2-x_1^2)p_0], \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{(1-x_1^2)x^2} [(x^2+1)p_1x_1^2 - (x^2+x_1^2)p_0], \\ \sigma_z &= 2\nu \frac{p_1x_1^2 - p_0}{1-x_1^2}, \quad \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.4)$$

Далее, по (7.1.5) найдем перемещения

$$2Gu = \frac{a}{1-x_1^2} \left[(1-2\nu)(p_1x_1^2 - p_0)x + (p_1 - p_0)\frac{x_1^2}{x} \right], \quad w = 0. \quad (7.2.5)$$

Полученное напряженное состояние реализуется в упругом цилиндре, подверженном равномерному давлению снаружи и изнутри и помещенном между двумя неподвижными жесткими и гладкими плитами, не допускающими продольного перемещения точек на торцах цилиндра ($w = 0$), но не препятствующими их радиальным смещениям ($\tau_{rz} = 0$). Реакции этих стенок создают равномерно распределенное по торцу нормальное напряжение σ_z .

Случай цилиндра, края которого могут свободно смещаться в осевом направлении ($\sigma_z = 0, w \neq 0$), можно получить, наложив на найденное напряженное состояние равномерное осевое сжатие, противоположное σ_z по знаку:

$$\sigma_z^0 = -2\nu \frac{p_1x_1^2 - p_0}{1-x_1^2}.$$

Оно вызывает перемещение

$$u^0 = -\frac{\sigma_z^0 \nu a}{E} x, \quad w^0 = \frac{\sigma_z^0 a}{E} \xi \quad (E = 2G(1+\nu)),$$

но не создает добавочных напряжений $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{rz}$. Решение задачи Ляме для цилиндра со свободно смещающимися торцами поэтому представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= \frac{a}{1-x_1^2} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} (p_1x_1^2 - p_0)x + (p_1 - p_0)\frac{x_1^2}{x} \right], \\ 2Gw &= -\frac{2a\nu}{1+\nu} \frac{p_1x_1^2 - p_0}{1-x_1^2} \xi \end{aligned} \right\} \quad (7.2.6)$$

причем $\sigma_z = 0$, а прочие напряжения определяются формулами (7.2.4).

7.3. Дисторсии в полом цилиндре. Постановка задачи была дана в п. 5.6 гл. IV. Остановимся на простейших случаях вращательной дисторсии b_3 вокруг оси Oz и поступательной c_2 (по направлению e_φ).

1°. Вращательная дисторсия b_3 . Задача состоит в разыскании напряженного состояния \hat{T}' , наложение которого на напряженное состояние (5.6.10) гл. IV освобождает поверхности $x = 1$, $x = x_1$ полого цилиндра от напряжения σ_r :

$$\left. \begin{aligned} x=1: \quad \frac{1}{2G} \sigma'_r &= -\frac{b_3}{4\pi} \frac{1}{1-2\nu}; \\ x=x_1: \quad \frac{1}{2G} \sigma'_r &= -\frac{b_3}{4\pi} \left(\frac{1}{1-2\nu} + \frac{\ln x_1}{1-\nu} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.3.1)$$

Это — задача Ляме, в которой

$$p_0 = \frac{Gb_3}{2\pi} \frac{1}{1-2\nu}, \quad p_1 = \frac{Gb_3}{2\pi} \left(\frac{1}{1-2\nu} + \frac{\ln x_1}{1-\nu} \right).$$

По (7.2.4) и по (5.6.10) напряжения получаются равными

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_r &= \sigma_r + \sigma'_r = \frac{b_3 G}{2\pi(1-\nu)} \left(\ln x - \frac{1-x^2}{1-x_1^2} \frac{x_1^2}{x^2} \ln x_1 \right), \\ \Sigma_\varphi &= \sigma_\varphi + \sigma'_\varphi = \frac{b_3 G}{2\pi(1-\nu)} \left(1 + \ln x + \frac{1+x^2}{1-x_1^2} \frac{x_1^2}{x^2} \ln x_1 \right), \\ \Sigma_z &= \sigma_z + \sigma'_z = \frac{b_3 G \nu}{2\pi(1-\nu)} \left(1 + 2 \ln x + \frac{2x_1^2}{1-x_1^2} \ln x_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.3.2)$$

Это напряженное состояние будет иметь место в подвергнутом дисторсии b_3 цилиндре, заключенном между двумя недопускающими осевого перемещения w , жесткими и гладкими плитами, создающими по торцам напряжение Σ_z . Разыскание напряженного состояния при свободных торцах требует наложения еще одного состояния, ликвидирующего распределение напряжений Σ_z по торцам и не создающего напряжений на цилиндрических поверхностях $x = 1$, $x = x_1$. Решение этой задачи в конечном виде, по-видимому, невозможно.

2°. Поступательная дисторсия c_2 . Здесь на напряженное состояние (5.6.11) гл. IV следует наложить напряженное состояние изгиба, определяемое краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} x=1: \quad \frac{\sigma'_r}{2G} &= \frac{c_2}{2\pi} \cos \varphi, \quad \frac{\tau'_{r\varphi}}{2G} = -\frac{c_2}{2\pi} \sin \varphi, \\ x=x_1: \quad \frac{\sigma'_r}{2G} &= \frac{c_2}{2\pi x_1} \cos \varphi, \quad \frac{\tau'_{r\varphi}}{2G} = -\frac{c_2}{2\pi x_1} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.3)$$

Используются не зависящие от ξ функции p и q , определяемые дифференциальными уравнениями (7.1.10):

$$p'' + \frac{1}{x} p' - \frac{4}{x^2} p = 0, \quad q'' + \frac{1}{x} q' = 0.$$

Их частные решения имеют вид

$$p_1 = x^2, \quad p_2 = \frac{1}{x^2}, \quad q_1 = \ln x, \quad q_2 = 1,$$

и определяемые по (7.1.12) напряжения равны

$$\begin{aligned} \sigma'_r &= \left[A_1 x + \frac{A_2}{x^3} + A_3 (3 - 2\nu) \frac{1}{x} \right] \cos \varphi, \\ \sigma'_\varphi &= \left[3A_1 x - \frac{A_2}{x^3} - A_3 (1 - 2\nu) \frac{1}{x} \right] \cos \varphi, \\ \tau'_{r\varphi} &= \left[A_1 x + \frac{A_2}{x^3} - A_3 (1 - 2\nu) \frac{1}{x} \right] \sin \varphi. \end{aligned}$$

Постоянные определяются по краевым условиям (7.3.3):

$$\begin{aligned} \text{при } x=1, \quad x=x_1: \quad A_1 x^2 + \frac{A_2}{x^2} + A_3 (3 - 2\nu) &= \frac{c_2 G}{\pi}, \\ A_1 x^2 + \frac{A_2}{x^2} - A_3 (1 - 2\nu) &= -\frac{c_2 G}{\pi}. \end{aligned}$$

Из них находим

$$A_3 = \frac{c_2 G}{2\pi(1-\nu)},$$

и напряжения в цилиндре, подвергнутом дисторсий, записываются в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_r &= \sigma_r + \sigma'_r = \left(A_1 x + \frac{A_2}{x^3} + \frac{c_2 G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x} \right) \cos \varphi, \\ \Sigma_\varphi &= \sigma_\varphi + \sigma'_\varphi = \left(3A_1 x - \frac{A_2}{x^3} + \frac{c_2 G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x} \right) \cos \varphi, \\ T_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi} + \tau'_{r\varphi} = \left(A_1 x + \frac{A_2}{x^3} + \frac{c_2 G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x} \right) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Множители при $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ в выражениях Σ_r , $T_{r\varphi}$ оказались равными, и остается удовлетворить лишь двум краевым условиям:

$$A_1 + A_2 = -\frac{c_2 G}{2\pi(1-\nu)}, \quad A_1 x_1^2 + \frac{A_2}{x_1^2} = -\frac{c_2 G}{2\pi(1-\nu)}.$$

Получаем следующие значения напряжений (см. также формулы (7.1.4) гл. VII):

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_r &= \frac{c_2 G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2 + \frac{x_1^2}{x^2}}{1 + x_1^2} \right) \cos \varphi, \\ \Sigma_\varphi &= \frac{c_2 G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{3x^2 - \frac{x_1^2}{x^2}}{1 + x_1^2} \right) \cos \varphi, \\ T_{r\varphi} &= \frac{c_2 G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2 + \frac{x_1^2}{x^2}}{1 + x_1^2} \right) \sin \varphi, \\ \Sigma_z &= \frac{c_2 G \nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{2x^2}{1 + x_1^2} \right) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.4)$$

Это напряженное состояние осуществляется в подверженном в сечении $\varphi = 0$ поступательной дисторсии упругом цилиндре, помещенном между двумя препятствующему осевому перемещению, жесткими гладкими плитами. Как и в предшествующем случае, строгое решение задачи об освобождении торцов весьма трудно.

7.4. Полиномиальные решения задачи о равновесии цилиндра. В п. 7.1. представлены формулы, выражающие напряжения и перемещения в цилиндре, подверженном аксиально-симметричной деформации и деформации изгиба, через гармонические функции двух видов — осесимметричные (зависящие от x, ξ) и произведения функций от x, ξ на $e^{i\varphi}$. В этом пункте дается построение этих решений в форме однородных полиномов от x, ξ для сплошного цилиндра и с членами, содержащими надлежащие особенности на оси z (при $x = 0$), в случае полого цилиндра.

1°. Осесимметричные гармонические функции. Для сплошного цилиндра речь идет о выраженных в цилиндрических координатах гармонических полиномах

$$\varphi_n(x, \xi) = R^n P_n(\mu), \quad R^2 = x^2 + \xi^2, \quad \mu = \cos \vartheta = \frac{\xi}{R}, \quad (7.4.1)$$

где $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра (VI. 2.11). В частности, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, \quad \varphi_1 = \xi, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(2\xi^2 - x^2), \quad \varphi_3 = \frac{1}{2}(2\xi^3 - 3\xi x^2), \\ \varphi_4 &= \frac{1}{8}(8\xi^4 - 24\xi^2 x^2 + 3x^4), \quad \varphi_5 = \frac{1}{8}\xi(8\xi^4 - 40\xi^2 x^2 + 15x^4) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

В случае полого цилиндра добавляются решения вида

$$\psi_n(x, \xi) = \varphi_n(x, \xi) \ln x + \chi_n(x, \xi), \quad (7.4.3)$$

причем слагаемое χ_n определяется по условию

$$\nabla^2 \psi_n = 0, \quad \nabla^2 \chi_n = -\nabla^2 \varphi_n \ln x = -2 \nabla \varphi_n \cdot \nabla \ln x.$$

Здесь использовано известное представление лапласиана произведения и учтено, что $\nabla^2 \varphi_n = 0$, $\nabla^2 \ln x = 0$. Возвращаясь к сферическим координатам, имеем

$$\nabla \varphi_n = R^{n-1} (nP_n e_R - \sin \vartheta P'_n e_\vartheta), \quad \nabla \ln x = \frac{1}{R} (e_R + e_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta),$$

так что (если использовать известное рекуррентное соотношение для полинома Лежандра)

$$\nabla^2 \chi_n = -2R^{n-2} (nP_n - \mu P'_n) = 2R^{n-2} P'_{n-1}(\mu).$$

Теперь, разыскивая χ_n в виде произведения

$$\chi_n = R^n S_n(\mu), \quad (7.4.4)$$

приходим к неоднородному уравнению Лежандра

$$[(1 - \mu^2) S'_n(\mu)]' + n(n+1) S_n(\mu) = 2P'_{n-1}(\mu).$$

Его правая часть представляет полином $(n-2)$ -й степени от μ , представимый через полиномы Лежандра формулами

$$\left. \begin{aligned} P'_{n-1}(\mu) &= (2n-3) P_{n-2}(\mu) + (2n-7) P_{n-4}(\mu) + \dots \\ &\quad \dots + 9P_4(\mu) + 5P_2(\mu) + P_0(\mu) \quad (n \text{ четно}), \\ P'_{n-1}(\mu) &= (2n-3) P_{n-2}(\mu) + (2n-7) P_{n-4}(\mu) + \dots \\ &\quad \dots + 11P_5(\mu) + 7P_3(\mu) + 3P_1(\mu) \quad (n \text{ нечетно}). \end{aligned} \right\} \quad (7.4.5)$$

Поэтому, записав уравнение Лежандра для полинома $P_\nu(\mu)$ в виде

$$[(1 - \mu^2) P'_\nu(\mu)]' + n(n+1) P_\nu(\mu) = [n(n+1) - \nu(\nu+1)] P_\nu(\mu)$$

и разыскивая $S_n(\mu)$ в виде

$$S_n(\mu) = \sum_0^{n-2} a_\nu P_\nu(\mu),$$

придем для определения a_ν к соотношению

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} a_\nu P_\nu(\mu) [n(n+1) - \nu(\nu+1)] = 2P'_{n-1}(\mu).$$

Из него, используя (7.4.5), найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} S_n(\mu) &= \frac{2n-3}{n(n+1)-(n-2)(n-1)} P_{n-2}(\mu) + \\ &+ \frac{2n-7}{n(n+1)-(n-4)(n-3)} P_{n-4}(\mu) + \dots + \frac{9}{n(n+1)-4 \cdot 5} P_4(\mu) + \\ &\quad + \frac{5}{n(n+1)-2 \cdot 3} P_2(\mu) + \frac{P_0(\mu)}{n(n+1)} \quad (n \text{ четно}), \\ \frac{1}{2} S_n(\mu) &= \frac{2n-3}{n(n+1)-(n-2)(n-1)} P_{n-2}(\mu) + \\ &+ \frac{2n-7}{n(n+1)-(n-4)(n-3)} P_{n-4}(\mu) + \dots + \frac{11}{n(n+1)-5 \cdot 6} P_5(\mu) + \\ &\quad + \frac{7}{n(n+1)-3 \cdot 4} P_3(\mu) + \frac{3}{n(n+1)-1 \cdot 2} P_1(\mu) \quad (n \text{ нечетно}). \end{aligned} \right\} \quad (7.4.6)$$

С помощью этих формул, а также (7.4.3), (7.4.4) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \ln x, \quad \psi_1 = \xi \ln x, \quad \psi_2 = \varphi_2 \ln x + \frac{1}{3} (x^2 + \xi^2), \\ \psi_3 &= \varphi_3 \ln x + \frac{3}{5} \xi (\xi^2 + x^2), \quad \psi_4 = \varphi_4 \ln x + \frac{3}{70} (x^2 + \xi^2) (19\xi^2 - 6x^2) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

2°. Полиномиальные решения, пропорциональные $\cos \varphi$. Выражение в цилиндрических координатах гармонических полиномов, пропорциональных $\cos \varphi$, имеет вид

$$R^n P_n^1(\mu) \cos \varphi = R^n \sin \vartheta \cos \varphi P_n^1(\mu) = x R^{n-1} P_n^1(\mu).$$

При обозначении

$$\varphi_n^1(x, \xi) = R^{n-1} P_n^1(\mu), \quad (7.4.8)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^1 &= 1, \quad \varphi_2^1 = 3\xi, \quad \varphi_3^1 = \frac{3}{2} (4\xi^2 - x^2), \\ \varphi_4^1 &= \frac{5}{2} \xi (4\xi^2 - 3x^2), \quad \varphi_5^1 = \frac{15}{8} (8\xi^4 - 12\xi^2 x^2 + x^4) \end{aligned} \right\} \quad (7.4.9)$$

и т. д., полиномиальные решения для сплошного цилиндра записываются в виде

$$\Phi_n^1 = x \varphi_n^1(x, \xi). \quad (7.4.10)$$

В случае полого цилиндра добавляются решения, имеющие особенности на оси z ; эти решения разыскиваются в виде

$$\Psi_n^1 = \psi_n^1(x, \xi) \cos \varphi, \quad \psi_n^1(x, \xi) = \frac{\varphi_n^1(x, \xi)}{x} + \rho_n^1(x, \xi) x \ln x + \vartheta_n^1(x, \xi) \quad (7.4.11)$$

по условию

$$\nabla^2 \Psi_n^1 = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{x^2} \right) \Psi_n^1 = \left(\nabla^2 - \frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{\Phi_n^1}{x} + \rho_n^1 x \ln x + \vartheta_n^1 \right) = 0. \quad (7.4.12)$$

Последовательно находим

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^1 &= \frac{1}{x}, & \psi_2^1 &= \frac{\Phi_2^1}{x}, & \psi_3^1 &= \frac{\Phi_3^1}{x} - 6x \ln x, & \psi_4^1 &= \frac{\Phi_4^1}{x} - 30\zeta x \ln x, \\ \psi_5^1 &= \frac{\Phi_5^1}{x} - 45 \left(2\zeta^2 - \frac{x^2}{2} \right) x \ln x - \frac{105}{8} x^3 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (7.4.13)$$

3°. В качестве примера рассмотрим цилиндр, нагруженный нормальными давлениями, линейно распределенными по его внешней и внутренней поверхностям:

$$\left. \begin{aligned} x=1: & \quad \sigma_r = -q_0 \zeta, \quad \tau_{rz} = 0, \\ x=x_1: & \quad \sigma_r = -q_1 \zeta, \quad \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.14)$$

Решение представляется через осесимметричные гармонические функции b_0, b_3 :

$$b_0 = A\varphi_3(x, \zeta) + B\psi_1(x, \zeta), \quad b_3 = C\varphi_2(x, \zeta) + D\psi_0(x, \zeta). \quad (7.4.15)$$

По (7.1.6), (7.4.2), (7.4.5) после определения постоянных по краевым условиям (7.4.14) найдем напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\zeta}{1-x_1^2} \left(q_0 \frac{x^2-x_1^2}{x^2} - q_1 x_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \right), \\ \sigma_\varphi &= -\frac{\zeta}{1-x_1^2} \left(q_0 \frac{x^2+x_1^2}{x^2} - q_1 x_1^2 \frac{x^2+1}{x^2} \right), \\ \tau_{rz} &= 0, \quad \sigma_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.16)$$

Это решение соответствует отсутствию загрузения торцов цилиндра; продифференцировав его по ζ , придем к решению (7.2.4) задачи Ляме (при замене q_0, q_1 на p_0, p_1).

Задание решения в форме (7.4.15) позволяет рассмотреть также случай нагружения боковых поверхностей касательными напряжениями постоянной интенсивности

$$x=1: \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = \tau_0; \quad x=x_1: \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = -\tau_1. \quad (7.4.17)$$

Напряжения оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 0, \quad \sigma_\varphi = 0, \\ \tau_{rz} &= \frac{\tau_0 + \tau_1 x}{1 - x_1^2} x - \frac{\tau_0 x_1^2 + \tau_1 x_1}{1 - x_1^2} \frac{1}{x}, \\ \sigma_z &= - \frac{2(\tau_0 + \tau_1 x_1)}{1 - x_1^2} \xi. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.18)$$

Это напряженное состояние осуществляется приближенно в удалении от торцов длинного цилиндра, на торце которого $\xi = 0$ отсутствуют нормальные напряжения, тогда как по торцу $\xi = L$ приложены сжимающие напряжения с равнодействующей

$$Z = -2\pi a l (\tau_0 + x_1 \tau_1)$$

[см. также (7.1.17)].

7.5. Кручение полого цилиндра силами, распределенными по торцу. Задача состоит в разыскании перемещения v из дифференциального уравнения (7.1.8) по краевым условиям на боковых поверхностях цилиндра

$$x = 1: \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{v}{x} = 0; \quad x = x_1: \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{v}{x} = 0 \quad (7.5.1)$$

и на его торцах

$$\xi = \pm L: \quad \frac{1}{G} \tau_{z\varphi} = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \xi} = f(x). \quad (7.5.2)$$

Предполагается, что распределение касательных напряжений на обоих торцах одинаково. Решение разыскивается в виде

$$\frac{v}{a} = \alpha x \xi + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\text{sh } \mu_s \xi}{\mu_s \text{ch } \mu_s L} g_s(x), \quad (7.5.3)$$

где α , μ_s — надлежащим образом определяемые постоянные. По (7.1.7)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{G} \tau_{r\varphi} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\text{sh } \mu_s \xi}{\mu_s \text{ch } \mu_s L} x \left(\frac{g_s(x)}{x} \right)', \\ \frac{1}{G} \tau_{z\varphi} &= \alpha x + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\text{ch } \mu_s \xi}{\text{ch } \mu_s L} g_s(x), \end{aligned} \right\} \quad (7.5.4)$$

и краевые условия (7.5.1), (7.5.2) приводят к требованиям

$$\left(\frac{g_s(x)}{x} \right)'_{x=1} = 0, \quad \left(\frac{g_s(x)}{x} \right)'_{x=x_1} = 0, \quad (7.5.5)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} g_s(x) = f(x) - \alpha x. \quad (7.5.6)$$

Функции $g_s(x)$ определяются по (7.1.8) из дифференциального уравнения Бесселя

$$g_s''(x) + \frac{1}{x} g_s'(x) + \left(\mu_s^2 - \frac{1}{x^2}\right) g_s(x) = 0,$$

общее решение которого представляется цилиндрической функцией

$$g_s(x) = Z_1(\mu_s x) = c_1^s J_1(\mu_s x) + c_2^s N_1(\mu_s x),$$

где J_1 , N_1 — бesselова и нейманнова функции первого порядка, причем по (7.5.5), используя известную формулу дифференцирования, имеем

$$\left. \begin{aligned} Z_2(\mu_s x_1) &= c_1^s J_2(\mu_s x_1) + c_2^s N_2(\mu_s x_1) = 0, \\ Z_2(\mu_s) &= c_1^s J_2(\mu_s) + c_2^s N_2(\mu_s) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.7)$$

Числа μ_s определяются корнями определителя этой системы

$$J_2(\mu_s x_1) N_2(\mu_s) - J_2(\mu_s) N_2(\mu_s x_1) = 0, \quad (7.5.8)$$

и выражение $g_s(x)$ представляется в виде

$$g_s(x) = C_s [J_1(\mu_s x) N_2(\mu_s) - N_1(\mu_s x) J_2(\mu_s)] = C_s Z_1(\mu_s x). \quad (7.5.9)$$

Задача сведена к определению постоянных C_s по условию (7.5.6). Постоянная α определяется по крутящему моменту

$$m_z = 2\pi a^3 \int_{x_1}^1 \tau_{z\varphi} x^2 dx = \frac{1}{2} \pi a^3 G (1 - x_1^4) \alpha, \quad (7.5.10)$$

так как остальные слагаемые, по (7.5.4) и (7.5.7), не влияют на выражение крутящего момента

$$\int_{x_1}^1 Z_1(\mu_s x) x^2 dx = \frac{1}{\mu_s} [x^2 Z_2(\mu_s x)] \Big|_{x_1}^1 = 0. \quad (7.5.11)$$

Ортогональность системы функций $\sqrt{x} Z_1(\mu_s x)$ легко проверяется; в известной формуле

$$\begin{aligned} (\mu_s^2 - \mu_k^2) \int Z_1(\mu_s x) Z_1(\mu_k x) x dx &= \\ &= \mu_k x Z_1(\mu_s x) Z_0(\mu_k x) - \mu_s x Z_1(\mu_k x) Z_0(\mu_s x) \end{aligned}$$

надо заменить $Z_0(\mu x)$ выражением

$$Z_0(\mu x) = \frac{2}{\mu x} Z_1(\mu x) - Z_2(\mu x)$$

и учесть (7.5.7). При $\mu_s \neq \mu_k$ получаем

$$\int_{x_1}^1 Z_1(\mu_s x) Z_1(\mu_k x) x dx = 0.$$

Вместе с тем

$$N_s^2 = \int_{x_1}^1 Z_1^2(\mu_s x) x dx = \frac{1}{2} [Z_1^2(\mu_s) - x_1^2 Z_1^2(\mu_s x_1)]. \quad (7.5.12)$$

Теперь из краевого условия (7.5.6), учитывая (7.5.11), получаем

$$C_s = \frac{1}{N_s^2} \int_{x_1}^1 f(x) Z_1(\mu_s x) x dx, \quad (7.5.13)$$

и решение задачи представляется в виде

$$\frac{v}{a} = \alpha x \zeta + \sum_{s=1}^{\infty} C_s \frac{\operatorname{sh} \mu_s \zeta}{\mu_s \operatorname{ch} \mu_s L} Z_1(\mu_s x), \quad (7.5.14)$$

где $Z_1(\mu_s x)$ определяется по (7.5.9). Таблица корней трансцендентного уравнения (7.5.8) для нескольких значений x_1 имеется в справочнике Янке и Эмде *).

Т а б л и ц а 4

x_1	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
$\frac{5}{6}$	15,807	31,466	47,157	62,857	78,560
$\frac{2}{3}$	6,474	12,665	18,916	25,182	31,456
$\frac{1}{2}$	3,407	6,428	9,523	12,640	15,767

В формуле (7.5.14) отсчет осевой координаты проводился от среднего сечения цилиндра; называя через ζ_1 осевую координату, отсчитываемую от «верхнего» торца, имеем $\zeta + \zeta_1 = L$, так что

$$\frac{\operatorname{sh} \mu_s \zeta}{\operatorname{ch} \mu_s L} = \operatorname{th} \mu_s L \operatorname{ch} \mu_s \zeta_1 - \operatorname{sh} \mu_s \zeta_1.$$

Даже для «кубообразного» цилиндра (с длиной, равной диаметру, $L = 1$) для значений μ_s , приведенных в табл. 4, $\operatorname{th} \mu_s L$ мало отличается от единицы, и поэтому

$$\frac{\operatorname{sh} \mu_s \zeta}{\operatorname{ch} \mu_s L} \approx e^{-\mu_s \zeta_1},$$

*) Э. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции (стр. 242), «Наука», 1964.

так что слагаемые ряда (7.5.14) экспоненциально убывают при удалении от торцов. Полученное решение, представляя эффект любого распределения напряжений $\tau_{z\varphi}$, статически эквивалентного крутящему моменту m_z , показывает, что влияние закона распределения этих напряжений экспоненциально убывает с возрастанием расстояния от торцов. Принцип Сен-Венана оправдывается здесь с большей точностью, чем можно было ожидать по общим оценкам п. 2.14.

Для сплошного цилиндра

$$\frac{v}{a} = \alpha x \xi + \sum_{s=1}^{\infty} C_s \frac{\operatorname{sh} \mu_s \xi}{\mu_s \operatorname{ch} \mu_s L} J_1(\mu_s x), \quad (7.5.15)$$

причем μ_s — корни уравнения $J_2(\mu) = 0$, равные

$$\mu_1 = 5,136; \mu_2 = 8,417; \mu_3 = 11,620; \mu_4 = 14,796$$

и т. д.; постоянные C_s определяются по формуле

$$C_s = \frac{1}{N_s^2} \int_0^1 f(x) J_1(\mu_s x) x dx, \quad N_s^2 = \frac{1}{2} J_1^2(\mu_s). \quad (7.5.16)$$

7.6. Решения в бесселевых функциях. В п. 7.1 показано, что функции Папковича — Нейбера, решающие задачи о равновесии упругого цилиндра при радиально-симметричной деформации, представляются гармоническими функциями

$$b_0(x, \xi), \quad b_3(x, \xi); \quad b_r(x, \xi) e^{i\varphi}, \quad b_\varphi(x, \xi) e^{i\varphi}. \quad (7.6.1)$$

В случае меридиональной деформации используются две из трех функций b_0, b_3, b_r ; функция b_φ , пропорциональная перемещению v , служит для решения задачи кручения.

Гармонические функции того же типа

$$q(x, \xi), \quad b_0(x, \xi) e^{i\varphi}, \quad b_3(x, \xi) e^{i\varphi}, \quad p(x, \xi) e^{2i\varphi} \quad (7.6.2)$$

применяются для решения задач об изгибе, причем использование всех четырех функций излишне.

В этом пункте даются представления гармонических функций

$$f_n(x, \xi) e^{in\varphi}$$

с помощью произведений вида

$$g_n(x) e^{\mu \xi + n i \varphi} \quad (n = 0, 1, 2), \quad (7.6.3)$$

обеспечивающего разделение переменных в уравнении Лапласа. Для определения $g_n(x)$ приходим к дифференциальному уравнению цилиндрических функций

$$g_n(x) + \frac{1}{x} g'_n(x) + \left(\mu^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) g_n(x) = 0. \quad (7.6.4)$$

Необходимость раздельного выполнения краевых условий на боковых поверхностях ($x = 1$, $x = x_1$) и на торцах ($\xi = -L$, $\xi = L$), по-видимому, делает невозможным решение задачи в «замкнутом» виде, иначе говоря, в форме рядов с коэффициентами, определяемыми конечным числом операций. Задача, исключая случай осесимметричного кручения, приводится к бесконечным системам линейных уравнений для этих коэффициентов; при надлежащем выборе исходных решений такие системы оказываются вполне регулярными (или регулярными), что допускает применение приемов приближенного определения неизвестных.

Этого трудного пути, допускающего в конечном счете получение численных результатов не из общих формул, а для определенного задания геометрических параметров и параметров нагружения, стараются избежать ценой тех или иных пренебрежений. В случае, когда длина цилиндра достаточно велика ($2L \gg 1$), можно, используя набор решений вида (7.6.3) при μ чисто мнимом, точно удовлетворить краевым условиям на боковых поверхностях и довольствоваться приближенным выполнением условий на торцах. Система сил, распределенных по торцам (наперед заданных, а также определяемых решениями первой группы), заменяется ей статически эквивалентной системой, для которой решение, оставляющее боковые поверхности свободными от нагружения, известно. Обычно эта цель достигается наложением решения задачи Сен-Венана (гл. VI); в последней краевые условия на торцах выполняются интегрально — строится решение, в котором главный вектор и главный момент распределенных по торцам сил имеют заданные значения, а боковая поверхность оказывается ненагруженной.

Этот способ решения задачи о длинном цилиндре обосновывается «принципом Сен-Венана» (п. 2.8 гл. IV), утверждающим, что так найденное напряженное состояние может отличаться от искомого лишь местными возмущениями напряженного состояния, убывающими при удалении от торцов*). Можно еще добавить, как уже говорилось, что практическая ценность «решений по Сен-Венану» определяется тем, что детали закона распределения напряжений чаще всего не могут быть учтены в задании.

Второй крайний случай — случай короткого цилиндра ($2L \ll 1$), то есть круглой (сплошной или кольцевой) плиты. Сказанное выше о случае длинного цилиндра здесь можно повторить «в обратном порядке»: строится путем использования

*) Это подтверждается, в частности, примером задачи кручения в п. 7.5; слагаемое $\alpha x \xi$ в выражении перемещения (7.5.14) представляет решение задачи Сен-Венана, а входящий в него ряд определяет местные возмущения напряженного состояния в окрестности торцов. См. также пп. 7.8, 7.9.

набора решений вида (7.6.3) при вещественном μ решение, в котором строго удовлетворяются условия нагружения торцов цилиндра; приходится довольствоваться выполнением «в среднем» краевых условий на боковых поверхностях (они могут быть разнообразными). Возникающие здесь вопросы в значительной мере связаны с теорией изгиба плит, не рассматриваемой в этой книге.

Наиболее труден случай «кубообразного» цилиндра с длиной, сравнимой с диаметром ($L \approx 1$). По-видимому, общего средства решения, отличного от приведения к бесконечным системам линейных уравнений, здесь нельзя предложить.

Далее мы останавливаемся только на задаче о «длинном» цилиндре, нагруженном по его боковым поверхностям. Торцы предполагаются ненагруженными.

При $\mu = i\beta$, где β вещественно, решение дифференциального уравнения

$$g_n''(x) + \frac{1}{x} g_n'(x) - \left(\beta^2 + \frac{n^2}{x^2} \right) g_n(x) = 0 \quad (7.6.5)$$

записывается в виде

$$g_n(x) = C_1^{(n)} I_n(\beta x) + C_2^{(n)} K_n(\beta x) \quad (n = 0, 1, 2). \quad (7.6.6)$$

Здесь $I_n(\beta x) = i^{-n} J_n(i\beta x)$ — бесселева функция от аргумента $i\beta x$; $K_n(\beta x)$ — функция Макдональда; последняя имеет особенность на оси цилиндра (при $x = 0$) и поэтому исключается при рассмотрении задач о сплошном цилиндре.

Ограничиваясь далее случаем аксиально-симметричной деформации, примем

$$b_r = g_1(x) \cos \beta \zeta, \quad b_0 = g_0(x) \cos \beta \zeta. \quad (7.6.7)$$

По (7.1.6) напряжения σ_r , τ_{rz} , после исключения из их выражений вторых производных с помощью уравнений (7.6.5), примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_r = & \left\{ \frac{1}{x} g_0'(x) - \beta^2 g_0(x) + (3 - 2\nu) g_1'(x) - \right. \\ & \left. - \left[\beta^2 + (1 - 2\nu) \frac{1}{x^2} \right] x g_1(x) \right\} \cos \beta \zeta, \\ \frac{1}{2G} \tau_{rz} = & [g_0'(x) + x g_1'(x) - (1 - 2\nu) g_1(x)] \beta \sin \beta \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (7.6.8)$$

При задании нагружения боковых поверхностей по закону

$$\left. \begin{aligned} x = 1: & \quad \sigma_r = -p \cos \beta \zeta, \quad \tau_{rz} = q \sin \beta \zeta, \\ x = x_1: & \quad \sigma_r = -p' \cos \beta \zeta, \quad \tau_{rz} = q' \sin \beta \zeta \end{aligned} \right\} \quad (7.6.9)$$

полагаем

$$\left. \begin{aligned} g_0(x) &= D_1 I_0(\beta x) + D_2 K_0(\beta x), \\ g_1(x) &= C_1 I_1(\beta x) + C_2 K_1(\beta x). \end{aligned} \right\} \quad (7.6.10)$$

С помощью формул дифференцирования (штрих обозначает дифференцирование по x)

$$I'_0(\beta x) = \beta I_1(\beta x), \quad I'_1(\beta x) = \beta I_0(\beta x) - \frac{1}{x} I_1(\beta x),$$

$$K'_0(\beta x) = -\beta K_1(\beta x), \quad K'_1(\beta x) = -\beta K_0(\beta x) - \frac{1}{x} K_1(\beta x)$$

для определения четырех постоянных D_i , C_i получаем четыре уравнения, не выписываемых здесь вследствие их громоздкости. Отметим лишь, что определитель этой системы в частном случае сплошного цилиндра ($x_1 = 0$) оказывается равным

$$\Delta(\beta) = \beta \psi(\beta), \quad \psi(\beta) = \beta^2 [I_0^2(\beta) - I_1^2(\beta)] - 2(1 - \nu) I_1^2(\beta). \quad (7.6.11)$$

Зная коэффициенты C_i , D_i , по формулам (7.1.5), (7.1.6) составляем выражения радиального и осевого перемещений и всех компонент тензора напряжений. Это решение обобщается на случай произвольного нагружения боковой поверхности цилиндра, симметричного относительно среднего сечения цилиндра ($\xi = 0$). Тогда σ_r четно, τ_{rz} нечетно относительно ξ и их крайние значения представимы тригонометрическими рядами

$$\left. \begin{aligned} x=1: \quad \sigma_r &= -p_0 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos \frac{k\pi\xi}{L}, & \tau_{rz} &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \frac{k\pi\xi}{L}, \\ x=x_1: \quad \sigma_r &= -p'_0 - \sum_{k=1}^{\infty} p'_k \cos \frac{k\pi\xi}{L}, & \tau_{rz} &= \sum_{k=1}^{\infty} q'_k \sin \frac{k\pi\xi}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6.12)$$

Решение для постоянных слагаемых $-p_0$, $-p'_0$ определяется по формулам задачи Ляме п. 7.2, а каждому члену рядов соответствует получаемое описанным выше способом решение, в котором β принимается равным $\frac{k\pi}{L}$.

Называя через Z осевое усилие в поперечном сечении цилиндра, имеем по (7.1.17)

$$\frac{dZ}{d\xi} = 2\pi a^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{x_1}^1 \sigma_z x dx = 2\pi a^2 [x_1 (\tau_{rz})_{x=x_1} - (\tau_{rz})_{x=1}]$$

и, поскольку σ_z , τ_{rz} пропорциональны $\cos \beta \xi$ и $\sin \beta \xi$, получаем

$$Z(\xi) = 2\pi a^2 L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} (q_k - x_1 q'_k) \cos \frac{k\pi\xi}{L} + 2\pi a^2 \nu \frac{p'_0 x_1^2 - p_0}{1 - x_1^2},$$

причем постоянное слагаемое вносится решением задачи Ляме. Осевые усилия на торцах оказываются равными

$$Z^* = 2\pi a^2 L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} (q_k - q'_k x_1) + 2\pi a^2 \nu \frac{p'_0 x_1^2 - p_0}{1 - x_1^2}, \quad (7.6.13)$$

и система сил, распределенных по торцам, может быть сделана статически эквивалентной нулю при нагружении торцов равномерно распределенными нормальными напряжениями интенсивности

$$\sigma_z^0 = -\frac{Z^*}{\pi a^2 (1 - x_1^2)}. \quad (7.6.14)$$

Так построенное решение определяет напряженное состояние в цилиндре длины $2aL$ с точностью до местного возмущения его в близости от торцов. Строго говоря, здесь дается решение задачи о бесконечно длинном цилиндре, по боковой поверхности которого распределена нагрузка, задаваемая периодическими функциями (7.6.12). Можно также использовать представление закона нагружения не рядом, а интегралом Фурье, продолжая произвольным образом задание этого закона вовне отрезка $-L \leq \xi \leq L$, например, принимая нагрузку равной нулю при $|\xi| > L$.

Точное решение требует удаления с торцов оставленных на них статически эквивалентных нулю систем сил. Выше указывалось на трудность этой задачи; далее рассматривается прием частичного выполнения этого требования с помощью «однородных решений».

Случай кососимметричного относительно среднего сечения цилиндра нагружения рассматривается аналогично; требуется заменить $\cos \beta \xi$, $\sin \beta \xi$ на $\sin \beta \xi$, $-\cos \beta \xi$ в формулах (7.6.7), (7.6.8). Общий случай нагружения можно рассмотреть наложением симметричного и кососимметричного нагружений.

7.7. Задача Файлона. Рассматривается нагружение сплошного цилиндра касательными усилиями постоянной интенсивности q , равномерно распределенными по двум участкам боковой поверхности

$$\xi_0 < \xi < \xi_0 + b, \quad -\xi_0 > \xi > -(\xi_0 + b).$$

Можно принять, что эта схема описывает загрузку испытуемого на растяжение цилиндрического образца, которому передается с помощью кольцевых захватов через заплечики (высоты ba) растягивающее усилие

$$P = 2\pi a^2 q b.$$

Распределение касательных напряжений по поверхностям, отделяющим заплечики от тела стержня, считается равномерным.

Краевые условия (7.6.12) теперь записываются в виде

$$x = 1: \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = \tau(\xi), \quad (7.7.1)$$

причем $\tau(\xi)$ — нечетная функция, задаваемая при $0 \leq \xi \leq L$ равенствами

$$\tau(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < \xi_0, \\ q, & \xi_0 < \xi < \xi_0 + b, \\ 0, & \xi_0 + b < \xi < L. \end{cases} \quad (7.7.2)$$

Коэффициенты ее разложения в ряд по синусам равны $\left(s_k = \frac{k\pi}{L}\right)$

$$q_k = \frac{2}{L} \int_0^L \tau(\xi) \sin s_k \xi \, d\xi = \frac{2q}{k\pi} [\cos s_k \xi_0 - \cos s_k (\xi_0 + b)].$$

Тогда, задавая в соответствии с (7.6.6), (7.6.7) функции b_r , b_0 тригонометрическими рядами

$$b_r = \sum_{k=1}^{\infty} C_k I_1(s_k x) \cos s_k \xi, \quad b_0 = \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_0(s_k x) \cos s_k \xi, \quad (7.7.3)$$

придем, записав краевые условия (7.7.1), к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} C_k \{ (3 - 2\nu) s_k I_0(s_k) - [4(1 - \nu) + s_k^2] I_1(s_k) \} + \\ + D_k s_k [I_1(s_k) - s_k I_0(s_k)] = 0, \\ C_k [s_k I_0(s_k) - 2(1 - \nu) I_1(s_k)] + D_k s_k I_1(s_k) = \frac{q_k}{2G s_k}, \\ k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.7.4)$$

определяющим неизвестные коэффициенты C_k , D_k . Зная b_r , b_0 , по (7.1.5), (7.1.6) составляем выражения напряжений и перемещений. Вместе с тем по (7.6.14)

$$\begin{aligned} \sigma_z^0 &= 2L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi} q_k = \frac{4qL}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \left[\cos \frac{k\pi \xi_0}{L} - \cos \frac{k\pi (\xi_0 + b)}{L} \right] = \\ &= \frac{qb}{L} (2\xi_0 + b), \end{aligned} \quad (7.7.5)$$

причем суммирование проведено с помощью ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\alpha}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Добавив это равномерно распределяемое по сечению цилиндра напряжение к напряжению σ_z , вычисляемому по полученному решению в форме тригонометрического ряда, придем к распределению напряжений

$$\sigma_z = \sigma_z^0 + \frac{2q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [\cos s_k \xi_0 - \cos s_k (\xi_0 + b)] S_z(x, s_k) \cos s_k \xi, \quad (7.7.6)$$

статически эквивалентному нулю на торцах $\xi = \pm L$ цилиндра. Через $S_z(x, \beta)$ обозначено выражение

$$S_z(x, \beta) = \frac{1}{\psi(\beta)} \{I_0(\beta x) [3\beta I_0(\beta) - 2(2 - \nu)I_1(\beta) - \beta^2 I_1(\beta)] + \\ + \beta x I_1(\beta x) [\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)]\}, \quad (7.7.7)$$

и при подстановке в (7.7.6) следует заменить β на $s_k = k\pi/L$.

В приводимой ниже таблице, вычисленной Файлоном для значений

$$L = \frac{\pi}{2}, \quad b = \xi_0 = \frac{L}{3} = \frac{\pi}{6},$$

приведены распределения нормальных напряжений σ_z в различных сечениях цилиндра. Через σ_m обозначено среднее значение $\frac{P}{\pi a^2} = 2qb$ при $\xi \leq \xi_0$; заметим, что при $\xi > \xi_0 + b$ среднее значение этого напряжения, конечно, равно нулю.

Таблица 5

Отношение σ_z/σ_m

ξ/L	$x=0$	$x=0,2$	$x=0,4$	$x=0,6$	$x=1$
0	0,689	0,719	0,810	0,962	1,117
0,1	0,673	0,700	0,786	0,937	1,163
0,2	0,631	0,652	0,720	0,859	1,334
0,3	0,582	0,594	0,637	0,737	2,022
0,4	0,539	0,545	0,565	0,617	1,368

В последней строке дается распределение напряжения σ_z в сечении, расположенном уже в загруженной части цилиндра. Из таблицы можно заключить, что распределение нормальных напряжений σ_z выравнивается при удалении от места загрузки. Но даже в среднем сечении ($\xi = 0$) эти напряжения изменяются в пределах от 69% до 112% от среднего значения. Это объясняется тем, что в рассмотренном случае цилиндр загружен по значительной части (1/3) его боковой поверхности; применение принципа Сен-Венана недопустимо.

7.8. Однородные решения. Ограничиваясь случаем аксиально-симметричной деформации сплошного цилиндра, рассмотрим при отсутствии загрузки боковой поверхности ($x = 1$) однородную систему линейных уравнений [см. (7.7.4)]

$$\left. \begin{aligned} C \{ (3 - 2\nu) \beta I_0(\beta) - [4(1 - \nu) + \beta^2] I_1(\beta) \} + \\ + D \beta [I_1(\beta) - \beta I_0(\beta)] = 0, \\ C [\beta I_0(\beta) - 2(1 - \nu) I_1(\beta)] + D \beta I_1(\beta) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.8.1)$$

определяющую коэффициенты C , D решений

$$b_r = C I_1(\beta x) e^{i\beta z}, \quad b_\theta = D I_0(\beta x) e^{i\beta z}. \quad (7.8.2)$$

Эта система может иметь ненулевые решения для значений β , обращающих в нуль ее определитель (7.6.11):

$$\psi(\beta) = \beta^2 [I_0^2(\beta) - I_1^2(\beta)] - 2(1 - \nu) I_1^2(\beta). \quad (7.8.3)$$

Представление $\psi(\beta)$ в форме степенного ряда можно получить, используя формулу для произведения бесселевых функций

$$I_m(\beta) I_n(\beta) = \left(\frac{1}{2}\beta\right)^{m+n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(m+n+2s)!}{s! (m+s)! (n+s)! (m+n+s)!} \left(\frac{1}{2}\beta\right)^{2s}.$$

Приходим к равенству

$$\psi(\beta) = \beta^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[1 - (1 - \nu) \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \right] \frac{(2s)!}{(s+1)! (s!)^3} \left(\frac{1}{2}\beta\right)^{2s}, \quad (7.8.4)$$

из которого следует, что для $\nu < 1/2$ величина в скобках положительна при всяком целом s ; поэтому $\psi(\beta)$ не имеет корней при вещественных β , исключая очевидный двойной нулевой

Т а б л и ц а 6

s	β_s	$I_0(\beta_s)$	$I_1(\beta_s)$
1	1,367 + 2,698i	-0,4695 + 0,7269i	-0,5453 + 0,7233i
2	1,558 + 6,060i	0,4853 - 0,5576i	0,4937 - 0,5794i
3	1,818 + 9,320i	-0,567 + 0,562i	-0,568 + 0,563i
s	$\lambda_s = \frac{I_0(\beta_s)}{I_1(\beta_s)}$	$\lambda_s \beta_s$	$\psi'(\beta_s)$
1	0,9528 - 0,0692i	1,489 + 2,476i	2,85 - 1,48i
2	0,9712 + 0,0102i	1,451 + 5,901i	8,22 - 0,84i
3	0,997 + 0,000i	1,812 + 9,29i	12,06 - 1,56i

корень. Она не имеет и чисто мнимых корней, в чем можно убедиться, положив $\beta = i\mu$ и группируя слагаемые ряда попарно; тогда окажется, что $\psi(i\mu) < 0$.

Таким образом, все корни функции $\psi(\beta)$ комплексные; но эта функция четна, а коэффициенты ее разложения (7.8.4) в ряд вещественны. Поэтому ее корни распадаются на четыре группы:

$$\beta_s = \gamma_s + i\delta_s, \quad \beta_s^* = -\gamma_s + i\delta_s, \quad \bar{\beta}_s = \gamma_s - i\delta_s, \quad \bar{\beta}_s^* = -\gamma_s - i\delta_s \quad (7.8.5)$$

$$(\gamma_s > 0, \delta_s > 0).$$

Значения первых трех корней, расположенных в первом квадранте плоскости β , приведены в таблице 6; в ней же приведены числовые значения некоторых функций от этих корней. Вычисление проведено для значения $\nu = 0,25$.

Поскольку уже $|\beta_3| = 9,496$, достаточную точность при $n > 3$ дают асимптотические формулы корней (с точностью до членов порядка $n^{-1} \ln n$)

$$\beta_n \sim n\pi i + \frac{1}{2} \ln 4n\pi - i \left\{ \frac{\ln 4n\pi}{4n\pi} - \frac{1}{2n\pi} \left[\frac{1}{4} - 2(1-\nu) \right] \right\} \quad (7.8.6)$$

и функций от них

$$\left. \begin{aligned} I_0(\beta_n) &\sim \frac{e^{\beta_n}}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \left\{ 1 - \frac{1}{8\beta_n} + \left[\frac{5}{128} + \frac{1}{2}(1-\nu) \right] \frac{1}{\beta_n^2} \right\}, \\ I_1(\beta_n) &\sim \frac{e^{\beta_n}}{\sqrt{2\pi\beta_n}} \left\{ 1 - \frac{1}{8\beta_n} + \left[\frac{5}{128} - \frac{1}{2}(1-\nu) \right] \frac{1}{\beta_n^2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (7.8.7)$$

$$\lambda_n \sim 1 + \frac{1-\nu}{\beta_n^2}, \quad \psi'(\beta_n) \sim 2\beta_n I_1^2(\beta_n) \left(1 - \frac{2(1-\nu)}{\beta_n} \right). \quad (7.8.8)$$

Заметим еще, что при принятом обозначении

$$\lambda = \frac{I_0(\beta)}{I_1(\beta)} \quad (7.8.9)$$

уравнение (7.8.3) записывается в виде

$$\beta^2(\lambda^2 - 1) = 2(1-\nu). \quad (7.8.10)$$

Возвращаясь к уравнениям (7.8.1), находим зависимость между постоянными C , D , соответствующими корню β_s :

$$D^{(s)} = \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_s} - \lambda_s \right] C^{(s)} = [\beta_s(\lambda_s^2 - 1) - \lambda_s] C^{(s)}.$$

Постоянные $C^{(s)}$ остаются неопределенными. Далее вводится обозначение

$$C^{(s)} = \frac{L_s}{\beta_s I_1(\beta_s)} = \frac{M_s + iN_s}{\beta_s I_1(\beta_s)},$$

позволяющее записать выражения перемещений для каждого корня в виде

$$u_s = L_s u_s(x, \beta_s) e^{i\beta_s \xi}, \quad w_s = L_s w_s(x, \beta_s) e^{i\beta_s \xi}, \quad (7.8.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} u_s(x, \beta_s) &= \frac{1}{\beta_s I_1(\beta_s)} \{ -\beta_s x I_0(\beta_s x) + [2(1-\nu) + \lambda_s \beta_s] I_1(\beta_s x) \}, \\ \frac{1}{a} w_s(x, \beta_s) &= -\frac{i}{\beta_s I_1(\beta_s)} \{ \beta_s x I_1(\beta_s x) + [2(1-\nu) - \lambda_s \beta_s] I_0(\beta_s x) \}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8.12)$$

В этой же форме записываются напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_r^s}{2G} &= L_s \sigma_r^s(x, \beta_s) e^{i\beta_s \xi}, & \frac{\sigma_\varphi^s}{2G} &= L_s \sigma_\varphi^s(x, \beta_s) e^{i\beta_s \xi}, \\ \frac{\sigma_z^s}{2G} &= L_s \sigma_z^s(x, \beta_s) e^{i\beta_s \xi}, & \frac{\tau_{rz}^s}{2G} &= L_s \tau_{rz}^s(x, \beta_s) e^{i\beta_s \xi}, \end{aligned} \right\} \quad (7.8.13)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} I_1(\beta_s) \sigma_r^s(x, \beta_s) &= I_0(\beta_s x) (1 + \beta_s \lambda_s) - \\ &\quad - \frac{I_1(\beta_s x)}{\beta_s x} [2(1-\nu) + \beta_s \lambda_s + \beta_s^2 x^2], \\ I_1(\beta_s) \sigma_\varphi^s(x, \beta_s) &= -(1-2\nu) I_0(\beta_s x) + \frac{I_1(\beta_s x)}{\beta_s x} [2(1-\nu) + \beta_s \lambda_s], \\ I_1(\beta_s) \sigma_z^s(x, \beta_s) &= (2 - \beta_s \lambda_s) I_0(\beta_s x) + \beta_s x I_1(\beta_s x), \\ I_1(\beta_s) \tau_{rz}^s(x, \beta_s) &= -i [\beta_s x I_0(\beta_s x) - \beta_s \lambda_s I_1(\beta_s x)], \end{aligned} \right\} \quad (7.8.14)$$

и легко непосредственно проверить, сославшись на (7.8.9), (7.8.10), что комплексные функции $\sigma_r^s(x, \beta_s)$, $\tau_{rz}^s(x, \beta_s)$ обращаются в нуль на поверхности цилиндра $x = 1$. Конечно, равны нулю и их вещественные и мнимые части (обозначаемые индексами r, t сверху).

Таким образом, построена система «однородных решений» уравнений равновесия упругого цилиндра — решений, оставляющих его поверхность $x = 1$ свободной от нагружения. Система напряжений, вычисляемых по этим решениям, в любом поперечном сечении цилиндра статически эквивалентна нулю. Это сразу же следует из соображений статики и легко подтверждается вычислением

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sigma_z^s(x, \beta_s) x dx &= \\ &= \frac{1}{I_1(\beta_s)} \left[(2 - \beta_s \lambda_s) \int_0^1 I_0(\beta_s x) x dx + \beta_s \int_0^1 I_1(\beta_s x) x^2 dx \right] = 0, \end{aligned}$$

что следует из (7.8.9) и из соотношений

$$\int x^n I_{n-1}(x) dx = x^n I_n(x), \quad I_2(x) = I_0(x) - \frac{2I_1(x)}{x}.$$

Отделив в (7.8.11) вещественную часть, получим

$$\left. \begin{aligned} u_s^r &= \{ M_s [u^{(s,r)} \cos \gamma_s \xi - u^{(s,l)} \sin \gamma_s \xi] - \\ &\quad - N_s [u^{(s,r)} \sin \gamma_s \xi + u^{(s,l)} \cos \gamma_s \xi] \} e^{-\delta_s \xi}, \\ w_s^r &= \{ M_s [w^{(s,r)} \cos \gamma_s \xi - w^{(s,l)} \sin \gamma_s \xi] - \\ &\quad - N_s [w^{(s,r)} \sin \gamma_s \xi + w^{(s,l)} \cos \gamma_s \xi] \} e^{-\delta_s \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8.15)$$

Выражения, отличающиеся только перестановкой и знаком постоянных, получили бы, взяв мнимую часть u_s , w_s . Таким образом, для каждого корня β_s в первом квадранте плоскости β имеем два частных однородных решения, соответствующих независимым постоянным M_s , N_s . Наличие в выражениях (7.8.15) множителя $e^{-\delta_s \xi}$ указывает, что эти решения экспоненциально затухают от края цилиндра $\xi = 0$. Быстрота затухания возрастает с номером решения: $\delta_1 = 2,698$ и уже $\delta_3 = 9,320$. Решения, затухающие от края $\xi = L$, получим, заменив в (7.8.11) (7.8.13) множитель $e^{i\beta_s \xi}$ на $e^{i\beta_s \xi_1}$, $\xi_1 = L - \xi$ (и изменив знаки w и τ_{rz}). Использование корней, расположенных в других квадрантах плоскости β , не приведет к решениям, отличным от указанных; для каждого β_s получаем, таким образом, четыре независимых частных решения, из них два затухают при удалении от торца $\xi = 0$ и два — от торца $\xi_1 = 0$.

7.9. Краевые условия на торцах. Введенные в п. 7.8 однородные решения могут быть использованы для приближенного выполнения краевых условий на торцах цилиндра, так как наложение их не вносит никаких изменений в условия нагружения боковой поверхности цилиндра.

Можно ограничиться рассмотрением полубесконечного цилиндра, так как следует предположить, что искажение напряженного состояния, вносимое невыполнением краевых условий на одном из торцов, будет пренебрежимо малым в области, прилегающей к другому торцу. Допустимость такого предположения даже для «кубообразного» цилиндра ($L \approx 2$) оправдывается экспоненциальной быстротой затухания однородных решений.

Выражения s -й пары вещественных однородных решений для нормального и касательного напряжений на торце $\xi = 0$ будут

$$M_s \sigma_z^{(s,r)} - N_s \sigma_z^{(s,l)}, \quad M_s \tau_{rz}^{(s,r)} - N_s \tau_{rz}^{(s,l)}, \quad (7.9.1)$$

где, как говорилось, $\sigma_z^{(s,r)}$, $\tau_{rz}^{(s,r)}$ — вещественные, $\sigma_z^{(s,l)}$, $\tau_{rz}^{(s,l)}$ — мнимые части функций $\sigma_z^s(x, s)$, $\tau_{rz}^s(x, s)$, определяемых по формулам (7.8.14).

Крайевые условия на торце $\xi = 0$ запишем в виде

$$\xi = 0: \quad \sigma_z = F(x), \quad \tau_{rz} = -\Phi(x), \quad (7.9.2)$$

где функции $F(x)$, $\Phi(x)$ задаются законом нагружения торца, причем $F(x) > 0$ при растяжении, а $\Phi(x) > 0$, если касательные нагрузки направлены в сторону возрастания x . Распределение нормальных нагрузок на торце предполагается статически эквивалентным нулю:

$$\int_0^1 x F(x) dx = 0, \quad (7.9.3)$$

так как удаление растягивающей силы Z (главного вектора-распределения нормальных напряжений) требует лишь наложения элементарного решения $\sigma_z = Z/\pi a^2$.

Итак, задача сводится к одновременному представлению двух заданных функций рядами вида

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} [M_s \sigma_z^{(s,r)} - N_s \sigma_z^{(s,l)}], \\ \Phi(x) &= - \sum_{s=1}^{\infty} [M_s \tau_{rz}^{(s,r)} - N_s \tau_{rz}^{(s,l)}]. \end{aligned} \right\} \quad (7.9.4)$$

Ограничиваясь приближенным решением, сохраним в правых частях (7.9.4) конечное число n слагаемых и введем в рассмотрение квадратичное отклонение по площади

$$\begin{aligned} \Psi(M_1, M_2, \dots, M_n; N_1, N_2, \dots, N_n) &= \\ &= \int_0^1 \left\{ \left[F(x) - \sum_{s=1}^n (M_s \sigma_z^{(s,r)} - N_s \sigma_z^{(s,l)}) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\Phi(x) + \sum_{s=1}^n (M_s \tau_{rz}^{(s,r)} - N_s \tau_{rz}^{(s,l)}) \right]^2 \right\} x dx. \end{aligned} \quad (7.9.5)$$

Коэффициенты M_s , N_s определяются по условию минимума квадратичного отклонения; это приводит к системе $2n$ линейных уравнений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial M_k} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial N_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.9.6)$$

или, в развернутом виде,

$$\sum_{s=1}^n (A_{sk} M_s + B_{sk} N_s) = \varphi_k, \quad \sum_{s=1}^n (B_{sk} M_s + C_{sk} N_s) = \psi_k, \quad (7.9.7)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} A_{sk} &= \int_0^1 (\sigma_z^{(s,r)} \sigma_z^{(k,r)} + \tau_{rz}^{(s,r)} \tau_{rz}^{(k,r)}) x dx = A_{ks}, \\ B_{sk} &= - \int_0^1 (\sigma_z^{(s,i)} \sigma_z^{(k,r)} + \tau_{rz}^{(s,i)} \tau_{rz}^{(k,r)}) x dx, \\ C_{sk} &= \int_0^1 (\sigma_z^{(s,i)} \sigma_z^{(k,i)} + \tau_{rz}^{(s,i)} \tau_{rz}^{(k,i)}) x dx = C_{ks} \end{aligned} \right\} \quad (7.9.8)$$

и

$$\varphi_k - i\psi_k = \int_0^1 [F(x) \sigma_z^k(x, \beta_k) - \Phi(x) \tau_{rz}^k(x, \beta_k)] x dx. \quad (7.9.9)$$

Коэффициенты A_{sk} , B_{sk} , C_{sk} вычисляются (для фиксированного коэффициента Пуассона ν) один раз навсегда. Они представляются в виде ($\nu = 1/4$)

$$\left. \begin{aligned} A_{sk} - iB_{sk} &= \frac{1}{2} [J_+(\beta_s, \beta_k) + J_-(\beta_s, \bar{\beta}_k)], \\ C_{sk} + iB_{sk} &= \frac{1}{2} [-J_+(\beta_s, \beta_k) + J_-(\bar{\beta}_s, \beta_k)], \end{aligned} \right\} \quad (7.9.10)$$

и вычисление приводит к следующим значениям величин J_+ и J_- :

$$\left. \begin{aligned} J_+(\beta_s, \beta_k) &= \frac{4}{(\beta_s - \beta_k)^2} \left[\frac{3}{4} - \frac{\beta_s \beta_k (\beta_s \lambda_k - \beta_k \lambda_s)}{\beta_s^2 - \beta_k^2} \right], \\ J_-(\beta_s, \beta_k) &= \frac{4}{(\beta_s + \beta_k)^2} \left[-\frac{3}{4} + \frac{\beta_s \beta_k (\beta_s \lambda_k - \beta_k \lambda_s)}{\beta_s^2 - \beta_k^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.9.11)$$

и при $s = k$

$$\left. \begin{aligned} J_+(\beta_s, \beta_s) &= -\frac{2}{3} \beta_s \lambda_s + 2,667 - 4,5 \frac{\lambda_s}{\beta_s} + \frac{5,25}{\beta_s^2}, \\ J_-(\beta_s, \beta_s) &= 1 - \frac{3}{2} \frac{\beta_s}{\lambda_s} + \frac{3}{\beta_s^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9.12)$$

Для $n = 2$ вычисления с помощью чисел в табл. 6 дает систему четырех уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1,077M_1 - 0,2571M_2 + 0,401N_1 - 0,05085N_2 &= \varphi_1, \\ -0,2571M_1 + 3,051M_2 - 0,525N_1 + 1,662N_2 &= \varphi_2, \\ 0,401M_1 - 0,525M_2 + 0,2915N_1 - 0,2678N_2 &= \psi_1, \\ -0,05085M_1 + 1,662M_2 - 0,2678N_2 + 1,650N_2 &= \psi_2, \end{aligned} \right\} \quad (7.9.13)$$

решение которой будет

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 2,391\varphi_1 - 0,4256\varphi_2 - 4,222\psi_1 - 0,1829\psi_2, \\ M_2 &= -0,4256\varphi_1 + 0,9730\varphi_2 + 1,675\psi_1 - 0,7215\psi_2, \\ N_1 &= -4,222\varphi_1 + 1,675\varphi_2 + 12,44\psi_1 + 0,2018\psi_2, \\ N_2 &= -0,1829\varphi_1 - 0,7215\varphi_2 + 0,2018\psi_1 + 1,360\psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.9.14)$$

Определив по этим формулам коэффициенты M_s , N_s по значениям φ_s , ψ_s для рассматриваемой задачи, найдем для $s = 1, 2$ вещественные однородные решения по формулам (7.8.14). Численные значения функций $I_0(\beta_s x)$, $I_1(\beta_s x)$ и вычисленные по ним величины напряжений и перемещений

$$\sigma_r^{(s,r)} + i\sigma_r^{(s,i)}, \quad \tau_{rz}^{(s,r)} + i\tau_{rz}^{(s,i)} \quad \text{и т. д.}$$

представлены в таблицах 7, 8, 9, 10.

Т а б л и ц а 7

x	$I_0(\beta_1 x)$	$I_1(\beta_1 x)$	$I_0(\beta_2 x)$	$I_1(\beta_2 x)$
0	1	0	0	0
0,2	0,9452 + 0,01780i	0,1230 + 0,2675i	0,6776 + 0,1584i	0,0794 + 0,5193i
0,3	0,8752 + 0,1551i	0,1600 + 0,3960i	0,331 + 0,280i	0,0040 + 0,627i
0,6	0,4760 + 0,5078i	0,0785 + 0,7162i	-0,589 + 0,0727i	-0,439 + 0,0599i
0,8	0,04951 + 0,7017i	-0,1704 + 0,8090i	-0,3618 - 0,4973i	-0,2326 - 0,5937i
1,0	-0,4695 + 0,7269i	-0,5453 + 0,7233i	0,4853 - 0,5576i	0,4937 - 0,5794i

Т а б л и ц а 8

x	$\sigma_r^{(1,r)} + i\sigma_r^{(1,i)}$	$\sigma_r^{(2,r)} + i\sigma_r^{(2,i)}$	$\sigma_\varphi^{(1,r)} + i\sigma_\varphi^{(1,i)}$	$\sigma_\varphi^{(2,r)} + i\sigma_\varphi^{(2,i)}$
0	0,4302 - 1,699i	-2,119 + 2,490i	0,4302 - 1,699 i	-2,119 + 3,490i
0,2	0,403 - 1,517i	-1,247 + 1,658i	0,4571 - 1,638 i	-1,959 + 2,784i
0,3	0,368 - 1,309i	-0,34 - 0,02 i	0,485 - 1,562 i	-1,75 + 2,024i
0,6	0,172 - 0,485i	1,58 - 2,233i	0,6053 - 1,185 i	-0,602 - 0,244i
0,8	0,014 - 0,081i	0,721 - 0,746i	0,676 - 0,843 i	0,2103 - 0,6687i
1,0	0	0	0,7004 - 0,4769i	0,5456 - 0,2271i

Т а б л и ц а 9

x	$u_z^{(1, r)} + i u_z^{(1, i)}$	$u_z^{(2, r)} + i u_z^{(2, i)}$	$\tau_{rz}^{(1, r)} + i \tau_{rz}^{(1, i)}$	$\tau_{rz}^{(2, r)} + i \tau_{rz}^{(2, i)}$
0	$-2,522 + 1,195i$	$6,369 - 4,479i$	0	0
0,2	$-2,273 + 0,952i$	$4,252 - 2,410i$	$-0,5007 + 0,6171i$	$2,669 - 2,880i$
0,3	$-1,966 + 0,685i$	$2,092 - 0,581i$	$-0,7186 + 0,8357i$	$3,17 - 3,04 i$
0,6	$-0,450 - 0,221i$	$-2,42 + 1,17 i$	$-1,030 + 0,8790i$	$0,54 + 0,28 i$
0,8	$0,776 - 0,351i$	$-0,456 - 0,551i$	$-0,7628 + 0,4486i$	$-1,325 + 0,889i$
1,0	$1,681 + 0,303i$	$2,151 + 0,335i$	0	0

Т а б л и ц а 10

x	$u^{(1, r)} + i u^{(1, i)}$	$u^{(2, r)} + i u^{(2, i)}$	$w^{(1, r)} + i w^{(1, i)}$	$w^{(2, r)} + i w^{(2, i)}$
0	0	0	$0,8906 - 0,1552i$	$-1,118 + 0,5443i$
0,2	$0,1478 - 0,2394i$	$-0,4335 + 0,4759i$	$0,7953 - 0,1139i$	$-0,7377 + 0,2753i$
0,3	$0,2124 - 0,3376i$	$-0,524 + 0,522 i$	$0,6819 - 0,0707i$	$0,1756 + 0,0306i$
0,6	$0,3240 - 0,4836i$	$-0,190 + 0,011 i$	$-0,358 + 0,051 i$	$0,388 - 0,137 i$
0,8	$0,3059 - 0,4706i$	$0,0927 - 0,2208i$	$-0,1568 - 0,0441i$	$0,0794 + 0,0462i$
1,0	$0,2241 - 0,4422i$	$0,0600 - 0,2322i$	$-0,3050 - 0,2799i$	$-0,2448 - 0,1173i$

7.10. Обобщенная ортогональность. Трудность выполнения краевых условий на торцах цилиндра состоит в необходимости одновременного представления двух независимых функций рядами вида (7.9.4) по неортогональной системе решений, оставляющих боковую поверхность цилиндра ($x = 1$) свободной от нагружения («однородных решений»).

Эти решения обладают, однако, некоторым свойством «обобщенной ортогональности». Его можно использовать для точного выполнения одного из краевых условий, причем сохраняется произвол, допускающий возможность приближенного выполнения второго условия.

В рассмотрение вводятся функции

$$\left. \begin{aligned} \rho_s &= \rho(\beta_s x) = \beta_s (\lambda_s^2 - 1) I_0(\beta_s x), \\ \epsilon_s &= \epsilon(\beta_s x) = \frac{1}{\beta_s} [\beta_s x I_1(\beta_s x) - \beta_s \lambda_s I_0(\beta_s x)] \end{aligned} \right\} \quad (7.10.1)$$

и их производные по аргументу $\beta_s x$

$$\left. \begin{aligned} \rho'_s &= \rho'(\beta_s x) = \beta_s (\lambda_s^2 - 1) I_1(\beta_s x), \\ \epsilon'_s &= \epsilon'(\beta_s x) = \frac{1}{\beta_s} [\beta_s x I_0(\beta_s x) - \beta_s \lambda_s I_1(\beta_s x)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.10.2)$$

Здесь, как и ранее, β_s — корни трансцендентного уравнения

$$2(1 - \nu) = \beta_s (\lambda_s^2 - 1), \quad \lambda_s = \frac{I_0(\beta_s)}{I_1(\beta_s)}. \quad (7.10.3)$$

Однородные решения задачи о цилиндре (оставляющие его поверхность свободной от нагружения) в этих обозначениях представляются рядами

$$\left. \begin{aligned} u(x, \xi) &= a \sum_s \frac{C_s}{\beta_s} (\rho'_s - \epsilon'_s) \cos \beta_s \xi, \\ w(x, \xi) &= a \sum_s \frac{C_s}{\beta_s} (\rho_s + \epsilon_s) \sin \beta_s \xi, \end{aligned} \right\} \quad (7.10.4)$$

причем каждому корню $s = 1, 2, \dots$ соответствуют четыре слагаемых для значений (7.8.5) корня β_s . Ряды (7.10.4) при надлежащем выборе постоянных C_s дают представления вещественных функций.

Вычисляемые по (7.10.4) напряжения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -2G \sum_s C_s \left(\epsilon_s + \frac{\rho'_s - \epsilon'_s}{\beta_s x} \right) \cos \beta_s \xi, \\ \tau_{rz} &= 2G \sum_s C_s \epsilon'_s \sin \beta_s \xi, \\ \sigma_\varphi &= 2G \sum_s C_s \left(\frac{\nu \rho_s}{1-\nu} + \frac{\rho'_s - \epsilon'_s}{\beta_s x} \right) \cos \beta_s \xi, \\ \sigma_z &= 2G \sum_s C_s \left(\epsilon_s + \frac{\rho_s}{1-\nu} \right) \cos \beta_s \xi. \end{aligned} \right\} \quad (7.10.5)$$

Введенные функции ϵ'_s, ρ'_s обладают свойством обобщенной ортогональности (П. А. Шифф, 1883):

$$\int_0^1 (\epsilon'_k \rho'_s + \epsilon'_s \rho'_k) x dx = 0 \quad (s \neq k). \quad (7.10.6)$$

Это проверяется непосредственным вычислением. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x (\epsilon'_k \rho'_s + \epsilon'_s \rho'_k) dx &= \int_0^1 \{ x^2 [\beta_s (\lambda_s^2 - 1) I_0(\beta_k x) I_1(\beta_s x) + \\ &\quad + \beta_k (\lambda_k^2 - 1) I_0(\beta_s x) I_1(\beta_k x)] - \\ &\quad - x [\lambda_k \beta_s (\lambda_s^2 - 1) + \lambda_s \beta_k (\lambda_k^2 - 1)] I_1(\beta_k x) I_1(\beta_s x) \} dx. \end{aligned}$$

Входящие сюда интегралы вычисляются по формулам

$$\int_0^1 I_1(\beta_s x) I_1(\beta_k x) x dx = \begin{cases} I_1(\beta_s) I_1(\beta_k) \frac{\beta_s \lambda_s - \beta_k \lambda_k}{\beta_s^2 - \beta_k^2} & (s \neq k), \\ \frac{1}{2} [I_1^2(\beta_s) - I_0^2(\beta_s)] + \frac{1}{\beta_s} I_0(\beta_s) I_1(\beta_s) & (s = k), \end{cases} \quad (7.10.7)$$

$$\int_0^1 x^2 I_0(\beta_s x) I_1(\beta_k x) dx = \begin{cases} \frac{I_1(\beta_s) I_1(\beta_k)}{\beta_s^2 - \beta_k^2} \left[\beta_s - \beta_k \lambda_s \lambda_k + 2\beta_k \frac{\beta_s \lambda_k - \beta_k \lambda_s}{\beta_s^2 - \beta_k^2} \right] & (s \neq k), \\ \frac{1}{2\beta_s} I_1^2(\beta_s) & (s = k), \end{cases} \quad (7.10.8)$$

и в сказанном можно убедиться подстановкой в (7.10.6). Вместе с тем

$$2 \int_0^1 \rho'_k e'_k x dx = N_k = I_1^2(\beta_k) (\lambda_k^2 - 1) [1 + \beta_k \lambda_k (\lambda_k^2 - 1) - 2\lambda_k^2]. \quad (7.10.9)$$

П. А. Шифф и позже П. Ф. Папкович (1941) указали на возможность одновременного представления двух независимо задаваемых функций $F_1(x)$, $F_2(x)$ в форме рядов по функциям, обладающим свойством обобщенной ортогональности. В применении к функциям e'_s , ρ'_s эти представления записываются в виде

$$F_1(x) = \sum_s D_s e'_s, \quad F_2(x) = \sum_s D_s \rho'_s. \quad (7.10.10)$$

Одинаковые коэффициенты D_s этих рядов определяются с помощью свойства обобщенной ортогональности

$$\int_0^1 [\rho'_k F_1(x) + e'_k F_2(x)] x dx = \sum_s D_s \int_0^1 (\rho'_k e'_s + e'_k \rho'_s) x dx = D_k N_k. \quad (7.10.11)$$

Например, положив $F_2(x) = 0$, имеем

$$N_s D_s = \int_0^1 \rho'_s F_1(x) x dx, \quad F_1(x) = \sum_s D_s e'_s, \quad \sum_s D_s \rho'_s = 0$$

— получили представление нуля в виде ряда по функциям ρ'_s с коэффициентами D_s , вычисляемыми по произвольно заданной функции $F_1(x)$ *).

Функция $2GF_1(x)$ может быть принята равной заданному на торце $\xi = L$ касательному напряжению $(\tau_{xz})_{\xi=L}$:

$$(\tau_{xz})_{\xi=L} = 2G \sum_s C_s \epsilon'_s \sin \beta_s L = 2GF_1(x). \quad (7.10.12)$$

Тогда по (7.10.11)

$$C_s = \frac{1}{N_s \sin \beta_s L} \int_0^1 [\rho'_s F_1(x) + \epsilon'_s F_2(x)] x dx. \quad (7.10.13)$$

Произвол в задании функции $F_2(x)$ может быть использован для приближенного выполнения еще одного краевого условия. Так, если задать $F_2(x)$ в виде

$$F_2(x) = \sum_{k=1}^n a_k \Phi_k(x), \quad (7.10.14)$$

то коэффициенты C_r окажутся линейными функциями параметров a_k :

$$C_r = \frac{1}{N_r \sin \beta_r L} \left[\int_0^1 x \rho'_r F_1(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k \int_0^1 x \epsilon'_r \Phi_k(x) dx \right]. \quad (7.10.15)$$

Эти параметры можно определить, например, по условию минимума квадратичного отклонения заданного на торце $\xi = L$ нормального напряжения σ_z от его требуемого значения (7.10.5):

$$\Psi(a_1, a_2, \dots, a_n) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[\left(\frac{\sigma_z}{2G} \right)_{\xi=L} - \sum_s C_s \left(\epsilon_s + \frac{\rho_s}{1-\nu} \right) \cos \beta_s L \right]^2 dx = \text{Min}. \quad (7.10.16)$$

Приходим к системе n линейных уравнений ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial a_k} = - \int_0^1 \left\{ x \left[\left(\frac{\sigma_z}{2G} \right)_{\xi=L} - \sum_s C_s \left(\epsilon_s + \frac{\rho_s}{1-\nu} \right) \cos \beta_s L \right] \times \right. \\ \left. \times \sum_r \frac{\partial C_r}{\partial a_k} \left(\epsilon_r + \frac{\rho_r}{1-\nu} \right) \cos \beta_r L \right\} dx = 0. \end{aligned} \quad (7.10.17)$$

Например, приняв

$$F_2(x) = a_1 x + a_2 x^3 + \dots + a_n x^{2n-1}, \quad \Phi_k(x) = x^{2k-1},$$

*) Изучению свойств сходимости рядов и установлению классов функций $F_1(x)$, $F_2(x)$, для которых возможны совокупные представления вида (7.10.10) по обобщенно ортогональным функциям, посвящено (применительно к задаче изгиба плит) исследование Г. А. Гринберга (1951).

имеем

$$N_r \sin \beta_r L \frac{\partial C_r}{\partial a_k} = \int_0^1 t^{2k} \epsilon'_r dt = \int_0^1 t^{2k} [t I_0(\beta_r t) - \lambda_r I_1(\beta_r t)] dt.$$

Входящие сюда интегралы вычисляются с помощью формул приведения

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x t^{2k+1} I_0(t) dt &= x^{2k+1} I_1(x) - 2kx^{2k} I_0(x) + 4k^2 \int_0^x t^{2k-1} I_0(t) dt, \\ \int_0^x t^{2k} I_1(t) dt &= \\ &= x^{2k} I_0(x) - 2kx^{2k-1} I_1(x) + 4k(k-1) \int_0^x t^{2k-2} I_1(t) dt, \\ \int_0^x x I_0(t) dt &= x I_1(x), \quad \int_0^x I_1(t) dt = I_0(x) - 1. \end{aligned} \right\} (7.10.18)$$

Напомним, что только статически эквивалентные нулю системы напряжений σ_z представимы в виде (7.10.5):

$$\int_0^1 x \sigma_z dx = 0, \quad \int_0^1 x \left(\epsilon_s + \frac{\rho_s}{1-\nu} \right) dx = 0.$$

В случае цилиндра, растянутого осевыми сосредоточенными силами Q , надо принять

$$\xi = \pm L: \quad \sigma_z = -\frac{Q}{\pi a^2} + \begin{cases} \frac{Q}{\pi a^2 \rho^2}, & x < \rho, \\ 0, & x > \rho, \end{cases} \quad \rho \rightarrow 0, \quad \tau_{rz}|_{\xi=L} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sigma_z|_{\xi=L} \left(\epsilon_r + \frac{\rho_r}{1-\nu} \right) x dx &= \frac{Q}{\pi a^2} \left[\frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \left(\epsilon_r + \frac{\rho_r}{1-\nu} \right) x dx \right]_{\rho \rightarrow 0} = \\ &= \frac{Q}{2\pi a^2 \beta_r} (2 - \lambda_r \beta_r), \end{aligned}$$

и система линейных уравнений (7.10.17) приведет к виду ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \sum_s \sum_r C_s \frac{\partial C_r}{\partial a_k} \cos \beta_s L \cos \beta_r L \int_0^1 x dx \left(\epsilon_r + \frac{\rho_r}{1-\nu} \right) \left(\epsilon_s + \frac{\rho_s}{1-\nu} \right) = \\ = \frac{Q}{4\pi G a^2} \sum_r \frac{1}{\beta_r} (2 - \lambda_r \beta_r) \frac{\partial C_r}{\partial a_k} \cos \beta_r L, \quad (7.10.19) \end{aligned}$$

причем теперь

$$C_s = \frac{1}{N_s \sin \beta_s L} \sum_{k=1}^n a_k \int_0^1 x \varepsilon'_s \varphi_k(x) dx,$$

$$\frac{\partial C_r}{\partial a_k} = \frac{1}{N_r \sin \beta_r L} \int_0^1 x \varepsilon'_r \varphi_k(x) dx.$$

Вычисление интегралов проводится по формулам (7.10.7) — (7.10.9) и получающимся из них дифференцированием по параметрам β_s , β_r . Трудности будут связаны с вычислением двойных рядов, представляющих коэффициенты при неизвестных a_k в системе (7.10.19) *).

*) Автору неизвестны работы, в которых описанный процесс был бы доведен до численных результатов

Г Л А В А VI

ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА

§ 1. Напряженное состояние

1.1. Постановка задачи Сен-Венана. Призматический стержень — тело, образуемое при поступательном движении плоской фигуры S по прямой, перпендикулярной плоскости фигуры; фигура S представляет поперечное сечение стержня. Осью стержня Oz называется прямая, являющаяся геометрическим местом центров инерции поперечных сечений; оси Ox , Oy , расположенные в плоскости поперечного сечения, направлены по его главным осям инерции. Начало O системы осей Oxy расположено в одном из поперечных сечений (в сечении $z = \text{const}$); начальное ($z = 0$) и конечное ($z = l$) поперечные сечения называются торцами стержня, их центры инерции обозначаются O^- , O^+ . Через I_x , I_y назовем моменты инерции поперечного сечения относительно расположенных в нем осей, через S — его площадь. Итак,

$$\left. \begin{aligned} S &= \int_S \int do, \quad \int_S \int x do = 0, \quad \int_S \int y do = 0 \quad (do = dx dy), \\ I_x &= \int_S \int y^2 do, \quad I_y = \int_S \int x^2 do, \quad \int_S \int xy do = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

для всех $z \in [0, l]$.

В задаче Сен-Венана рассматривается напряженное состояние в призматическом стержне, нагруженном распределенными по его торцам поверхностными силами; боковая поверхность Σ стержня свободна.

Краевые условия записываются в виде: на торцах

$$\left. \begin{aligned} z = 0 & \quad -\tau_{zx} = X_z^-(x, y), \quad -\tau_{yz} = Y_z^-(x, y), \quad -\sigma_z = Z_z^-(x, y), \\ z = l & \quad \tau_{zx} = X_z^+(x, y), \quad \tau_{yz} = Y_z^+(x, y), \quad \sigma_z = Z_z^+(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

где X_z^\mp , Y_z^\mp , Z_z^\mp — проекции на координатные оси поверхностных сил на торцах; на боковой поверхности Σ имеем

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = 0, \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0. \quad (1.1.4)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к боковой поверхности и одновременно к контуру Γ поперечного сечения, так что

$$n_x = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = -\frac{dx}{ds}, \quad n_z = 0, \quad (1.1.5)$$

причем

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = \text{const} \quad (1.1.6)$$

— уравнение контура Γ , s — дуга на нем.

1.2. Интегральные уравнения равновесия. Назовем через P , Q , R проекции на координатные оси главного вектора поверхностных сил на правом торце ($z = l$), через m_x , m_y , m_z — проекции на эти оси их главного момента $\mathbf{m}^{(O^+)}$ относительно центра инерции O^+ этого торца. Тогда

$$P = \int_S \int X_z^+(x, y) do, \quad Q = \int_S \int Y_z^+(x, y) do, \quad R = \int_S \int Z_z^+(x, y) do, \quad (1.2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \int_S \int y Z_z^+(x, y) do, \quad m_y = - \int_S \int x Z_z^+(x, y) do, \\ m_z &= \int_S \int [x Y_z^+(x, y) - y X_z^+(x, y)] do. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

Силы P , Q называют поперечными, R — осевой; m_x , m_y — изгибающие моменты, m_z — крутящий момент.

Составим условия равновесия части стержня $[z, l]$; по его левому торцу распределены напряжения τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z , представляющие систему поверхностных сил с проекциями на координатные оси $-\tau_{xz}$, $-\tau_{yz}$, $-\sigma_z$.

Так как боковая поверхность не нагружена, а массовые силы отсутствуют, то шесть уравнений статики запишутся следующим образом: три уравнения проекций сил

$$\int_S \int \tau_{xz} do = P, \quad \int_S \int \tau_{yz} do = Q, \quad \int_S \int \sigma_z do = R \quad (1.2.3)$$

и три уравнения моментов относительно осей Ox , Oy , Oz сечения z

$$\left. \begin{aligned} \int_S y \sigma_z d\omega = m_x - (l-z) Q, \quad - \int_S x \sigma_z d\omega = m_y + (l-z) P, \\ \int_S (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) d\omega = m_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

При $z = 0$, заменив τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z их значениями (1.1.2), придем, конечно, к условиям равновесия внешних поверхностных сил, которые должны считаться выполненными.

1.3. Основные предположения. Интегральным условиям равновесия (1.2.3), (1.2.4) можно удовлетворить, полагая, что τ_{xz} , τ_{yz} не зависят от z , а σ_z — линейная функция от $(l-z)$:

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \quad \sigma_z = \sigma_z^0(x, y) + (l-z) \sigma_z^1(x, y). \quad (1.3.1)$$

Эти приемлемые предположения, конечно, не являются следствиями упомянутых уравнений, но, лишь приняв их, можно продвинуться дальше в решении задачи о равновесии стержня.

Два из трех уравнений статики в объеме теперь запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (1.3.2)$$

Следствием этих уравнений, а также краевых условий (1.1.3) на боковой поверхности стержня является приемлемость второй группы предположений, допускаемых в постановке задачи Сен-Венана:

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0. \quad (1.3.3)$$

В предположениях (1.3.1), (1.3.3) заключена идея «полуобратного метода Сен-Венана»: некоторые напряжения (или перемещения) назначаются («угадываются»); тогда уравнения, определяющие остающиеся неизвестные, становятся доступными рассмотрению. Конечно, эти допущения заставляют отказаться от точного решения краевой задачи; в задаче Сен-Венана, например, отпадает возможность точного выполнения краевых условий на торцах (1.1.2), они заменяются интегральными соотношениями (1.2.3), (1.2.4). Приемлемость этой замены обосновывается принципом Сен-Венана (п. 2.8 гл. IV).

Усилиями основоположников теории упругости Ляме, Кельвина, Буссинеска, Черрути и др. были получены строгие решения некоторых краевых задач теории упругости для областей, ограниченных поверхностями, задаваемыми одним параметром (шар, полупространство); исследования, имеющие целью полу-

чение точных решений, продолжают в наше время, и число их растет. Но началом теории упругости как прикладной дисциплины следует признать знаменитые мемуары Сен-Венана «О кручении призм» (1855) и «Об изгибе призм» (1856), в которых предложен «полуобратный метод» и высказан «принцип Сен-Венана».

1.4. Нормальное напряжение σ_z в задаче Сен-Венана. Это напряжение может быть определено в общем виде для стержня любого поперечного сечения; уравнений статики здесь недостаточно, надо (решая задачу в напряжениях) обратиться к зависимостям Бельтрами — Мичелла (1.5.9) гл. IV. В них по (1.3.3) сумма нормальных напряжений σ заменяется напряжением σ_z и по (1.3.1) линейно зависит от $(l - z)$:

$$\sigma = \sigma_z = \sigma_z^0(x, y) + (l - z)\sigma_z^1(x, y). \quad (1.4.1)$$

Из (1.3.1) следует также, что все вторые производные искомых функций по z оказываются нулями, так что в оператор Лапласа войдут только производные по x, y :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.4.2)$$

Из трех уравнений Бельтрами — Мичелла (для $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) следует:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} = 0, \quad (1.4.3)$$

а уравнение для σ_z по (1.4.1) удовлетворяется тождественно. Итак, σ оказывается линейной функцией x, y :

$$\sigma = \sigma_z = a_0 x + a_1 y + a_2 + (l - z)(b_0 x + b_1 y + b_2). \quad (1.4.4)$$

Обратившись к геометрическим и статическим соотношениям (1.1.1), (1.2.3), (1.2.4), теперь легко получим

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{R}{S}, & a_1 &= -\frac{m_y}{I_y}, & a_2 &= \frac{m_x}{I_x}, \\ b_0 &= 0, & b_1 &= -\frac{P}{I_y}, & b_2 &= -\frac{Q}{I_x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.5)$$

и поэтому

$$\sigma_z = \frac{R}{S} - \frac{1}{I_y} [m_y + P(l - z)]x + \frac{1}{I_x} [m_x - Q(l - z)]y. \quad (1.4.6)$$

Пришли к закону распределения нормальных напряжений в упругом стержне, растягиваемом осевой силой R и изгибаемом приложенными к торцу моментами m_x, m_y и поперечными силами. Величины

$$M_x = m_x - Q(l - z), \quad M_y = m_y + P(l - z) \quad (1.4.7)$$

представляют изгибающие моменты в сечении z . В элементарной теории изгиба балок также принимается, что

$$\sigma_z = \frac{R}{S} - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{M_x}{I_x} y, \quad (1.4.8)$$

причем этот закон распределения нормальных напряжений σ_z распространяется на случай любого нагружения стержня по боковой поверхности, когда изгибающие моменты M_x , M_y произвольным образом зависят от z .

1.5. Касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} . Эти напряжения определяются из третьего уравнения статики и остающихся двух уравнений Бельтрами — Мичелла

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \left(\frac{P}{I_y} x + \frac{Q}{I_x} y \right), \quad (1.5.1)$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} = - \frac{1}{1+\nu} \frac{P}{I_y}, \quad \nabla^2 \tau_{yz} = - \frac{1}{1+\nu} \frac{Q}{I_x}. \quad (1.5.2)$$

Они рассматриваются совместно с краевым условием (1.1.4) на боковой поверхности или, что то же самое, на контуре Γ области S :

$$\text{на } \Gamma: \quad \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0, \quad (1.5.3)$$

и остающимися интегральными условиями (1.2.3), (1.2.4):

$$\int_S \tau_{xz} d\sigma = P, \quad \int_S \tau_{yz} d\sigma = Q, \quad \int_S (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) d\sigma = m_z. \quad (1.5.4)$$

Заметим, что всякое решение уравнений статики в объеме (1.5.1) и на поверхности (1.5.3) удовлетворяет двум первым условиям (1.5.4). Действительно, после умножения на x и интегрирования по площади S поперечного сечения имеем, сославшись на (1.1.1), (1.5.1),

$$\begin{aligned} \int_S x \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) d\sigma &= \\ &= \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x} x \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} x \tau_{yz} \right) d\sigma - \int_S \tau_{xz} d\sigma = - \frac{P}{I_y} \int_S x^2 d\sigma = -P. \end{aligned}$$

Но по (1.5.3) и формуле преобразования поверхностного интеграла в контурный

$$\int_S \left(\frac{\partial}{\partial x} x \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} x \tau_{yz} \right) d\sigma = \oint_{\Gamma} x (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y) ds = 0,$$

чем устанавливается первое соотношение (1.5.4); конечно, аналогично приходим ко второму.

Заметим еще, что уравнения (1.5.1) и (1.5.3) непротиворечивы, что следует из соотношений

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) d\sigma &= \oint_{\Gamma} (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y) ds = \\ &= -\frac{P}{I_y} \iint_S x d\sigma - \frac{Q}{I_x} \iint_S y d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Ниже доказывается, что дифференциальными уравнениями (1.5.1), (1.5.2) при краевых условиях (1.5.3) и при задании величины крутящего момента m , касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} вполне определяются единственным образом. Как видно, здесь нет речи о выполнении предписываемых равенствами (1.1.2) условий на торцах. Можно сказать, что решение задачи в постановке Сен-Венана является строгим решением краевой задачи теории упругости лишь при условии, что нормальные напряжения на торцах распределены в точности по закону (1.4.6), а касательные — по закону, найденному из решения сформулированной выше задачи. Так найденные напряжения образуют, однако, систему поверхностных сил, статически эквивалентную (с тем же главным вектором и с тем же главным моментом) любому предписанному распределению поверхностных сил X_z^\mp , Y_z^\mp , Z_z^\mp на торцах. Принцип Сен-Венана отвечает на вопрос, насколько приемлема такая замена одной задачи другой. Об этом принципе упоминалось в п. 7.6 гл. V при постановке задач о равновесии упругого кругового цилиндра. Он формулировался и обсуждался в п. 2.4 гл. IV и п. 1.14 гл. V. Его содержание в применении к задаче Сен-Венана сводится к утверждению, что статически эквивалентные системы сил, распределенных по торцам, составляющим малую часть всей поверхности достаточно длинного стержня, создают в теле стержня напряженные состояния, существенно отличающиеся друг от друга в областях, примыкающих к торцам, и практически одинаковые на достаточном удалении от торцов. В подтверждение можно сослаться на примеры экспоненциального убывания напряжений при удалении от торца, нагруженного статически эквивалентной нулю системой поверхностных сил, в задачах о кручении (п. 7.5 гл. V) кругового цилиндра и об однородных решениях (пп. 7.8, 7.9 гл. V). Но можно привести также пример противоположного характера; таковым является случай кручения стержня с тонкостенным открытым профилем (корытным [зетовым Z и т. п.], когда напряженное состояние от статически эквивалентной нулю системы сил распространяется по длине

стержня на значительное расстояние. Принцип Сен-Венана лишен универсальной применимости, но остается незаменимым средством подхода к решению подавляющего числа задач теории упругости.

§ 2. Приведение к краевым задачам для уравнений Лапласа и Пуассона

2.1. Введение функций напряжений. Введем в рассмотрение две функции $G\chi(x, y)$, $G\alpha\Phi(x, y)$, где G — модуль сдвига, α — определяемая ниже постоянная; функция χ предполагается определяемой из уравнения Лапласа

$$\nabla^2\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1.1)$$

Можно тождественно удовлетворить уравнению статики (1.5.1), приняв

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial y} + G \left[\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{1}{2G(1+\nu)} \left(\frac{P}{I_y} x^2 + 2\nu \frac{Q}{I_x} xy \right) \right], \\ \tau_{yz} &= -G\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial x} + G \left[\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{1}{2G(1+\nu)} \left(2\nu \frac{P}{I_y} xy + \frac{Q}{I_x} y^2 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

Тогда

$$\nabla^2\tau_{xz} = G\alpha \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2\Phi - \frac{1}{1+\nu} \frac{P}{I_y}, \quad \nabla^2\tau_{yz} = -G\alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2\Phi - \frac{1}{1+\nu} \frac{Q}{I_x},$$

и подстановка в уравнения Бельтрами — Мичелла (1.5.9) гл. IV приводит к равенствам

$$\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2\Phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\Phi = \text{const.}$$

Эта постоянная принимается равной -2 , что не нарушает общности, поскольку в выражение напряжений через Φ уже введена постоянная α . Итак, Φ определяется из уравнения Пуассона

$$\nabla^2\Phi = -2 \quad (2.1.3)$$

Краевое условие (1.5.3) можно записать, учитывая (1.1.5), в виде

$$\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial s} + \left[\frac{\partial\chi}{\partial n} - \frac{P}{EI_y} (x^2 n_x + 2\nu xy n_y) - \frac{Q}{EI_x} (2\nu xy n_x + y^2 n_y) \right] = 0,$$

причем $E = 2(1+\nu)G$ — модуль Юнга и, как всегда,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial n} = \frac{\partial\chi}{\partial x} n_x + \frac{\partial\chi}{\partial y} n_y.$$

Таким образом, функции Φ и χ можно подчинить краевым условиям

$$\text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0, \quad (2.1.4)$$

$$\text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} = \frac{P}{EI_y} (x^2 n_x + 2\nu x y n_y) + \frac{Q}{EI_x} (2\nu x y n_x + y^2 n_y). \quad (2.1.5)$$

Гармоническая функция χ определяется по заданию на контуре области S ее нормальной производной — это классическая задача Неймана; она имеет решение, так как

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \chi}{\partial n} ds &= \frac{P}{EI_y} \oint_{\Gamma} (x^2 n_x + 2\nu x y n_y) ds + \frac{Q}{EI_x} \oint_{\Gamma} (2\nu x y n_x + y^2 n_y) ds = \\ &= 2(1 + \nu) \left(\frac{P}{EI_y} \iint_S x d\sigma + \frac{Q}{EI_x} \iint_S y d\sigma \right) = 0. \end{aligned}$$

Гармоническую функцию χ удобно представить суммой двух гармонических функций:

$$\chi = \frac{P}{EI_y} \chi_1 + \frac{Q}{EI_x} \chi_2, \quad \nabla^2 \chi_1 = 0, \quad \nabla^2 \chi_2 = 0, \quad (2.1.6)$$

определяемых по краевым условиям

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial n} = x^2 n_x + 2\nu x y n_y, \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial n} = 2\nu x y n_x + y^2 n_y. \quad (2.1.7)$$

Поскольку χ_1, χ_2 — гармонические функции, можно ввести в рассмотрение две функции комплексного переменного $\zeta = x + iy$:

$$f_1(\zeta) = \chi_1 + i\vartheta_1, \quad f_2(\zeta) = \chi_2 + i\vartheta_2. \quad (2.1.8)$$

Функции ϑ_k связаны с χ_k известными соотношениями Коши — Римана

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta_k}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi_k}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta_k}{\partial x}$$

или

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta_k}{\partial s}, \quad \frac{\partial \chi_k}{\partial s} = -\frac{\partial \vartheta_k}{\partial n} \quad (k = 1, 2) \quad (2.1.9)$$

и определяются по χ_k квадратурами с точностью до аддитивной постоянной.

Вместо функции напряжений Φ , удовлетворяющей уравнению Пуассона, в рассмотрение вводится функция

$$\psi(x, y) = \Phi + \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (2.1.10)$$

Она по (2.1.3) является гармонической в S :

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (2.1.11)$$

и рассматривается далее как мнимая часть функции комплексного переменного $F(\xi)$, вещественная часть которой обозначается $\varphi(x, y)$; поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad (2.1.12)$$

так что

$$\varphi + i\psi = F(\xi). \quad (2.1.13)$$

Краевое условие (2.1.4) теперь представляется в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} = -x n_y + y n_x. \quad (2.1.14)$$

Приведем еще несколько измененную запись выражений касательных напряжений (2.1.2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{G} \tau_{xz} &= a \frac{\partial \Phi}{\partial y} + a \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} - x^2 \right) + b \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x} - 2\nu xy \right), \\ \frac{1}{G} \tau_{yz} &= -a \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial y} - 2\nu xy \right) + b \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial y} - y^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.15)$$

Здесь и далее для упрощения введены обозначения

$$a = \frac{P}{EI_y}, \quad b = \frac{Q}{EI_x}. \quad (2.1.16)$$

2.2. Перемещения в задаче Сен-Венана. Основываясь на исходных соотношениях задачи Сен-Венана (1.3.3) и на обобщенном законе Гука, запишем равенства

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu}{E} \sigma_z, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu}{E} \sigma_z, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E}. \quad (2.2.1)$$

Заменив σ_z его значением (1.4.6), приходим к равенствам

$$\left. \begin{aligned} u &= -\nu \left(\frac{R}{ES} x - \frac{m_y}{2EI_y} x^2 + \frac{m_x}{EI_x} xy \right) + \\ &\quad + \nu (l-z) \left(\frac{1}{2} ax^2 + b xy \right) + U(y, z), \\ v &= -\nu \left(\frac{R}{ES} y - \frac{m_y}{EI_y} xy + \frac{m_x}{2EI_x} y^2 \right) + \\ &\quad + \nu (l-z) \left(axy + \frac{1}{2} by^2 \right) + V(z, x), \\ w &= \frac{R}{ES} z + (l-z) \left(\frac{m_y}{EI_y} x - \frac{m_x}{EI_x} y \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (l-z)^2 (ax + by) + W(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

где U , V , W — функции указанных переменных, играющие роль «постоянных интегрирования» соответственно по x , y , z . По третьему соотношению (2.2.1) имеем теперь

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{vy}{EI_y} [m_y + P(l-z)] \right\} + \\ + \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{vx}{EI_x} [m_x - Q(l-z)] \right\} = 0.$$

Величины в фигурных скобках зависят только от z — в противном случае это соотношение связывало бы независимые переменные x , y , z . Называя эти величины через $-Z_0(z)$, $Z_0(z)$, имеем

$$\left. \begin{aligned} U &= -\frac{vy^2}{2EI_y} [m_y + P(l-z)] - yZ_0(z) + Z_1(z), \\ V &= \frac{vx^2}{2EI_x} [m_x - Q(l-z)] + xZ_0(z) + Z_2(z). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

Из двух еще не использованных соотношений обобщенного закона Гука, записываемых в виде

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{xz} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2.2.4)$$

теперь, сославшись на (2.1.15), находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} + a \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} - x^2 \right) + b \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x} - 2vxy \right) + vbxy + \\ &\quad + \frac{va}{2} (x^2 - y^2) + yZ'_0 - \left[Z'_1 + \frac{m_y}{EI_y} (l-z) + \frac{P}{2EI_y} (l-z)^2 \right], \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= -\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial y} - 2vxy \right) + b \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial y} - y^2 \right) + vaxy - \\ &\quad - \frac{vb}{2} (x^2 - y^2) - xZ'_0 - \left[Z'_2 - \frac{m_x}{EI_x} (l-z) + \frac{Q}{2EI_x} (l-z)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.5)$$

Выражения в квадратных скобках должны быть постоянны, так как W не зависит от z ; эти постоянные обозначаются ω_y^0 , $-\omega_x^0$, так что

$$\left. \begin{aligned} Z_1(z) &= \frac{1}{2} \frac{m_y}{EI_y} (l-z)^2 + \frac{1}{6} \frac{P}{EI_y} (l-z)^3 + u_0 + \omega_y^0 z, \\ Z_2(z) &= -\frac{1}{2} \frac{m_x}{EI_x} (l-z)^2 + \frac{1}{6} \frac{Q}{EI_x} (l-z)^3 + v_0 - \omega_x^0 z, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

где u_0 , v_0 — постоянные интегрирования. Из (2.2.5) следует также постоянство $Z'_0(z)$, а из условия интегрируемости, записываемого в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \quad \alpha \nabla^2 \Phi + 2Z'_0(z) = 0,$$

сославшись на (2.1.3), имеем

$$Z'_0(z) = \alpha, \quad Z_0 = \alpha z + \omega_z^0, \quad \omega_z^0 = \text{const.} \quad (2.2.7)$$

Сославшись теперь на (2.1.10), (2.1.12), можно в выражениях (2.2.5) провести замены

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y Z'_0(z) &= \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + y \right) = \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ -\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x Z'_0(x) &= -\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + x \right) = -\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \end{aligned}$$

и интегрирование соотношений (2.2.5) дает

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \alpha \Phi(x, y) + a \left[\chi_1 - \frac{1}{6} (2 - \nu) x^3 - \frac{1}{2} \nu x y^2 \right] + \\ &+ b \left[\chi_2 - \frac{1}{6} (2 - \nu) y^3 - \frac{1}{2} \nu x^2 y \right] + \omega_0 + \omega_x^0 y - \omega_y^0 x. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Остается подставить найденные выражения (2.2.3), (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) в исходные равенства (2.2.2). Придем к следующим выражениям перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\alpha y z - \frac{\nu R}{ES} x + \frac{\nu}{2EI_y} [m_y + P(l-z)] (x^2 - y^2) - \\ &- \frac{\nu}{EI_x} [m_x - Q(l-z)] xy + \frac{1}{2} \frac{m_y}{EI_y} (l-z)^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{P}{EI_y} (l-z)^3 + u_0 + \omega_y^0 z - \omega_z^0 y, \\ v &= \alpha z x - \frac{\nu R}{ES} y + \frac{\nu}{EI_y} [m_u + P(l-z)] xy + \\ &+ \frac{\nu}{2EI_x} [m_x - Q(l-z)] (x^2 - y^2) - \frac{1}{2} \frac{m_x}{EI_x} (l-z)^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \frac{Q}{EI_x} (l-z)^3 + v_0 + \omega_z^0 x - \omega_x^0 z, \\ w &= \alpha \Phi(x, y) + \frac{P}{EI_y} \left[\chi_1 - \frac{1}{6} (2 - \nu) x^3 - \frac{1}{2} \nu x y^2 \right] + \\ &+ \frac{Q}{EI_x} \left[\chi_2 - \frac{1}{6} (2 - \nu) y^3 - \frac{1}{2} \nu x^2 y \right] + \frac{R}{ES} z + \\ &+ \frac{x(l-z)}{EI_y} \left[m_y + \frac{1}{2} P(l-z) \right] - \\ &- \frac{y(l-z)}{EI_x} \left[m_x - \frac{1}{2} Q(l-z) \right] + \omega_0 + \omega_x^0 y - \omega_y^0 x. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.9)$$

Шесть постоянных u_0 , v_0 , ω_0 , ω_x^0 , ω_y^0 , ω_z^0 определяют смещения стержня как твердого тела.

Запишем еще выражения проекций линейного вектора поворота ω . Имеем

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{yz}}{2G} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \gamma_{zx} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_{zx}}{2G} + \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \alpha z + \omega_z^0 + \frac{\nu}{EI_y} [m_y + P(l-z)] y + \\ &\quad + \frac{\nu}{EI_x} [m_x - Q(l-z)] x. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Из последнего уравнения находим значение угла поворота, отнесенного к единице длины, вокруг оси стержня:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \alpha - \frac{\nu P}{EI_y} y + \frac{\nu Q}{EI_x} x, \quad (2.2.12)$$

откуда, интегрируя по площади поперечного сечения и учитывая (1.1.1), получим

$$\alpha = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial z} \int_S \omega_z d\sigma. \quad (2.2.13)$$

Этим дается кинематическое истолкование постоянной α — это средний угол закручивания поперечного сечения на единицу длины оси стержня.

2.3. Упругая линия. Перемещения точек оси стержня — его упругую линию — найдем, приняв $x = y = 0$ в (2.2.9). Вспомнив еще, что гармонические функции χ_1 , χ_2 , φ согласно (2.1.7), (2.1.14) определяются решением задачи Неймана с точностью до аддитивной постоянной, можем принять

$$\chi_1(0, 0) = 0, \quad \chi_2(0, 0) = 0, \quad \varphi(0, 0) = 0. \quad (2.3.1)$$

Получаем следующие уравнения упругой линии:

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2EI_y} \left[m_y (l-z)^2 + \frac{1}{3} P (l-z)^3 \right] + u_0 + \omega_y^0 z, \\ v(z) &= \frac{1}{2EI_x} \left[-m_x (l-z)^2 + \frac{1}{3} Q (l-z)^3 \right] + v_0 - \omega_x^0 z, \\ w(z) &= \frac{R}{ES} z + w_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

Это — формулы элементарной теории изгиба и растяжения стержня. Входящие в них постоянные следует определить по

краевым условиям на левом торце стержня. Примем, что его центр инерции не смещается; тогда

$$\left. \begin{aligned} u(0) = 0: \quad u(z) &= -\frac{m_y l^2}{2EI_y} \left(2 \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - \\ &\quad - \frac{Pl^3}{6EI_y} \left(3 \frac{z}{l} - 3 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right) + \omega_y^0 z, \\ v(0) = 0: \quad v(z) &= \frac{m_x l^2}{2EI_x} \left(2 \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - \\ &\quad - \frac{Ql^3}{EI_x} \left(3 \frac{z}{l} - 3 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right) - \omega_x^0 z, \\ w(0) = 0: \quad w(z) &= \frac{R}{ES} z \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

и, далее,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{m_y l}{EI_y} \left(1 - \frac{z}{l} \right) - \frac{Pl^2}{2EI_y} \left(1 - 2 \frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2} \right) + \omega_y^0, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{m_x l}{EI_x} \left(1 - \frac{z}{l} \right) - \frac{Ql^2}{2EI_x} \left(1 - 2 \frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2} \right) - \omega_x^0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

Будем считать торец стержня $z = 0$ «заделанным». Решение Сен-Венана, в котором можно распорядиться тремя постоянными ω_x^0 , ω_y^0 , ω_z^0 , позволяет в задаче изгиба трактовать термин «заделка» двумя способами. Первый принят в элементарной теории: предполагается, что закрепление не допускает поворота касательной к упругой линии стержня в месте заделки:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} = 0. \quad (2.3.5)$$

Этим определяются ω_x^0 , ω_y^0 , и по (2.3.3), (2.3.4) получаем известные в элементарной теории изгиба уравнения упругой линии и выражения прогибов конца оси стержня:

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= \frac{m_y z^2}{2EI_y} + \frac{Plz^2}{6EI_y} \left(3 - \frac{z}{l} \right), \quad u(l) = \frac{m_y l^2}{2EI_y} + \frac{Pl^3}{3EI_y} = f_x, \\ v(z) &= -\frac{m_x z^2}{2EI_x} + \frac{Qlz^2}{6EI_x} \left(3 - \frac{z}{l} \right), \quad v(l) = -\frac{m_x l^2}{2EI_x} + \frac{Ql^3}{3EI_x} = f_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

Во втором понимании считают, что закрепление не допускает смещений вдоль оси стержня элементов dx , dy поперечного сечения $z = 0$, примыкающих к центру инерции сечения:

$$\text{при } x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0: \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (2.3.7)$$

По (2.2.4) эти условия могут быть записаны в виде

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 = \omega_y^0 - \frac{m_y l}{EI_y} - \frac{Pl^2}{2EI_y} = \frac{\tau_{zx}^0}{G}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 = -\omega_x^0 + \frac{m_x l}{EI_x} - \frac{Ql^2}{2EI_x} = \frac{\tau_{yz}^0}{G}, \quad (2.3.8)$$

где τ_{zx}^0, τ_{yz}^0 — касательные напряжения в центре инерции поперечного сечения. Уравнения упругой линии теперь должны быть дополнены слагаемыми

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}^0 z, \quad \frac{1}{G} \tau_{yz}^0 z, \quad (2.3.9)$$

и величины прогибов с «поправкой на сдвиг» будут

$$f_x^* = f_x + \frac{\tau_{xz}^0}{G} l, \quad f_y^* = f_y + \frac{\tau_{yz}^0}{G} l. \quad (2.3.10)$$

2.4. Классификация задач Сен-Венана. Решение задачи Сен-Венана в ее общей постановке определяется заданием шести величин — трех проекций P, Q, R силы и трех моментов m_x, m_y, m_z . Каждая из шести частных задач соответствует действию только одного из этих силовых факторов. Три случая — действия осевой силы R и моментов m_x, m_y — элементарны, так как эти действия не создают касательных напряжений, вследствие чего отпадает рассмотрение краевой задачи.

Решение задачи растяжения осевой силой дается формулами

$$\sigma_z = \frac{R}{S}, \quad u = -\frac{\nu R}{ES} x, \quad v = -\frac{\nu R}{ES} y, \quad w = \frac{R}{ES} z, \quad (2.4.1)$$

содержащимися в общих соотношениях (1.4.6), (2.2.9). Эти же соотношения и (2.3.6) дают решение задачи об изгибе парой m_x

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{m_x}{I_x} y; \quad u = -\frac{\nu m_x}{EI_x} xy, \\ v &= \frac{\nu m_x}{2EI_x} (x^2 - y^2) - \frac{m_x (l-z)^2}{2EI_x}, \quad w = -\frac{m_x}{EI_x} y (l-z) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

и парой m_y

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{m_y}{I_y} x; \quad u = \frac{\nu m_y}{2EI_y} (x^2 - y^2) + \frac{m_y (l-z)^2}{2EI_y}, \\ v &= \frac{\nu m_y}{EI_y} xy, \quad w = \frac{m_y}{EI_y} x (l-z). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

В задаче о кручении отличен от нуля только крутящий момент m_z . Нормальное напряжение σ_z отсутствует, а касательные напряжения по (2.1.2) выражаются через функцию напряжений Φ , определяемую уравнением Пуассона (2.1.3) при краевом условии (2.1.4):

$$\tau_{xz} = G\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \nabla^2 \Phi = -2; \quad \text{на } \Gamma: \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0, \quad (2.4.4)$$

причем постоянная α — угол закручивания на единицу длины оси стержня (а не «средний угол закручивания», так как P , Q в формуле (2.2.12) здесь отпадают). Он находится по заданию крутящего момента из соотношения (1.5.4). Перемещения находятся по формулам (2.2.9) и оказываются равными (см. также п. 3.2)

$$u = -\alpha yz, \quad v = \alpha zx, \quad w = \alpha \varphi(x, y). \quad (2.4.5)$$

Из этих соотношений следует, что при кручении поперечное сечение стержня, поворачиваясь вокруг оси стержня, не остается плоским («депланирует») — его точки смещаются вдоль оси стержня. Обнаружение этого факта является одним из важнейших достижений теории Сен-Венана. Определяющая деформацию гармоническая функция $\Phi(x, y)$ является решением задачи Неймана (2.1.14); по (2.4.5) функция $\varphi(x, y)$ однозначна в S . Заметим, что ее разыскание, равно как и функции напряжений Φ , не связано с задачей об изгибе силами P или Q .

В задаче об изгибе силой P нормальные и касательные напряжения определяются по формулам (1.4.6), (2.1.15), (2.1.9):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{P}{I_y}(l-z)x, \\ \frac{1}{G}\tau_{xz} &= \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{P}{EI_y} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x} - x^2 \right) = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{P}{EI_y} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} - x^2 \right), \\ \frac{1}{G}\tau_{yz} &= -\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{P}{EI_y} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial y} - 2vxy \right) = \\ &= -\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{P}{EI_y} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + 2vxy \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

а перемещения равны

$$\left. \begin{aligned} u &= -\alpha yz + \frac{vP}{2EI_y}(x^2 - y^2)(l-z) + \frac{Plz^2}{6EI_y} \left(3 - \frac{z}{l} \right) + \left[\frac{\tau_{xz}^0}{G}z \right], \\ v &= \alpha zx + \frac{vP}{EI_y}xy(l-z) + \left[\frac{\tau_{yz}^0}{G}z \right], \\ w &= \alpha \varphi(x, y) + \frac{P}{EI_y} \left[\chi_1 - \frac{1}{6}(2-v)x^3 - \frac{1}{2}vxy^2 \right] + \\ &\quad + \frac{Pl^2x}{EI_y} \left(\frac{z^2}{2l^2} - \frac{z}{l} \right) - \left[\frac{1}{G}(\tau_{xz}^0x + \tau_{yz}^0y) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.7)$$

В этих формулах α — «средний угол закручивания»; он также определяется по крутящему моменту

$$m_z = \iint_S (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) d\sigma$$

от касательных напряжений, создаваемых силой P . Согласно (2.4.6) их следует выражать через две функции напряжений Φ

и χ_1 или Φ и ϑ_1 . Функция Φ , как только что говорилось, определяется краевой задачей (2.4.4), а χ_1 или ϑ_1 — краевыми задачами

$$\nabla^2 \chi_1 = 0, \quad \nabla^2 \vartheta_1 = 0; \quad \text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s} = x^2 n_x + 2\nu x y n_y \quad (2.4.8)$$

[см. (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9)]. Заметим еще, что из последнего равенства (2.4.7) следует требование однозначности суммы

$$\alpha \Phi(x, y) + \frac{P}{EI_y} \chi_1. \quad (2.4.9)$$

Конечно, соотношения в задаче об изгибе силой Q аналогичны (2.4.6) — (2.4.9). Более подробное рассмотрение перечисленных отдельных задач — растяжения, изгиба парой, кручения, изгиба силой — дается ниже (п. 2.7 и §§ 3, 4 этой главы).

2.5. Определение постоянной α . Задача рассматривается в предположении об одновременном действии крутящего момента и поперечных сил. По (1.5.4), (2.1.15), (2.1.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} m_z = \frac{1}{G} \int_S \int (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) d\sigma = & -\alpha \int_S \int \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) d\sigma - \\ & - \alpha \left[\int_S \int \left(x \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + y \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} \right) d\sigma - (1 - 2\nu) \int_S \int x^2 y d\sigma \right] - \\ & - b \left[\int_S \int \left(x \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} + y \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \right) d\sigma + (1 - 2\nu) \int_S \int xy^2 d\sigma \right]. \quad (2.5.1) \end{aligned}$$

Ограничимся здесь рассмотрением односвязной области S . Тогда можно принять, что функция напряжений, которая по (2.4.4) на контуре Γ постоянна, равна на нем нулю:

$$\text{на } \Gamma: \quad \Phi = 0. \quad (2.5.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} - \int_S \int \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) d\sigma = & - \int_S \int \left(\frac{\partial}{\partial x} x \Phi + \frac{\partial}{\partial y} y \Phi \right) d\sigma + 2 \int_S \int \Phi d\sigma = \\ = & - \oint_{\Gamma} \Phi (x n_x + y n_y) ds + 2 \int_S \int \Phi d\sigma = 2 \int_S \int \Phi d\sigma. \end{aligned}$$

Величина

$$C = 2 \int_S \int \Phi d\sigma \quad (2.5.3)$$

называется геометрической жесткостью при кручении. Ее определение для многосвязной области дано в п. 3.4 этой главы.

Аналогично преобразуются интегралы *)

$$\begin{aligned} - \iint_S \left(x \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x} + y \frac{\partial \vartheta_k}{\partial y} \right) d\omega &= 2 \iint_S \vartheta_k d\omega - \oint_{\Gamma} \vartheta_k (x n_x + y n_y) ds = \\ &= 2 \iint_S \vartheta_k d\omega - 2 \oint_{\Gamma} \vartheta_k d\omega, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

где (рис. 24) $d\omega = \frac{1}{2}(x n_x + y n_y) ds = \frac{1}{2}(x dy - y dx)$ есть площадь сектора, образуемого вектор-радиусами двух бесконечно близких точек на Γ с началом (полюсом секториальной площади) в начале координат O . Площадь замкнутой кривой

$$S = \omega = \oint_{\Gamma} d\omega = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x dy - y dx)$$

не зависит от выбора полюса; действительно, при переносе начала координат в точку x_0, y_0

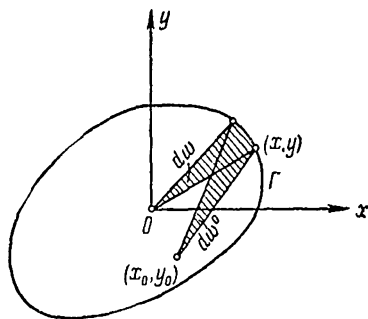


Рис. 24.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x' dy' - y' dx') &= \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x dy - y dx) - \\ &- \frac{1}{2} \left(x_0 \oint_{\Gamma} dy - y_0 \oint_{\Gamma} dx \right) = \omega, \end{aligned}$$

так как интегралы $\oint_{\Gamma} dx, \oint_{\Gamma} dy$ равны нулю.

В дальнейшем преобразовании формулы (2.5.4), предложенном В. В. Новожиловым, используется формула Грина

$$\iint_S (\Phi \nabla^2 \vartheta_k - \vartheta_k \nabla^2 \Phi) d\omega = \oint_{\Gamma} \left(\Phi \frac{\partial \vartheta_k}{\partial n} - \vartheta_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds.$$

Из нее, вспомнив (2.1.3), (2.5.2), (2.1.10), (2.1.12), имеем

$$2 \iint_S \vartheta_k d\omega = - \oint_{\Gamma} \vartheta_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds + 2 \oint_{\Gamma} \vartheta_k d\omega = \oint_{\Gamma} \vartheta_k \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds + 2 \oint_{\Gamma} \vartheta_k d\omega,$$

*) В этой главе \oint обозначает интеграл по замкнутому контуру, обходимому против часовой стрелки. Область S внутри контура расположена слева от направления обхода.

так что

$$2 \left(\iint_S \vartheta_k d\omega - \oint_{\Gamma} \vartheta_k d\omega \right) = \oint_{\Gamma} \vartheta_k \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = - \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \vartheta_k}{\partial s} ds, \quad (2.5.5)$$

причем интегрирование по частям не вносит внеинтегрального члена, поскольку φ , ϑ_k — однозначные функции (гармоническая в односвязной области функция однозначна в ней).

Теперь, сославшись на (2.4.8), (2.1.12), (2.1.10), имеем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s} ds &= \oint_{\Gamma} \varphi (x^2 n_x + 2\nu x y n_y) ds = \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 \varphi + 2\nu x \frac{\partial}{\partial y} y \varphi \right) d\omega = \\ &= 2(1 + \nu) \iint_S x \varphi d\omega + \iint_S \left(x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\nu x y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\omega \end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \iint_S \left(x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\nu x y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\omega &= \iint_S \left(x^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} - 2\nu x y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\omega = \\ &= (1 - 2\nu) \iint_S x^2 y d\omega + \iint_S \left(x^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} - 2\nu x y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) d\omega, \end{aligned}$$

и остается заметить, что по (2.5.2)

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} d\omega &= \oint_{\Gamma} \Phi x^2 n_y ds = 0, \\ - \oint_{\Gamma} x y \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\omega &= - \iint_S y \frac{\partial}{\partial x} x \Phi d\omega + \iint_S y \Phi d\omega = \\ &= - \oint_{\Gamma} x y \Phi n_x ds + \iint_S y \Phi d\omega = \iint_S y \Phi d\omega. \end{aligned}$$

После подстановки этих соотношений в (2.5.4) получаем

$$\begin{aligned} \iint_S \left(x \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + y \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} \right) d\omega &= \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s} ds = \\ &= 2(1 + \nu) \iint_S x \varphi d\omega + 2\nu \iint_S y \Phi d\omega + (1 - 2\nu) \iint_S x^2 y d\omega \quad (2.5.6) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \iint_S \left(x \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} + y \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \right) d\omega &= \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s} ds = \\ &= 2(1 + \nu) \iint_S y \varphi d\omega - 2\nu \iint_S x \Phi d\omega - (1 - 2\nu) \iint_S x y^2 d\omega. \end{aligned}$$

Теперь, вернувшись к исходному соотношению (2.5.1), придем к уравнению, определяющему постоянную α — средний угол закручивания:

$$m_z = GC\alpha - \frac{P}{I_y} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \int_S y\Phi \, do + \int_S x\Phi \, do \right) + \frac{Q}{I_x} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \int_S x\Phi \, do - \int_S y\Phi \, do \right). \quad (2.5.7)$$

2.6. Центр жесткости. Обозначим через x^* , y^* имеющие размерность длины величины

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{1}{I_x} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \int_S x\Phi \, do - \int_S y\Phi \, do \right), \\ y^* &= \frac{1}{I_y} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \int_S y\Phi \, do + \int_S x\Phi \, do \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.6.1)$$

вычисление которых требует решения только краевой задачи о кручении. Формула (2.5.7) при этом переписывается в виде

$$GC\alpha = m_z - (x^*Q - y^*P). \quad (2.6.2)$$

Система касательных напряжений τ_{zx} , τ_{zy} в любом поперечном сечении стержня по условию статически эквивалентна силе $F = i_1P + i_2Q$, проходящей через начало координат (центр инерции O сечения), и паре с моментом m_z (рис. 25). Из элементов статики известно, что такая система (m_z и F в точке O) статически эквивалентна одной силе $F^* = F$ с линией действия L , определяемой уравнением

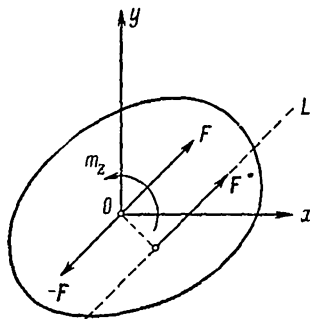


Рис. 25.

$$m_z = xQ - yP. \quad (2.6.3)$$

Теперь (2.6.2) записывается в виде

$$GC\alpha = (x - x_*)Q - (y - y_*)P. \quad (2.6.4)$$

Отсюда следует, что $\alpha = 0$, если прямая L проходит через точку с координатами (x^*, y^*) :

$$x = x_*, \quad y = y_*; \quad \alpha = 0. \quad (2.6.5)$$

Итак, средний угол закручивания α равен нулю — изгиб не сопровождается кручением, если линия действия силы F^* проходит через точку $C(x_*, y_*)$, называемую центром жесткости (или центром изгиба) (рис. 26, а).

В случае, когда $m_z = 0$, система касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} статически эквивалентна одной силе F с линейной действия L_0 , проходящей через центр инерции; тогда (рис. 26, б)

$$GC\alpha = -x_*Q + y_*P \quad (2.6.6)$$

и, вообще говоря, $\alpha \neq 0$ — сила, прилагаемая в центре инерции, создает деформацию, сопровождающуюся средним закручиванием; исключением будет случай, когда L_0 одновременно проходит и через центр жесткости.

В случае поперечного сечения, симметричного относительно прямой, эта прямая будет одной из главных осей инерции, пусть

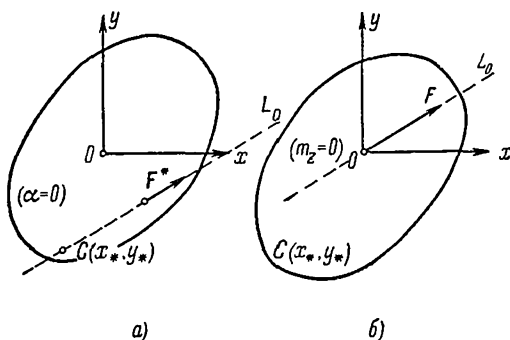


Рис. 26.

осью Ox . Тогда функция напряжений Φ будет четна относительно переменной y , а функция деформации φ — нечетна:

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, -y), \quad \varphi(x, y) = -\varphi(x, -y).$$

Из (2.6.1) легко видеть, что в этом случае $y_* = 0$ — центр жесткости сечения, имеющего ось симметрии, расположен на этой оси. При наличии двух осей симметрии центр жесткости C сечения совпадает с точкой пересечения этих осей, то есть с центром инерции O . В этом частном случае рассмотрение задачи изгиба не требует решения задачи кручения.

2.7. Элементарные решения. Как указывалось в п. 2.4, к элементарным случаям относятся нагружения осевой силой R и изгибающими моментами m_x , m_y ; отличным от нуля оказывается нормальное напряжение σ_z ; поэтому краевые задачи, связанные с определением касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} , не возникают.

Решение задачи о растяжении дается формулами (2.4.1) — перемещаясь поступательно вдоль оси стержня, поперечное сечение подобно преобразуется в своей плоскости. Зависимости

координат (x_1, y_1, z_1) точки стержня в напряженном состоянии от их начальных значений (x, y, z) даются формулами

$$x_1 = \left(1 - \frac{\nu R}{ES}\right)x, \quad y_1 = \left(1 - \frac{\nu R}{ES}\right)y, \quad z_1 = \left(1 + \frac{R}{ES}\right)z. \quad (2.7.1)$$

При изгибе в плоскости zx (парой m_y) эти зависимости приобретают по (2.4.3) более сложный вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + \frac{\nu}{2c}(x^2 - y^2) + \frac{\xi^2}{2c}, & y_1 &= y + \frac{\nu}{c}xy, \\ \xi_1 &= \xi \left(1 - \frac{x}{c}\right) & (\xi &= l - z). \end{aligned} \right\} \quad (2.7.2)$$

Здесь $\frac{1}{c} = \frac{m_y}{EI_y}$ — кривизна упругой линии; в проводимом далее рассмотрении искажения поперечного сечения сохраняются лишь первые степени отношений x/c , y/c , z/c . Через \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ обозначаются единичные векторы внешней нормали и касательной к контуру Γ поперечного сечения $\xi = \text{const}$ стержня, причем \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{i}_3 ориентированы, как единичные векторы \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 , \mathbf{i}_3 . Записывая уравнения (1.1.6) этого контура в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, имеем

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \mp \frac{\mathbf{n}}{\rho}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \pm \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho}, \quad (2.7.3)$$

причем $1/\rho$ — кривизна кривой Γ и верхний (нижний) знак берется, если она обращена вогнутой (выпуклой) стороной к началу координат — центру инерции сечения.

Формулы (2.7.2) представляют уравнения поверхности изогнутого стержня; в них $s = q^1$, $\xi = q^2$ играют роль гауссовых координат. Называя через $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^1, q^2)$ вектор-радиус точки на этой поверхности, составляем выражения базисных векторов на ней:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \boldsymbol{\tau} \left(1 + \frac{\nu}{c}x\right) - \mathbf{n} \frac{\nu}{c}y - \frac{\xi}{c} \frac{dx}{ds} \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{R}_2 &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} = \mathbf{i}_3 \left(1 - \frac{x}{c}\right) + \mathbf{i}_1 \frac{\xi}{c}, \end{aligned} \right\} \quad (2.7.4)$$

так что с указанной точностью

$$g_{11} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_1 = 1 + \frac{2\nu}{c}x, \quad g_{22} = \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_2 = 1 - \frac{2x}{c}, \quad g_{12} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 = 0.$$

Единичный вектор \mathbf{m} нормали к поверхности оказывается равным

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 = \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \frac{\nu y}{c} - \mathbf{i}_3 \frac{\xi}{c} \frac{dy}{ds}. \quad (2.7.5)$$

Сославшись на (2.7.3), имеем

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= \frac{\partial^2 R}{\partial s^2} = \mp \frac{1}{\rho} n \left(1 + \frac{vx}{c} \pm \frac{v\rho}{c} \frac{dy}{ds} \right) \pm \\ &\quad \pm \tau \frac{v}{c} \left(\frac{dx}{ds} \mp \frac{y}{\rho} \right) - \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{\xi}{c} i_3, \\ R_{22} &= \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} = \frac{1}{c} i_1, \quad R_{12} = \frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial s} = -i_3 \frac{1}{c} \frac{dx}{ds}, \end{aligned} \right\} \quad (2.7.6)$$

и коэффициенты второй квадратичной формы поверхности оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= R_{11} \cdot m = \mp \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{vx}{c} \pm \frac{v\rho}{c} \frac{dy}{ds} \right), \\ b_{22} &= R_{22} \cdot m = \frac{1}{c} \frac{dy}{ds}, \\ b_{12} &= R_{12} \cdot m = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.7.7)$$

С принятой степенью точности координатные линии оказываются линиями кривизны ($b_{12} = 0$, $g_{12} = 0$). Вектор нормальной кривизны поверхности определяется равенством

$$\bar{k}m = \frac{b_{11} ds^2 + 2b_{12} ds d\xi + b_{22} d\xi^2}{g_{11} ds^2 + 2g_{12} ds d\xi + g_{22} d\xi^2} m,$$

и поэтому кривизны линий кривизны — главных нормальных сечений $\xi = \text{const}$ и $s = \text{const}$ — равны

$$\bar{k}_1 = \frac{1}{R_1} = \mp \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{vx}{c} \right) - \frac{v}{c} \frac{dy}{ds}, \quad \bar{k}_2 = \frac{1}{c} \frac{dy}{ds}. \quad (2.7.8)$$

Центры кривизны расположены на нормали m к поверхности. Первой формулой определяется кривизна контура Γ^* деформировавшегося поперечного сечения, второй — кривизна волокна $s = \text{const}$ на поверхности стержня.

В случае круглого поперечного сечения (радиуса a) по (2.7.8) имеем

$$x = a \cos \frac{s}{a}, \quad y = a \sin \frac{s}{a}, \quad \bar{k}_1 = -\frac{1}{a}, \quad \bar{k}_2 = \frac{1}{c} \cos \frac{s}{a},$$

а уравнение контура Γ^* в векторной форме записывается по (2.7.2) в виде

$$r_1 = r + \frac{va^2}{2c} \left(i_1 \cos \frac{2s}{a} + i_2 \sin \frac{2s}{a} \right) + i_1 \frac{\xi^2}{2c}, \quad \xi_1 = \xi \left(1 - \frac{a}{c} \cos \frac{s}{a} \right).$$

Со степенью точности, принятой в этом вычислении, кривизны кривых Γ^* и Γ одинаковы, но центр кривизны сместился из центра круга r_0 в точку C_1 :

$$r_{c_1}^* = -am = r_0 - \frac{a^2}{c} \left(v \sin \frac{s}{a} \tau - \frac{\xi}{a} \cos \frac{s}{a} i_3 \right).$$

Для волокон $s=0$ и $s=a$ имеем соответственно $m = \pm \left(i_1 - \frac{\xi}{c} i_3 \right)$; их центр кривизны C_2 попадает в центр кривизны C упругой линии стержня $r_{C_2}^* = ci_1 - \xi i_3$; кривизна волокон $s = \frac{\pi}{2} a$, $\frac{3\pi}{2} a$ сохраняется равной нулю.

Рассмотрим еще случай, когда в состав контура входит прямолинейный отрезок; пусть его уравнения

$$x = x_0 - s \cos \alpha, \quad y = s \sin \alpha \quad \left(0 \leq s \leq \frac{x_0}{\cos \alpha} \right).$$

Кривизны оказываются равными

$$\kappa_1 = -\frac{\nu}{c} \sin \alpha, \quad \kappa_2 = \frac{1}{c} \sin \alpha.$$

Они имеют противоположные знаки; говорят, что плоский участок превратился в антикластическую поверхность. Отношение кривизн равно коэффициенту Пуассона ν ; это обстоятельство было использовано для его экспериментального определения с помощью интерференционных полос, получающихся при пропускании света через пластинку, установленную параллельно плоской грани изгибаемого бруса.

Как пример рассмотрим случай стержня прямоугольного сечения. Стороны $x = \pm a$, $\xi = \xi_0$ превращаются (приближенно) в параболы, обращенные выпуклостью в сторону положительной оси x . Кривизны равны $-\nu/c$, $1/c$; центры кривизны парабол расположены на отрицательной оси i_1 в точке c/ν , тогда как центр кривизны изогнутого волокна $x = a$, $y = 0$ находится в точке ci_1 — центре кривизны упругой линии.

Грани $y = \pm b$ в рассматриваемом приближении остаются плоскими:

$$y_1 = \pm b \left(1 + \frac{\nu}{c} x \right), \quad \xi_1 = \xi_0 \left(1 - \frac{x}{c} \right).$$

§ 3. Задача о кручении

3.1. Постановка задачи. Случай кручения является частным случаем общей задачи Сен-Венана о напряженном состоянии призматического стержня, нагруженного по его торцам, постановка которой была дана в §§ 1, 2 этой главы. Однако большое значение и детальная разработанность этого случая заставляют предпочесть независимое от общей задачи его изложение.

В задаче о кручении интегральные условия на торцах $z = 0$, $z = l$ сводятся к требованию

$$\int_S \int (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) d\sigma = m_z, \quad (3.1.1)$$

тогда как все остальные условия (1.2.3) — (1.2.4) однородны, то есть $P = Q = R = 0$, $m_x = m_y = 0$. Это позволяет, сохранив основные предположения (1.3.3) полуобратного метода, принять дополнительно

$$\sigma_z = 0. \quad (3.1.2)$$

Напряжения τ_{xz} , τ_{yz} , не зависящие от z , определяются [ср. (1.5.1)] по остающимся уравнениям статики в объеме и на боковой поверхности:

$$-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = 0, \quad (3.1.3)$$

условию (3.1.1) на торцах и уравнениям Бельтрами. Последние, поскольку нормальные напряжения отсутствуют, сводятся к двум уравнениям:

$$\nabla^2 \tau_{xz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} = 0, \quad (3.1.4)$$

причем здесь и во всей этой главе ∇^2 — плоский оператор Лапласа (1.4.2).

Уравнению статики в объеме тождественно удовлетворяет представление касательных напряжений через функцию Φ , называемую функцией напряжений:

$$\tau_{xz} = G\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (3.1.5)$$

где α — постоянная, G — модуль сдвига. Тогда уравнение статики на боковой поверхности приводит к условию на контуре поперечного сечения Γ :

$$\text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0. \quad (3.1.6)$$

Уравнения Бельтрами (3.1.4) теперь записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.1.7)$$

и выражают требование постоянства лапласиана $\nabla^2 \Phi$ в области S ; эту постоянную, пользуясь уже наличием постоянной α в выражении напряжений, можно зафиксировать произвольно. Принято считать ее равной -2 ,

$$\nabla^2 \Phi = -2. \quad (3.1.8)$$

Остается выразить условие (3.1.1) через функцию напряжений

$$-G\alpha \int \int_S \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) do = m_z. \quad (3.1.9)$$

Введем еще в рассмотрение «вектор касательного напряжения»

$$\tau = \tau_{xz} i_1 + \tau_{yz} i_2.$$

Тогда, рассматривая некоторый контур L , имеем по (3.1.5)

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \tau_n = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = G\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (3.1.10)$$

так что $\tau_n = 0$, если контур L представляет одну из кривых семейства линий

$$\Phi(x, y) = \text{const} = B \quad (3.1.11)$$

и вектор $\boldsymbol{\tau}$ в любой точке поперечного сечения имеет направление касательной к кривой $\Phi = \text{const}$, проходящей через эту точку. Проекция вектора $\boldsymbol{\tau}$ на касательную к L равна

$$\tau_{xz} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds} = -G\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x \right) = -G\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (3.1.12)$$

и если L принадлежит семейству (3.1.11), то абсолютное значение этой проекции будет модулем вектора $\boldsymbol{\tau}$ (тогда $\tau_n = 0$):

$$\tau = G\alpha \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|. \quad (3.1.13)$$

Таким образом, в местах поперечного сечения, где кривые семейства (3.1.10) сближаются (расстояние δn между соседними кривыми $B = \text{const}$, $B + \delta B = \text{const}$ уменьшается), имеет место концентрация касательных напряжений. Можно сказать, что густота кривых — траекторий касательных напряжений — служит мерой величины этих напряжений.

Касательное напряжение τ достигает максимума на контуре области. Доказательство основано на положительности лапласиана $\nabla^2 \tau^2$; имеем [см. (3.1.4), (II.4.20)]

$$\frac{1}{2} \nabla^2 \tau^2 = \frac{1}{2} \nabla^2 (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = |\nabla \tau_{xz}|^2 + |\nabla \tau_{yz}|^2 > 0. \quad (3.1.14)$$

Если предположить, что максимум τ достигается в точке M области, то в окрестности σ этой точки и на малой окружности γ с центром в M

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial n} < 0, \quad \int_{\sigma} \int_{\gamma} \nabla^2 \tau^2 d\sigma = \oint_{\gamma} \frac{\partial \tau^2}{\partial n} ds < 0,$$

что противоречит (3.1.14).

В большом числе задач максимум касательного напряжения реализуется в точке границы L , наиболее близкой к центру инерции сечения. Однако имеются исключения, на которые указал Сен-Венан.

3.2. Перемещения. Из шести компонент тензора деформации четыре равны нулю:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.2.1)$$

что является следствием отсутствия нормальных напряжений и касательного напряжения τ_{xy} . Отличны от нуля сдвиги γ_{xz} , γ_{yz} ; по (3.1.5) их можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{zx} = \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = -\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

По (3.1.8) и четвертому условию (3.2.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 2\alpha; & \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 2\alpha z + 2f(x, y); \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\alpha z - f; & \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha z + f, \end{aligned}$$

причем по первому и второму условиям (3.2.1) легко заключить, что $f = \text{const} = \omega_z^0$. Итак,

$$u = -\alpha yz - \omega_z^0 y + u_0, \quad v = \alpha xz + \omega_z^0 x + v_0.$$

Слагаемые, определяющие поворот и поступательное перемещение стержня как твердого тела, далее отбрасываются. Формулами

$$u = -\alpha yz, \quad v = \alpha xz \quad (3.2.3)$$

определяется перемещение поворота поперечного сечения $z = \text{const}$ на угол αz вокруг его оси; постоянная α — угол кручения — представляет угол относительного поворота двух сечений, отстоящих друг от друга по оси стержня на единицу длины. Однако поперечные сечения не остаются плоскими, так как осевое перемещение w отлично от нуля (исключением является стержень круглого поперечного сечения) — поперечное сечение, как отмечалось ранее, «депланирует».

Вернемся к уравнениям (3.2.2), заменив в них u , v их значениями (3.2.3). Получаем

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + y \right) = \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + x \right) = -\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.2.4)$$

Здесь в рассмотрение введена определенная с точностью до аддитивной постоянной функция $\Psi(x, y)$:

$$\Psi = \Phi + \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad (3.2.5)$$

которая, как следует из (3.1.8), является гармонической в S ; условия (3.2.4), связывающие функцию $\alpha\Psi$ с w , — это условия Коши — Римана. Поэтому w — также гармоническая функция,

а $w + i\alpha\psi$ — функция комплексного переменного $x + iy$; вспомнив обозначение (2.1.13), имеем

$$\nabla^2\psi = 0, \quad \nabla^2 w = 0, \quad w = \alpha\varphi, \quad \varphi + i\psi = F(x + iy). \quad (3.2.6)$$

Функцию F называют комплексной функцией кручения.

По (3.1.6) легко получить краевые условия для гармонических функций ψ и φ :

на Γ : $\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = yn_x - xn_y = y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x^2 + y^2). \quad (3.2.7)$

Задача Неймана (определение гармонической функции по заданию на контуре области ее нормальной производной), к которой приведено определение деформации $w(x, y)$, имеет определяемое с точностью до аддитивной постоянной решение, так как выполнено необходимое и достаточное условие его существования

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma} (y dy + x dx) = 0. \quad (3.2.8)$$

Независимость φ от z следует из третьего условия (3.2.1).

3.3. Теорема о циркуляции касательных напряжений. Предполагается, что призматический стержень содержит незаполненные веществом

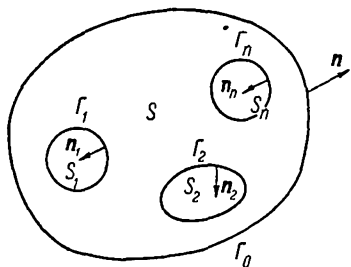


Рис. 27.

полости, так что его поперечное сечение S представляет многосвязную область; ее контур Γ состоит из наружного контура Γ_0 и внутренних непересекающихся контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, ограничивающих внутренние области S_1, S_2, \dots, S_n (рис. 27). Через n обозначается единичный вектор нормали к Γ_0 вовне S , а через n_k — нормали к Γ_k , направленные также вовне S , то есть внутрь S_k .

На каждом из контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, согласно (3.1.6), функция напряжений Φ сохраняет постоянное значение C_0, C_1, \dots, C_n ; одну из этих постоянных, не изменяя ни напряжений, ни деформации, можно произвольно зафиксировать. Мы примем $C_0 = 0$; тогда

$$\Phi = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \Phi = C_k \text{ на } \Gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.3.1)$$

Постоянные C_k наперед неизвестны; их определение составляет трудную часть задачи; решение ее дается теоремой о циркуляции касательных напряжений.

Через $\Phi_0(x, y)$ обозначим решение в S дифференциального уравнения Пуассона (3.1.8):

$$\nabla^2\Phi_0 = -2 \quad (3.3.2)$$

при краевых условиях

$$\Phi_0 = 0 \text{ на } \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \quad (3.3.3)$$

а через $\Phi_k(x, y)$ — гармоническую в S функцию, равную 1 на Γ_k и обращающуюся в нуль на всех прочих контурах $(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \Gamma_{k+1}, \dots, \Gamma_n)$:

$$\nabla^2 \Phi_k = 0, \quad \Phi_k = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \Phi_k = \delta_{sk} \text{ на } \Gamma_s. \quad (3.3.4)$$

Этими условиями все функции Φ_0, Φ_k определены в S , а функция напряжений $\Phi(x, y)$ может быть представлена через них в виде

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \sum_{k=1}^n C_k \Phi_k(x, y). \quad (3.3.5)$$

Рассматривается циркуляция K касательных напряжений, вычисляемая по любому замкнутому контуру L в области S ; через m обозначается единичный вектор нормали, направленный вонне ограниченной L площади Ω :

$$K = \oint_L (\tau_{xz} dx + \tau_{yz} dy) = G\alpha \oint_L \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \right) = -G\alpha \oint_L \frac{\partial \Phi}{\partial m} ds.$$

С другой стороны, по (3.1.5) и (3.2.4)

$$K = G \oint_L \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) + G\alpha \oint_L (x dy - y dx) = 2G\alpha\Omega,$$

так как первый интеграл равен нулю вследствие однозначности в S деформации w , а второй представляет удвоенную площадь, ограниченную контуром L . Пришли к теореме о циркуляции касательного напряжения. Итак,

$$-\oint_L \frac{\partial \Phi}{\partial m} ds = 2\Omega. \quad (3.3.6)$$

В применении к контуру Γ_t — границе полости S_t — эта формула приводит к соотношению

$$\oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \Phi}{\partial n_t} ds = 2S_t \quad (t = 1, 2, \dots, n), \quad (3.3.7)$$

так как вектор n_t направлен внутрь S_t , а направление обхода по Γ_t сохранено прежнее (область S_t расположена слева). После замены Φ его выражением (3.3.5) приходим к системе n уравнений для определения неизвестных C_k :

$$\oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n_t} ds + \sum_{k=1}^n C_k \oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_t} ds = 2S_t \quad (t = 1, 2, \dots, n). \quad (3.3.8)$$

В применении к Γ_0 соотношение (3.3.6) дает

$$\oint_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} ds + \sum_{k=1}^n C_k \oint_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} ds = -2S_* = -2 \left(S + \sum_{t=1}^n S_t \right),$$

где в скобках справа — площадь, ограниченная контуром Γ_0 . Однако это уравнение является следствием системы (3.3.8). Действительно, заменив S_1, S_2, \dots, S_n их значениями (3.3.8), имеем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} ds + \sum_{t=1}^n \oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n_t} ds + 2S + \\ + \sum_{k=1}^n C_k \left(\oint_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} ds + \sum_{t=1}^n \oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_t} ds \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Через Γ_* назовем совокупность контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, ограничивающих область S , через n_* — единичный вектор нормали к Γ_* , внешней к S . Тогда после преобразования по формуле Грина получим

$$\oint_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} ds + \sum_{t=1}^n \oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_t} ds = \oint_{\Gamma_*} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_*} ds = \int_S \int \nabla^2 \Phi_k do = 0,$$

а в применении к Φ_0

$$\oint_{\Gamma_*} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n_*} ds = \int_S \int \nabla^2 \Phi do = -2 \int_S \int do = -2S,$$

что и требовалось.

Разыскание постоянных C_k сведено к системе линейных уравнений (3.3.8):

$$\sum_{k=1}^n B_{tk} C_k = B_t, \quad B_{tk} = \oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_t} ds, \quad B_t = 2S_t - \oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n_t} ds, \quad (3.3.10)$$

причем в п. 3.5 доказывается симметричность матрицы $\|B_{tk}\|$. К системе уравнений (3.3.10) мы вернемся в п. 3.17.

3.4. Жесткость при кручении. Преобразуя формулу (3.1.9) для крутящего момента, имеем

$$\begin{aligned} m_z &= -Ga \int_S \int \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) do = \\ &= -Ga \int_S \int \left(\frac{\partial}{\partial x} x\Phi + \frac{\partial}{\partial y} y\Phi \right) do + 2Ga \int_S \int \Phi do = \\ &= -Ga \oint_{\Gamma_*} (x n_{*x} + y n_{*y}) \Phi ds + 2Ga \int_S \int \Phi do. \end{aligned}$$

Вместе с тем по (3.3.3), (3.3.4) и (3.3.5)

$$\oint_{\Gamma_*} (xn_{*x} + yn_{*y}) \Phi \, ds = \sum_{t=1}^n C_t \oint_{\Gamma_t} (xn_{tx} + yn_{ty}) \, ds = -2 \sum_{t=1}^n C_t S_t,$$

так как вектор \mathbf{n}_t направлен внутрь S_t . Итак,

$$m_z = 2G\alpha \left(\iint_S \Phi \, do + \sum_{t=1}^n C_t S_t \right) = G\alpha C, \quad (3.4.1)$$

где величина

$$C = 2 \left(\iint_S \Phi \, do + \sum_{t=1}^n C_t S_t \right), \quad (3.4.2)$$

имеющая размерность L^4 (момента инерции площади), называется геометрической жесткостью при кручении. В случае односвязной области [см. (2.5.3)]

$$C = 2 \iint_S \Phi \, do. \quad (3.4.3)$$

Из энергетических соображений — формулы Клапейрона (3.3.3) гл. II — сразу же следует, что геометрическая жесткость C положительна. Действительно, выделяя отрезок стержня $z_1 - z_2 = l$ и учитывая, что его боковая поверхность свободна от нагружения, тогда как поперечные сечения S_1 и S_2 нагружены поверхностными силами

$$\mathbf{F}_1 = \tau_{xz} \mathbf{i}_1 + \tau_{yz} \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{F}_2 = -(\tau_{xz} \mathbf{i}_1 + \tau_{yz} \mathbf{i}_2)$$

и им сообщаются по (3.2.3) перемещения

$$u_1 = -\alpha y z_1, \quad v_1 = \alpha x z_1, \quad u_2 = -\alpha y z_2, \quad v_2 = \alpha x z_2,$$

по упомянутой формуле и (3.4.1) имеем

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \iint_{S_1} (\tau_{xz} u_1 + \tau_{yz} v_1) \, do - \iint_{S_2} (\tau_{xz} u_2 + \tau_{yz} v_2) \, do = \\ &= l\alpha \iint_S (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) \, do. \end{aligned}$$

Итак,

$$2\alpha = CG\alpha^2 l \quad (3.4.4)$$

и $C > 0$, поскольку $\alpha > 0$.

3.5. Мембранная аналогия Прандтля (1904). Известно, что задача о равновесии мембраны, закрепленной по наружному контуру Γ_0 и нагруженной поверхностной нагрузкой p , сводится к краевой задаче для уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \zeta(x, y) = -\frac{p}{T}; \quad \zeta = 0 \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (3.5.1)$$

Здесь $\zeta(x, y)$ — прогиб мембраны, а через T обозначена одинаковая интенсивность сил натяжения; это значит, что, вырезав из мембраны произвольную область Ω , ограниченную контуром L , следует для сохранения равновесия распределить по этому контуру нормально к нему силы T на единицу длины. По (3.5.1) имеем, считая здесь и далее p постоянным,

$$\iint_{\Omega} \nabla^2 \zeta \, d\omega = \oint_L \frac{\partial \zeta}{\partial m} \, ds = -\frac{p}{T} \Omega \quad (3.5.2)$$

— это уравнение равновесия части Ω мембраны (m — единичный вектор внешней нормали к L).

Представим теперь, что закрепленная по контуру Γ_0 мембрана несет закрепленные на ней твердые диски S_1, S_2, \dots, S_n , ограниченные контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$; диски могут смещаться лишь поступательно в направлении прогиба мембраны (рис. 28). Область S , занятая веществом мембраны, теперь ограничена совокупностью Γ_* контуров — внешнего Γ_0 и внутренних $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Задача о равновесии сводится к решению в n -связной области S краевой задачи, вполне аналогичной задаче кручения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \zeta(x, y) &= -\frac{p}{T}; \quad \zeta = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \zeta &= \gamma_k \quad \text{на } \Gamma_k, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Рис. 28.

где γ_k — наперед неизвестные постоянные. Ее решение, подобно (3.3.5), представимо в виде

$$\zeta(x, y) = \zeta_0(x, y) + \sum_{k=1}^n \gamma_k \zeta_k(x, y), \quad (3.5.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \zeta_0 &= -\frac{p}{T}, \quad \zeta_0 = 0 \quad \text{на } \Gamma_*, \\ \nabla^2 \zeta_k &= 0, \quad \zeta_k = \delta_{ks} \quad \text{на } \Gamma_s, \quad \zeta_k = 0 \quad \text{на } \Gamma_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.5)$$

Задача о кручении полностью отождествляется с задачей равновесия мембраны, если принять

$$\Phi(x, y) = 2 \frac{T}{p} \zeta(x, y), \quad C_k = 2 \frac{T}{p} \gamma_k. \quad (3.5.6)$$

Сопоставление с мембраной делает очевидными результаты проведенного в пп. 3.1—3.4 рассмотрения задачи о кручении. Так, горизонтальям $\xi = \text{const}$ рельефа холма, образуемого поверхностью мембраны, соответствует семейство траекторий касательных напряжений $\Phi(x, y) = \text{const}$; горизонтали сгущаются в местах резкого изменения рельефа — это места концентрации напряжений в задаче кручения.

Объем V холма ограничен изогнутой поверхностью мембраны и «плоскогорий», образуемых дисками; поэтому геометрическая жесткость при кручении пропорциональна этому объему:

$$V = \iint_S \xi(x, y) do + \sum_{t=1}^n S_t \gamma_t = \frac{p}{2T} \left(\iint_S \Phi do + \sum_{t=1}^n C_t S_k \right) = \frac{p}{4T} C.$$

Простое объяснение приобретает также теорема о циркуляции (3.3.6) — это уравнение равновесия (3.5.2) участка мембраны Ω ; действительно, по (3.5.2)

$$\oint_L \frac{\partial \xi}{\partial m} ds = \frac{p}{2T} \oint_L \frac{\partial \Phi}{\partial m} ds = -\frac{p\Omega}{T}, \quad \oint_L \frac{\partial \Phi}{\partial m} ds = -2\Omega,$$

что и требовалось.

Применяя теорему взаимности, легко также установить симметричность матрицы $\|B_{tk}\|$ коэффициентов B_{tk} системы уравнений (3.3.10); обращаясь к мембране, надо проверить равенство

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{\partial \xi_t}{\partial n_k} ds = \oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \xi_k}{\partial n_t} ds. \quad (3.5.7)$$

«Состоянием k » мембраны с дисками назовем такое, в котором поверхностная нагрузка отсутствует ($p = 0$), диску S_k сообщено перемещение $\gamma_k = 1$; при этом все прочие диски остаются неподвижными, а мембрана S изогнется по закону $\xi_k(x, y)$, определяемому решением краевой задачи (3.5.5). Тогда равнодействующая сил натяжения так изогнутой мембраны по контуру Γ_t диска S_t (уравновешиваемая реакцией закрепления этого диска) окажется пропорциональной $\oint_{\Gamma_t} \frac{\partial \xi_k}{\partial n_t} ds$. Равенство (3.5.7)

следует из применения теоремы взаимности к k - и t -состояниям системы. Другое доказательство симметричности матрицы $\|B_{tk}\|$ приведено в п. 3.17.

3.6. Кручение стержня эллиптического сечения. Контуром поперечного сечения является эллипс

$$\Gamma: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (3.6.1)$$

и функция напряжений Φ , обращающаяся в нуль на L_0 , может быть представлена в виде

$$\Phi = A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Остается подобрать постоянную A так, чтобы удовлетворялось уравнение Пуассона (3.1.8):

$$\nabla^2 \Phi = -2A \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = -2, \quad \Phi = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (3.6.2)$$

Теперь находим

$$\tau_{xz} = -\frac{2Gaa^2}{a^2 + b^2} y, \quad \tau_{yz} = \frac{2Gab^2}{a^2 + b^2} x. \quad (3.6.3)$$

Максимальное касательное напряжение имеет место на контуре в концах малой полуоси — в точках контура Γ , ближайших к центру сечения; при $a > b$ оно равно

$$\tau_{\max} = \frac{2Gaa^2 b}{a^2 + b^2}. \quad (3.6.4)$$

Траектории касательных напряжений $\Phi = \text{const}$ представляются семейством эллипсов, подобных и подобно расположенных контурному эллипсу Γ , сгущающихся в области, примыкающей к концу полуоси b . Вектор касательного напряжения имеет направление касательной к эллипсу семейства, проходящего через рассматриваемую точку в сторону вращения от оси x к оси y [см. знаки в формулах (3.6.3)].

Далее имеем

$$\begin{aligned} \psi &= \Phi + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)} (x^2 - y^2) = \\ &= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)} \operatorname{Im} i (x + iy)^2 \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

и по (3.2.6), отбрасывая аддитивную постоянную, находим де-планацию

$$w = \alpha \frac{a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)} \operatorname{Re} i (x + iy)^2 = -\alpha \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy. \quad (3.6.6)$$

Линии $w = \text{const}$, определяющие рельеф поперечного сечения скручиваемого стержня, представляют семейства гипербол $xy = \text{const}$, как представлено на рис. 29, воспроизводимом из мемуара Сен-Венана.

Геометрическая жесткость при кручении, вычисляемая по формуле (3.4.3), оказывается равной

$$C = \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} \iint_S \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) d\sigma = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{4I_x I_y}{I_x + I_y} = \frac{4I_p}{I_p}, \quad (3.6.7)$$

где $I_x = \frac{1}{4} \pi a b^3$, $I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$ — моменты инерции поперечного сечения, I_p — полярный момент инерции.

В случае круглого поперечного сечения депланация отсутствует, а жесткость при кручении равна полярному моменту инерции. Сен-Венан первый указал на ошибочность отождествления геометрической жесткости при кручении с полярным моментом инерции (Кулон) для стержней с поперечным сечением, отличным от кругового.

3.7. Неравенства для жесткости при кручении. Далее жесткость при кручении стержней любого односвязного сечения сравнивается с жесткостью круглого и эллиптического стержня. С этой целью жесткость при кручении представим, используя (3.2.5) и (2.5.5), в виде

$$C = 2 \iint_S \Phi \, d\omega = 2 \iint_S \psi \, d\omega - I_p = 2 \oint_{\Gamma} \psi \, d\omega + \oint_{\Gamma} \psi \frac{\partial \Phi}{\partial s} \, ds - I_p.$$

Теперь, обратившись к (2.1.10) и вспомнив, что Φ равно нулю на границе, имеем

$$\begin{aligned} 2 \oint_{\Gamma} \psi \, d\omega &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) (x n_x + y n_y) \, ds = \\ &= \frac{1}{2} \iint_S (3x^2 + 3y^2 + x^2 + y^2) \, d\omega = 2I_p, \end{aligned}$$

так что по (2.1.12)

$$C = I_p - \oint_{\Gamma} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds. \quad (3.7.1)$$

Вместе с тем

$$\oint_{\Gamma} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, ds = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \psi^2}{\partial n} \, ds = \frac{1}{2} \iint_S \nabla^2 \psi^2 \, d\omega = \iint_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] d\omega, \quad (3.7.2)$$

так как $\nabla^2 \psi^2 = 2 \nabla \psi \cdot \nabla \psi$. Этим доказывается, что жесткость стержня меньше его полярного момента инерции:

$$C < I_p, \quad (3.7.3)$$

если исключить случай равенства, возможный только для круглого стержня ($\psi = \text{const}$). Доказана также более содержатель-

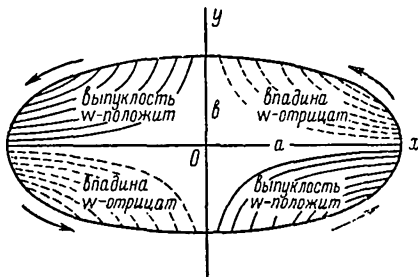


Рис. 29.

ная теорема: при заданной площади стержень круглого сечения имеет наибольшую жесткость (Полиа, 1948).

Более точную оценку может дать сравнение жесткости при кручении с жесткостью не круглого сечения, а некоторого сечения S_0 , для которого известно решение задачи кручения. Полагая

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + f(x, y), \quad (3.7.4)$$

где $\psi_0(x, y)$ — известное решение для S_0 — это гармоническая в S функция, но не удовлетворяющая краевому условию на Γ (краевое условие задачи кручения выполнено на Γ_0); значения ψ_0 , $\partial\psi_0/\partial n$ на Γ известны, так как эта функция задана в области S . Корректирующая гармоническая функция $f(x, y)$ в сумме с $\psi_0(x, y)$ определяет решение $\psi(x, y)$ задачи кручения в S , принимающее значение $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ на Γ .

В формуле (3.7.1) имеем теперь

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial n} \psi ds &= \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial n} \right) (\psi_0 + f) ds = \\ &= \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial n} \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial n} f + \frac{\partial f}{\partial n} \psi_0 \right) ds + \oint_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial n} f ds. \end{aligned}$$

По формуле Грина (см. п. 2.5), поскольку f , ψ_0 — гармонические функции,

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial n} \psi_0 ds = \oint_{\Gamma} f \frac{\partial \psi_0}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma} \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial n} ds - \oint_{\Gamma} \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial n} ds.$$

Поэтому, сославшись на формулы (3.7.1), (3.7.2) и заменив ψ его краевым значением, получаем

$$C = I_p + \int_S \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 d\sigma - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} (x^2 + y^2) d\sigma - \oint_{\Gamma} \nabla f \cdot \nabla f d\sigma. \quad (3.7.5)$$

В неравенстве Е. Л. Николаи (1916) в качестве функции ψ_0 принято выражение

$$\psi_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(I_x I_y)^{3/4}}{I_p} + \frac{I_y - I_x}{2I_p} (x^2 - y^2), \quad (3.7.6)$$

где I_x , I_y , $I_p = I_x + I_y$ — моменты инерции и полярный момент инерции площади S ; это — решение задачи кручения для стержня эллиптического сечения S_0 с такими же моментами инерции, что легко проверить, подставив вместо I_x , I_y , I_p вышеприведен-

ные для эллипса значения (п. 3.6), тогда придем к решению (3.6.5). Имеем теперь

$$\int_S \nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0 \, d\sigma = \frac{(I_y - I_x)^2}{I_p^2} \int_S (x^2 + y^2) \, d\sigma = \frac{(I_y - I_x)^2}{I_p};$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial \psi_0}{\partial n} (x^2 + y^2) \, ds = \frac{I_y - I_x}{I_p} \oint_{\Gamma} (x n_x - y n_y) (x^2 + y^2) \, ds = \frac{2(I_y - I_x)^2}{I_p},$$

и подстановка в (3.7.5) приводит к неравенству Е. Л. Николаи (1916)

$$C = I_p - \frac{(I_y - I_x)^2}{I_p} - \int_S \nabla f \cdot \nabla f \, d\sigma = \frac{4I_x I_y}{I_p} - \int_S \nabla f \cdot \nabla f \, d\sigma \leq \frac{4I_x I_y}{I_p}, \quad (3.7.7)$$

причем знак равенства достигается для стержня эллиптического сечения. Очевидно, что эта оценка точнее, чем (3.7.3), так как правая часть в неравенстве (3.7.7) меньше I_p .

3.8. Кручение стержня прямоугольного сечения. Тема о кручении стержней в течение ста с лишним лет, со времени классического мемуара Сен-Венана, была и остается предметом многочисленных исследований. Накопленные результаты необозримы, а для построения решений использовалось все многообразие точных и приближенных методов математической физики; следует отметить и обратное влияние — задача кручения служила образцом, на котором развивались эти методы и проверялись возможности их эффективного использования. Далее будет приведено небольшое число решений для областей частного вида.

Начнем с рассмотрения задачи кручения для бесконечной полосы — $-\infty \leq x \leq \infty$, $|y| \leq b$. В этом простейшем случае функция напряжений не зависит от x и определяется решением краевой задачи

$$\nabla^2 \Phi = \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = -2; \quad y = \pm b: \quad \Phi = 0,$$

имеющим вид

$$\Phi = b^2 - y^2, \quad (3.8.1)$$

так что

$$\tau_{xz} = -2G\alpha y, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (3.8.2)$$

и жесткость при кручении для области $-a \leq x \leq a$ полосы равна

$$C = 2 \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy = \frac{16}{3} ab^3. \quad (3.8.3)$$

Решение для прямоугольной области $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, сводящееся к краевой задаче

$$\nabla^2 \Phi = -2; \quad x = \pm a, \quad y = \pm b: \quad \Phi = 0, \quad (3.8.4)$$

будем искать (в предположении $a \geq b$) в форме наложения на решение (3.8.1) для полосы корректирующей гармонической функции $f(x, y)$:

$$\Phi = b^2 - y^2 + f(x, y). \quad (3.8.5)$$

Тогда

$$\nabla^2 f = 0; \quad x = \pm a: \quad f(\pm a, y) = y^2 - b^2; \quad y = \pm b: \quad f(x, \pm b) = 0. \quad (3.8.6)$$

Четное по x , y частное решение уравнения Лапласа для прямоугольной области, удовлетворяющее второму условию (3.8.6), представляется произведением

$$A_k \cos \frac{2k+1}{2} \frac{\pi y}{b} \operatorname{ch} \frac{2k+1}{2} \frac{\pi x}{b} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Поэтому, представляя $f(x, y)$ в форме ряда

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{2k+1}{2} \frac{\pi y}{b} \operatorname{ch} \frac{2k+1}{2} \frac{\pi x}{b}, \quad (3.8.7)$$

следует подчинить выбор постоянных условию

$$f(\pm a, y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \frac{2k+1}{2} \frac{\pi y}{b} \operatorname{ch} \frac{2k+1}{2} \frac{\pi a}{b} = y^2 - b^2.$$

Можно определить коэффициенты A_k , умножая обе части этого равенства на $\cos \frac{2s+1}{2} \frac{\pi y}{b}$ и интегрируя по y в пределах $(-b, b)$. Получим

$$A_s \operatorname{ch} \frac{(2s+1)\pi a}{2b} = \frac{32}{\pi^3} \frac{(-1)^{s+1}}{(2s+1)^3} b^2,$$

и ряд

$$\frac{32}{\pi^3} b^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} \cos \frac{(2k+1)}{2b} \pi y$$

является рядом Фурье для заданной в промежутке $(-2b, 2b)$ четной непрерывной функции, представляемой при $0 \leq y \leq b$ отрезком параболы $y^2 - b^2$, а при $b \leq y \leq 2b$ — параболы $b^2 - (2b - y)^2$. Таким образом, в требуемом промежутке $[-b, b]$ его сумма равна $y^2 - b^2$, что и требуется. Приходим к решению для функции напряжений

$$\Phi = b^2 - y^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{(2s+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2s+1)\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{(2s+1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2s+1)\pi y}{2b}. \quad (3.8.8)$$

Геометрическая жесткость при кручении оказывается равной

$$C = 2 \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b \Phi dy = \frac{16}{3} \pi a b^3 \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{(2k+1)\pi a}{2b}}{(2k+1)^5} \right] = \\ = C_0 f_1 \left(\frac{a}{b} \right), \quad (3.8.9)$$

где C_0 — жесткость бесконечной полосы (3.8.3). Максимум касательного напряжения имеет место в точках контура, ближайших к центру прямоугольника. Он равен

$$\tau_{\max} = \left| \tau_{xz} \right|_{\substack{x=0 \\ y=\pm b}} = \\ = 2Gab \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^2 \operatorname{ch} \frac{(2s+1)\pi a}{2b}} \right] = \tau_{\max}^0 f_2 \left(\frac{a}{b} \right). \quad (3.8.10)$$

Через C_0 , τ_{\max}^0 обозначены значения для полосы. Приводим пересчитанную по данным Сен-Венана небольшую табличку значений функций f_1 , f_2 .

Таблица 11

$\frac{a}{b}$	1,00	1,25	1,50	2	3	4	5	10	∞
$f_1 \left(\frac{a}{b} \right)$	0,420	0,514	0,584	0,681	0,783	0,838	0,870	0,932	1
$f_2 \left(\frac{a}{b} \right)$	0,675	0,775	0,85	0,93	0,985	0,995	1	1	1

3.9. Решения в конечном виде. Большое число решений в конечном виде получено Сен-Венаном. Задается гармоническая функция $\psi(x, y)$, и разыскиваются контуры, на которых

$$\Phi = \psi(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{const} = 0. \quad (3.9.1)$$

Ограничимся двумя примерами.

а) Равносторонний треугольник. Задаемся гармоническим полиномом ψ третьей степени

$$\Phi = A(x^3 - 3xy^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + D.$$

Подобрав $A = -\frac{1}{6a}$, $D = \frac{2}{3}a^2$, имеем

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{1}{6a}(x^3 - 3xy^2 + 3ax^2 + 3ay^2 - 4a^3) = \\ &= \frac{1}{6a}(a-x)(x+2a+y\sqrt{3})(x+2a-y\sqrt{3}),\end{aligned}\quad (3.9.2)$$

так что Φ обращается в нуль на прямых

$$x-a=0, \quad x+2a \pm y\sqrt{3}=0,$$

образующих равносторонний треугольник с высотой $3a$ (см. рис. 30, на котором изображено семейство траекторий касательных напряжений $\Phi = \text{const}$).

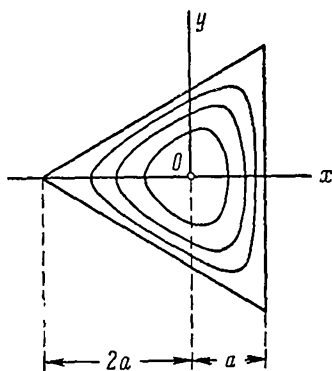


Рис. 30.

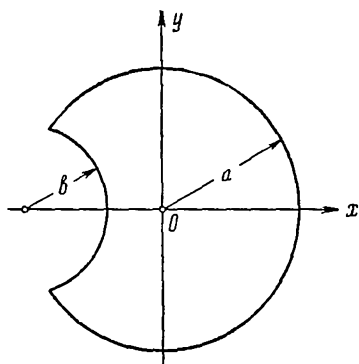


Рис. 31.

б) Круглый стержень с продольной круговой выточкой (Вебер). Функция Φ в полярных координатах задается в виде

$$\Phi = Ar \cos \theta + B \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{2}r^2 + D. \quad (3.9.3)$$

Уравнение контура окружности радиуса a с круговой выточкой радиуса b , центр которой расположен на окружности, при выборе начала полярной системы координат в центре выточки можно записать в виде (рис. 31)

$$(b^2 - r^2)(r - 2a \cos \theta) = r \left(b^2 - 2ab^2 \frac{\cos \theta}{r} + 2ar \cos \theta - r^2 \right),$$

и поэтому функция

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(b^2 - 2ab^2 \frac{\cos \theta}{r} + 2ar \cos \theta - r^2 \right), \quad (3.9.4)$$

имеющая требуемый вид (3.9.3), является решением задачи кручения для рассматриваемой области. Касательное напряжение в точках оси x равно

$$\tau_{yz}|_{y=0} = -G\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{\theta=0} = -G\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{\theta=0} = G\alpha \left(r - \frac{ab^2}{r^2} - a \right),$$

и при $r = b$ в середине выточки, $r = 2a - b$ в конце диаметра, противоположном началу координат, имеем соответственно

$$\tau_{yz}^{(1)} = G\alpha(b - 2a), \quad \tau_{yz}^{(2)} = G\alpha \left(a - \frac{b^2}{4a} \right)$$

и при $a \gg b$

$$|\tau_{yz}^{(1)}| = 2G\alpha a, \quad \tau_{yz}^{(2)} \approx G\alpha a. \quad (3.9.5)$$

Наличие сколь угодно малой выточки служит причиной концентрации напряжений; касательные напряжения в середине выточки оказались вдвое больше расчетных $G\alpha a$ для круглого вала.

3.10. Двусвязная область. Поперечное сечение скручиваемого стержня является кольцевой областью S , ограниченной извне контуром Γ_0 и изнутри контуром Γ_1 ; площади внутри Γ_0 и Γ_1 обозначаются S_0 и S_1 , так что $S = S_0 - S_1$. Предполагается известным конформное преобразование в S кругового кольца σ плоскости $\xi = \rho e^{i\vartheta}$; функция, осуществляющая это преобразование, задается в σ рядом Лорана

$$z = x + iy = \omega(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) \xi^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^n (\alpha_n + i\beta_n) e^{in\vartheta}. \quad (3.10.1)$$

Через ρ_0, ρ_1 обозначаются радиусы окружностей γ_0, γ_1 , переходящих в этом преобразовании в Γ_0, Γ_1 .

Функция напряжений Φ , решающая задачу кручения для области S , представляется в виде (3.3.5):

$$\Phi = \Phi_0(x, y) + C_1 \Phi_1(x, y), \quad (3.10.2)$$

причем по (3.3.2) — (3.3.4)

$$\nabla^2 \Phi_0 = -2; \quad \Phi_0 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \quad \Gamma_1; \quad (3.10.3)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0; \quad \Phi_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0; \quad (3.10.4)$$

$$\Phi_1 = 1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1.$$

Из условий (3.10.4) сразу же следует, что

$$\Phi_1 = \frac{1}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (3.10.5)$$

Предполагая известной функцию напряжений $\Phi_*(x, y)$ для сплошного стержня (для области S_0), представим $\Phi_0(x, y)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) = \\ = \Phi_*(x, y) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho^k}{\rho_0^k} - \frac{\rho_0^k}{\rho^k} \right) (b_k \cos k\vartheta + b'_k \sin k\vartheta) - \frac{b_0}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_0}} \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (3.10.6)$$

Действительно, лапласиан над Φ_0 равен -2 и эта функция равна нулю на Γ_0 ; остается подчинить выбор постоянных b_k , b'_k , b_0 условию (3.10.3) на Γ_1 . Через

$$\begin{aligned} \chi(\vartheta) = \Phi_*(x, y)|_{\Gamma_1} = \\ = \Phi_* \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_1^n (\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta), \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_1^n (\alpha_n \sin n\vartheta + \beta_n \cos n\vartheta) \right) \end{aligned}$$

обозначим значение $\Phi_*(x, y)$ на Γ_1 (на γ_1) — это 2π -периодическая функция ϑ , представляемая тригонометрическим рядом

$$\chi(\vartheta) = \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (p_k \cos k\vartheta + q_k \sin k\vartheta), \quad (3.10.7)$$

и через коэффициенты этого ряда легко выражаются неизвестные b_0 , b_n , b'_n . Решение (3.10.2) теперь записывается в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = (C_1 - \chi_0) \frac{\ln \frac{\rho}{\rho_0}}{\ln \frac{\rho_0}{\rho_1}} + \\ + \Phi_*(x, y) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_1^k}{\rho^k} \frac{\rho^{2k} - \rho_0^{2k}}{\rho_1^{2k} - \rho_0^{2k}} (p_k \cos k\vartheta + q_k \sin k\vartheta). \end{aligned} \quad (3.10.8)$$

При сохранении первого слагаемого в выражение комплексной функции кручения (3.2.6) вошел бы член, пропорциональный $\ln \zeta$; депланация $\omega(x, y)$ не была бы однозначной. Этим определяется выбор C_1 :

$$C_1 = \chi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_*(x, y) \Big|_{\Gamma_1} d\vartheta. \quad (3.10.9)$$

Переходим к вычислению геометрической жесткости; по (3.4.2) для двусвязной области имеем

$$C = 2\chi_0 S_1 + 2 \int_S \int \Phi(x, y) d\sigma = 2\chi_0 S_1 + C_* - 2 \int_{S_1} \int \Phi_*(x, y) d\sigma - \\ - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_1^k}{\rho_1^{2k} - \rho_0^{2k}} \int_{\rho_1}^{\rho_0} \left(\rho^k - \frac{\rho_0^{2k}}{\rho^k} \right) \rho d\rho \int_0^{2\pi} (p_k \cos k\vartheta + q_k \sin k\vartheta) |\omega'(\xi)|^2 d\vartheta. \quad (3.10.10)$$

Здесь учтено, что при переходе к интегрированию по площади кругового кольца σ элемент площади $d\sigma$ следует заменить произведением элемента площади $\rho d\rho d\vartheta$ кругового кольца на квадрат модуля производной преобразующей функции $|\omega'(\xi)|^2$; через C_* обозначена геометрическая жесткость сплошного стержня (площадь S_0 , ограниченная контуром Γ_0).

Проекция τ_s вектора τ на касательную к траектории касательного напряжения $\Phi = \text{const}$, определяемая по (3.1.12), равна

$$\tau_s = -G\alpha \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{|\omega'(\xi)|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\rho_1^k}{\rho_1^{2k} - \rho_0^{2k}} \frac{\rho^{2k} + \rho_0^{2k}}{\rho^{k+1}} (p_k \cos k\vartheta + q_k \sin k\vartheta) \right], \quad (3.10.11)$$

так как $\delta n = |\omega'(\xi)| \delta \rho$. В частности, на принадлежащих семейству траекторий $\Phi = \text{const}$ контурах Γ_0, Γ_1

$$\left. \begin{aligned} (\tau_s)_0 &= -G\alpha \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{2}{|\omega'(\xi)|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\rho_0} \frac{\rho_1^k \rho_0^k}{\rho_1^{2k} - \rho_0^{2k}} (p_k \cos k\vartheta + q_k \sin k\vartheta) \right]_{\Gamma_0}, \\ (\tau_s)_1 &= -G\alpha \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{|\omega'(\xi)|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\rho_1} \frac{\rho_1^{2k} + \rho_0^{2k}}{\rho_1^{2k} - \rho_0^{2k}} (p_k \cos k\vartheta + q_k \sin k\vartheta) \right]_{\Gamma_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.10.12)$$

Модуль τ вектора касательного напряжения равен абсолютной величине выражения (3.10.11).

3.11. Эллиптическое кольцо. Поперечное сечение S представляет кольцевую область, ограниченную извне и изнутри софокусными эллипсами Γ_0, Γ_1 ; конформное преобразование (3.10.1) кольца σ на эту область осуществляется функцией

$$z = x + iy = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{m}{\xi} \right) = R \left[\left(\rho + \frac{m}{\rho} \right) \cos \vartheta + i \left(\rho - \frac{m}{\rho} \right) \sin \vartheta \right], \quad (3.11.1)$$

где постоянные R, m определяются через полуоси (a_0, b_0) , (a_1, b_1) эллипсов Γ_0, Γ_1 по формулам

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2\rho_1}, & m &= \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0} = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} \rho_1^2; \\ \rho_1 &= \frac{a_1 + b_1}{a_0 + b_0} = \frac{a_0 - b_0}{a_1 - b_1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.11.2)$$

причем радиусы окружностей γ_0, γ_1 , ограничивающих кольцо σ извне и изнутри, приняты равными $\rho_0 = 1, \rho_1 < 1$; итак, $0 < m \leq \rho_1 \leq \rho \leq 1, R > 0$ и семейство эллипсов $\rho = \text{const}$ — софокусное с расстоянием между фокусами $2c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4R\sqrt{m}$.

Функция напряжений $\Phi_*(x, y)$ для сплошного эллипса (3.6.2) в этих обозначениях записывается в виде

$$\Phi_*(x, y) = \frac{R^2}{2(1+m^2)} \left[(1-m^2)^2 - (1-m)^2 \frac{x^2}{R^2} - (1+m)^2 \frac{y^2}{R^2} \right], \quad (3.11.3)$$

и ее значение на эллипсе Γ_1 оказывается равным

$$\begin{aligned} \Phi_* \left(R \left(\rho_1 + \frac{m}{\rho_1} \right) \cos \vartheta, R \left(\rho_1 - \frac{m}{\rho_1} \right) \sin \vartheta \right) = \\ = \chi(\vartheta) = R^2 (1 - \rho_1^2) \frac{\rho_1^2 - m^2}{\rho_1^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{1+m^2} \cos 2\vartheta \right); \end{aligned}$$

так что по (3.10.9), (3.10.8)

$$C_1 = \frac{1}{2} R^2 (1 - \rho_1^2) \frac{\rho_1^2 - m^2}{\rho_1^2}, \quad (3.11.4)$$

$$\Phi(x, y) = \Phi_*(x, y) + \frac{mR^2}{1+m^2} \frac{\rho_1^2 - m^2}{\rho_1^2 + 1} \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho^2 \right) \cos 2\vartheta. \quad (3.11.5)$$

Геометрическая жесткость при кручении определяется по (3.10.10):

$$\begin{aligned} C = C_* + R^2 (1 - \rho_1^2) \frac{\rho_1^2 - m^2}{\rho_1^2} S_1 - 2 \iint_{S_1} \Phi_*(x, y) d\sigma + \\ + 2 \frac{mR^2}{1+m^2} \frac{\rho_1^2 - m^2}{\rho_1^2 + 1} \int_{\rho_1}^1 \left(\frac{1}{\rho} - \rho^3 \right) d\rho \int_0^{2\pi} |\omega'(\zeta)|^2 \cos 2\vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Здесь по (3.11.3)

$$\iint_{S_1} \Phi_*(x, y) d\sigma = \frac{R^2}{2(1+m^2)} \left[(1-m^2)^2 S_1 - (1-m)^2 \frac{l_y^1}{R^2} - (1+m)^2 \frac{l_x^1}{R^2} \right],$$

причем I_x^1, I_y^1 — моменты инерции площади S_1 :

$$S_1 = \pi R^2 \frac{\rho_1^4 - m^2}{\rho_1^2}, \quad I_x^1 = \frac{1}{4} R^2 S_1 \left(\rho_1 - \frac{m}{\rho_1} \right)^2, \quad I_y^1 = \frac{1}{4} R^2 S_1 \left(\rho_1 + \frac{m}{\rho_1} \right)^2.$$

Замечая еще, что

$$\begin{aligned} |\omega'(\xi)|^2 = \omega'(\xi) \bar{\omega}'(\bar{\xi}) &= R^2 \left(1 - \frac{m}{\xi^2} \right) \left(1 - \frac{m}{\bar{\xi}^2} \right) = \\ &= R^2 \left(1 + \frac{m^2}{\rho^4} - \frac{2m}{\rho^2} \cos 2\theta \right) \quad (\xi = x - iy = \rho e^{-i\theta}), \end{aligned}$$

переходим после очевидного вычисления к выражению

$$\begin{aligned} C = C_* - \left\{ R^2 S_1 \left[\frac{m(1-m)^2}{1+m^2} + \frac{1}{2} \left(\rho_1 - \frac{m}{\rho_1} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + 2\pi R^4 \frac{m^2}{1+m^2} \frac{\rho_1^2 - m^2}{\rho_1^2} \frac{(1-\rho_1^2)^2}{1+\rho_1^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.11.6)$$

Величина в скобках определяет уменьшение жесткости, вызываемое присутствием полости S_1 .

3.12. Эксцентрическое кольцо. Поперечное сечение скручиваемого стержня представляет кольцевую область S плоскости z , ограниченную извне окружностью Γ_0 радиуса r_0 , а изнутри эксцентрической окружностью Γ_1 радиуса r_1 ; расстояние между центрами окружностей обозначается e . Функция, осуществляющая конформное преобразование кругового кольца σ плоскости $\xi = \rho e^{i\theta}$ в область S , представляется в виде

$$\begin{aligned} z = x + iy = \omega(\xi) = \frac{\xi}{1 - a\bar{\xi}} = \\ = \frac{\rho(\cos \theta - a\rho) + i\rho \sin \theta}{1 + a^2\rho^2 - 2a\rho \cos \theta}, \end{aligned} \quad (3.12.1)$$

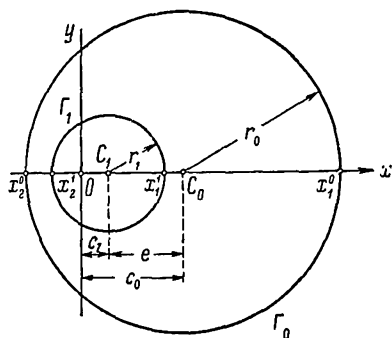


Рис. 32.

где a — вещественная постоянная, причем $a\rho < 1$ в области σ , то есть при $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_0$.

Окружности γ_0, γ_1 радиусов ρ_0, ρ_1 — внешняя и внутренняя границы кольца σ — переходят в окружности Γ_0, Γ_1 — границы области S ; абсциссы точек пересечения этих окружностей с осью x равны соответственно (рис. 32)

$$x_1^0 = \frac{\rho_0}{1 - a\rho_0}, \quad x_2^0 = -\frac{\rho_0}{1 + a\rho_0}; \quad x_1^1 = \frac{\rho_1}{1 - a\rho_1}, \quad x_2^1 = -\frac{\rho_1}{1 + a\rho_1}.$$

Поэтому абсциссы центров окружностей Γ_0 , Γ_1 , их радиусы и расстояние между центрами будут

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}(x_1^0 + x_2^0) = \frac{a\rho_0^2}{1 - a^2\rho_0^2}, \\ c_1 &= \frac{1}{2}(x_1^1 + x_2^1) = \frac{a\rho_1^2}{1 - a^2\rho_1^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.12.2)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{2}(x_1^0 - x_2^0) = \frac{\rho_0}{1 - a^2\rho_0^2}, \quad r_1 = \frac{\rho_1}{1 - a^2\rho_1^2}; \\ e &= c_0 - c_1 = a[r_0^2 - r_1^2 - (c_0^2 - c_1^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.12.3)$$

Три уравнения (3.12.3) позволяют определить параметры ρ_0 , ρ_1 , a по заданным геометрическим размерам поперечного сечения S :

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \frac{2r_0}{\sqrt{1 + 4a^2r_0^2} + 1}, \quad \rho_1 = \frac{2r_1}{\sqrt{1 + 4a^2r_1^2} + 1}, \\ a &= e[(r_0 - r_1 + e)(r_0 + r_1 - e)(r_0 + r_1 + e)(r_0 - r_1 - e)]^{-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12.4)$$

Уравнения окружностей Γ_0 , Γ_1 записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} r_0^2 - (x - c_0)^2 - y^2 &= 0, \\ r_1^2 - (x - c_1)^2 - y^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.12.5)$$

Функция напряжений сплошного круглого стержня с поперечным сечением S_0 записывается в виде [ср. (3.6.2) при $a = b$]

$$\Phi_*(x, y) = \frac{1}{2}[r_0^2 - (x - c_0)^2 - y^2], \quad (3.12.6)$$

и ее значение на Γ_1 по (3.12.5) и (3.12.3) будет

$$\begin{aligned} \Phi_*|_{\Gamma_1} &= \frac{1}{2} \{ [r_0^2 - (x - c_0)^2 - y^2] - [r_1^2 - (x - c_1)^2 - y^2] \} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e}{a} + ex = \frac{1}{2} \frac{e}{a} + \frac{e}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (a\rho_1)^k \cos k\vartheta. \end{aligned} \quad (3.12.7)$$

Здесь использовано легко получаемое по (3.12.1) представление x_{Γ_1} тригонометрическим рядом. Итак, по (3.10.8), (3.10.9)

$$\Phi(x, y) = \Phi_*(x, y) + e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k a^{k-1}}{1 - \alpha^k} \left(\rho^k - \frac{\rho_0^{2k}}{\rho^k} \right) \cos k\vartheta, \quad (3.12.8)$$

где $\alpha = \rho_1^2/\rho_0^2$, причем $C_1 = \frac{e}{2a}$.

Геометрическая жесткость определяется по (3.10.10), причем здесь $C_* = I_p$; далее,

$$\begin{aligned} 2C_1 S_1 - 2 \int \int_{S_1} \Phi_* d\sigma &= \pi r_1^2 \left[\frac{e}{a} - (r_0^2 - c_0^2) + \left(\frac{r_1^2}{2} + c_1^2 \right) - 2c_0 c_1 \right] = \\ &= -\frac{\pi r_1^4}{2} - 2c_1 e \pi r_1^2. \end{aligned}$$

Замечая еще, что

$$\begin{aligned} |\omega'(\xi)|^2 &= (1 - 2a\rho \cos \vartheta + a^2 \rho^2)^{-2} = \\ &= \frac{1 + a^2 \rho^2}{(1 - a^2 \rho^2)^3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a\rho)^k}{(1 - a^2 \rho^2)^2} \left(\frac{1 + a^2 \rho^2}{1 - a^2 \rho^2} + k \right) \cos k\vartheta, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} a^k \int_{\rho_1}^{\rho} \left(\rho^k - \frac{\rho_0^{2k}}{\rho^k} \right) \rho d\rho \int_0^{2\pi} |\omega'(\xi)|^2 \cos k\vartheta d\vartheta &= \\ &= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_0} [(a\rho)^{2k} - (a\rho_0)^{2k}] \left(\frac{1 + a^2 \rho^2}{1 - a^2 \rho^2} + k \right) \frac{\rho d\rho}{(1 - a^2 \rho^2)^2}. \end{aligned}$$

Введением новой переменной $q = 1 - a^2 \rho^2$ подынтегральная функция преобразуется к легко интегрируемому виду

$$\begin{aligned} \int_{\rho_1}^{\rho_0} [(a\rho)^{2k} - (a\rho_0)^{2k}] \left(\frac{1 + a^2 \rho^2}{1 - a^2 \rho^2} + k \right) \frac{\rho d\rho}{(1 - a^2 \rho^2)^2} &= \\ &= \frac{1}{2a^2} \left[(a\rho_0)^{2k} \int_{q_1}^{q_0} \left(k - 1 + \frac{2}{q} \right) \frac{dq}{q^2} + \int_{q_1}^{q_0} d \frac{(1-q)^{k+1}}{q^2} \right], \end{aligned}$$

так что теперь получаем

$$\begin{aligned} 2e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k a^{k-1}}{1 - \alpha^k} \int_{\rho_1}^{\rho_0} \left(\rho^k - \frac{\rho_0^{2k}}{\rho^k} \right) \rho d\rho \int_0^{2\pi} |\omega'(\xi)|^2 \cos k\vartheta d\vartheta &= \\ &= 2\pi \frac{e}{a^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(a\rho_1)^{2k}}{1 - \alpha^k} \left[(k+1) \left(\frac{1-q_1}{q_1} - \frac{1-q_0}{q_0} \right) + \left(\frac{1-q_1}{q_1} \right)^2 - \left(\frac{1-q_0}{q_0} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^k}{1 - \alpha^k} \left[\frac{(1-q_0)^{k+1}}{q_0^2} - \frac{(1-q_1)^2}{q_1^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Заменив q_0, q_1 их значениями и используя формулы связи (3.12.2), (3.12.3) геометрических параметров, приходим к следующему выражению геометрической жесткости:

$$C = C_* - \left[\frac{\pi r_1^4}{2} + 2\pi e^2 r_1^2 + 2\pi \frac{e^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\alpha^k (a\rho_1)^{2k}}{1 - \alpha^k} \right]. \quad (3.12.9)$$

Ряд в этой формуле можно преобразовать к форме, приводимой Н. И. Мусхелишвили:

$$C = C_* - \left[\frac{\pi r_1^4}{2} + 2\pi e^2 r_1^2 + 2\pi e^2 \rho_1^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{(1 - a^2 \rho_1^2 \alpha^s)^2} \right]. \quad (3.12.10)$$

3.13. Вариационное определение функции напряжений. Сохраняя все предпосылки полуобратного метода Сен-Венана, следует считать известными все соотношения задачи кручения, не содержащие варьируемой функции напряжений, в частности принять для перемещений u, v на торцах $z = 0, z = l$ выражения, следующие из (3.2.3):

$$\left. \begin{aligned} z = 0: \quad u = v = 0; \\ z = l: \\ u = -\alpha l y, \quad v = \alpha l x. \end{aligned} \right\} \quad (3.13.1)$$

По принципу минимума дополнительной работы (п. 2.5 гл. IV) напряженное состояние, реализуемое в упругом теле, отличается от всех статически возможных напряженных состояний (удовлетворяющих уравнениям статики в объеме и на поверхности) тем, что оно сообщает минимум функционалу Ψ — дополнительной работе. В задаче кручения по Сен-Венану отличны от нуля только касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} , поэтому Ψ представляется в виде

$$\Psi = \frac{1}{2G} \int_0^l dz \int_S (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) d\sigma - \int_{S_l} \int (u \tau_{xz} + v \tau_{yz}) d\sigma, \quad (3.13.2)$$

причем поверхностный интеграл берется по части границы, на которой перемещения заданы; в рассматриваемом случае она сводится к поверхности S_l торца $z = l$ (на торце $z = 0$ по (3.13.1) равны нулю u, v). Вместе с тем система напряжений τ_{xz}, τ_{yz} , определяемых формулами (3.1.5), тождественно удовлетворяет уравнению статики в объеме (3.1.3); это позволяет записать выражение (3.13.2) в виде

$$\Psi = \frac{1}{2} G l \alpha^2 \int_S \int \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right] d\sigma. \quad (3.13.3)$$

При этом должно выполняться и уравнение статики на поверхности — контурное условие на Γ :

$$\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y = G\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0. \quad (3.13.4)$$

Это значит, что на контурах, ограничивающих поперечное сечение S , минимизирующая функционал Ψ функция Φ должна удовлетворять условиям (3.3.1). Но тогда, повторяя ранее проведенное вычисление, имеем

$$\iint_S \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) d\sigma = -2 \iint_S \Phi d\sigma - 2 \sum_{k=1}^n C_k S_k,$$

и минимизируемый функционал записывается в виде (отбрасываем ненужный постоянный множитель)

$$J = \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 4\Phi \right] d\sigma - 2 \sum_{k=1}^n C_k S_k. \quad (3.13.5)$$

Вариация интеграла от суммы квадратов первых производных представляется в виде

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma &= \iint_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \delta \Phi}{\partial y} \right) d\sigma = \\ &= - \iint_S \nabla^2 \Phi \delta \Phi d\sigma + \oint_{\Gamma_*} \frac{\partial \Phi}{\partial n_*} \delta \Phi ds, \end{aligned}$$

где Γ_* — совокупность контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, ограничивающих S , а n_* — вектор внешней к S нормали (направленный во вне S на Γ_0 и внутрь областей S_k на контурах Γ_k).

Как уже говорилось, минимизирующая функционал J функция Φ должна принимать фиксированное значение (нуль) на Γ_0 и наперед неизвестные постоянные значения C_k на Γ_k . Это значит, что

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0; \\ \delta \Phi &= \delta C_k \quad \text{на } \Gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

причем δC_k произвольны. Приходим к соотношению (n_k — нормаль к Γ_k внутрь S_k)

$$\delta J = - \iint_S \delta \Phi (\nabla^2 \Phi + 2) d\sigma + \sum_{k=1}^n \delta C_k \left(\oint_{\Gamma_k} \frac{\partial \Phi}{\partial n_k} ds - 2S_k \right) = 0. \quad (3.13.6)$$

Итак, вариационная задача (3.13.5) при назначении функций сравнения Φ , удовлетворяющих условиям (3.3.1), эквивалентна ранее сформулированной краевой задаче для уравнения Пуассона (3.1.8); при этом на каждом из контуров Γ_k решение вариационной задачи удовлетворяет условию теоремы о циркуляции, чем обеспечена однозначность депланации $w(x, y)$. Уравнение (3.13.6) — вариационное уравнение способа Галеркина (п. 2.4 гл. IV).

Без труда находится также значение минимума функционала J . Достаточно переписать (3.13.5) в виде

$$J = \frac{1}{2} \left\{ \iint_S \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 2\Phi \right] do - 2 \sum_{k=1}^n C_k S_k \right\} - \left(\iint_S \Phi do + \sum_{k=1}^n C_k S_k \right)$$

и заметить, что выражение в фигурных скобках равно нулю; чтобы убедиться в этом, достаточно повторить только что проведенное преобразование

$$\begin{aligned} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] do &= - \iint_S \Phi \nabla^2 \Phi do + \oint_{\Gamma_*} \frac{\partial \Phi}{\partial n_*} \Phi ds = \\ &= 2 \left(\iint_S \Phi do + \sum_{k=1}^n C_k S_k \right). \end{aligned}$$

Итак, по (3.4.2)

$$J = - \left(\iint_S \Phi do + \sum_{k=1}^n C_k S_k \right) = - \frac{1}{2} C, \quad (3.13.7)$$

то есть достигаемый минимум равен взятой со знаком минус половине геометрической жесткости. Удовлетворив приближенно условию минимума с помощью функции Φ^* и вычислив по ней геометрическую жесткость C^* , имеем

$$\left. \begin{aligned} J^* &= - \frac{1}{2} C^*, \\ J &= - \frac{C}{2} < J^* = - \frac{1}{2} C^*, \\ C &> C^*, \end{aligned} \right\} \quad (3.13.8)$$

то есть C^* дает оценку снизу геометрической жесткости C .

Второй способ вариационной постановки задачи кручения основан на применении принципа минимума потенциальной энер-

гин (п. 2.2 гл. IV). Минимизируемый функционал Q записывается в виде (2.1.3) гл. IV *):

$$Q = \frac{1}{2} Gl \iint_S (\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) d\sigma - \iint_{S^I + S^0} (uF_x + vF_y) d\sigma, \quad (3.13.9)$$

где $S^I + S^0$ — поверхности торцов, на которых в постановке задачи Сен-Венана силы предполагаются заданными. Но перемещения u, v также определены исходными предпосылками решения задачи Сен-Венана и поэтому неварьируемы — второе слагаемое в выражении (3.13.9) отбрасывается. Вместе с тем

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right),$$

так что, не учитывая множитель $Gl\alpha^2$, приходим к задаче о минимизации интеграла

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2 \right] d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma + \iint_S \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\sigma + \frac{1}{2} I_p. \end{aligned} \quad (3.13.10)$$

Его вариация равна

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right] d\sigma = \\ &= - \iint_S \delta \varphi \nabla^2 \varphi d\sigma + \oint_{\Gamma_*} \delta \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + x n_y - y n_x \right) ds, \end{aligned} \quad (3.13.11)$$

и уравнения Эйлера этой вариационной задачи сводятся к краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа:

$$\text{в } S: \quad \nabla^2 \varphi = 0; \quad \text{на } \Gamma_*: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = y n_x - x n_y. \quad (3.13.12)$$

Из выражения δJ_1 следует, что минимизирующая функционал J_1 функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет краевому условию (3.13.12); поэтому, назначая выбор $\varphi(x, y)$ в приближенном решении задачи, можно не заботиться об этом условии.

Геометрическая жесткость при кручении может быть представлена через функцию $\varphi(x, y)$ в виде

$$\begin{aligned} C = \frac{m_z}{G\alpha} &= \frac{1}{G\alpha} \iint_S (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) d\sigma = \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) y \right] d\sigma = \\ &= I_p + \iint_S \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.13.13)$$

*) В формулировке принципа минимума он обозначался буквой Φ , которой здесь обозначена функция напряжений.

Вместе с тем, сославшись на (3.7.1), (3.7.2), (3.2.4), имеем

$$C = I_p - \int_S \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma = I_p - \int_S \int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma.$$

Поэтому, возвращаясь к (3.13.10), имеем

$$J_1 = \frac{1}{2} (I_p - C) + C - I_p + \frac{1}{2} I_p = \frac{1}{2} C, \quad (3.13.14)$$

так что достигаемый функционалом J_1 минимум равен половине геометрической жесткости. Поэтому, вычислив жесткость C^{**} с помощью приближенно минимизирующей функционал J_1 функции $\varphi^{**}(x, y)$, приходим к оценке геометрической жесткости сверху

$$J_1^{**} = \frac{1}{2} C^{**} > J_1 = \frac{1}{2} C, \quad C^{**} > C. \quad (3.13.15)$$

Формулы (3.13.7) и (3.13.14), конечно, представляют в случае кручения следствия общих соотношений (2.2.4), (2.5.9) гл. IV.

3.14. Приближенное решение задачи кручения. Далее рассмотрены два примера применения способа Галеркина к решению задач кручения стержней прямоугольного и трапециевидального сечений.

Для случая односвязной области выражение вариации минимизируемого функционала J будет иметь вид

$$\delta J = \int_S (\nabla^2 \Phi + 2) \delta \Phi d\sigma. \quad (3.14.1)$$

1. Прямоугольник. Следуя видоизменению способа Галеркина, предложенному Л. В. Канторовичем, примем

$$\begin{aligned} \Phi &= (b^2 - y^2) X(x), \\ X(\pm a) &= 0, \end{aligned} \quad (3.14.2)$$

чем удовлетворены краевые условия на сторонах $x = \pm a$, $y = \pm b$ прямоугольника. Здесь назначена форма зависимости искомого решения от координаты y , а его зависимость от x определится условием (3.14.1). Можно ожидать, что при $a > b$ это решение будет достаточно точным, так как в нем заключено решение для бесконечной полосы, корректируемое учетом краевых условий при $x = \pm a$.

Теперь

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= -2X(x) + (b^2 - y^2) X''(x), \\ \delta \Phi &= (b^2 - y^2) \delta X(x) \end{aligned}$$

и условие (3.14.1) приводится к виду

$$\int_{-a}^a \delta X(x) dx \int_{-b}^b [(b^2 - y^2) X''(x) - 2X(x) + 2](b^2 - y^2) dy = 0.$$

Выполнив интегрирование по y и отбросив постоянный множитель, придем к соотношению

$$\int_{-a}^a \delta X(x) \left(X'' - \frac{5}{2b^2} X + \frac{5}{2b^2} \right) dx = 0. \quad (3.14.3)$$

Оно должно выполняться при произвольном выборе $\delta X(x)$; поэтому

$$X'' - \frac{5}{2b^2} X + \frac{5}{2b^2} = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения при краевом условии (3.14.2) является

$$X(x) = 1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}}. \quad (3.14.4)$$

Жесткость при кручении оказывается равной

$$C = 2 \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy \int_{-a}^a X(x) dx = \frac{16}{3} ab^3 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{b}{a} \operatorname{th} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b} \right). \quad (3.14.5)$$

В случае квадрата ($b = a$) получаем совпадающее с точностью до трех знаков с точным решением п. 3.8 значение $C = 0,419 \frac{16}{3} b^4$. Меньшая точность достигается для значения максимального касательного напряжения — ошибка в случае квадрата равна примерно 5%. Это — общее свойство всех приближенных методов. Даваемые ими значения интегральных характеристик, естественно, более точны, чем точечные значения производных искомой функции. Просто оценивается объем холма мембраны, труднее знать подробности его рельефа.

Конечно, предложенное решение можно уточнить, задавая $\Phi(x, y)$ зависящей от нескольких разыскиваемых функций, например полагая

$$\Phi(x, y) = (b^2 - y^2) [X_0(x) + y^2 X_1(x) + y^4 X_2(x)], \quad X_k(\pm a) = 0.$$

Для определения функций $X_k(x)$ приходим к системе линейных дифференциальных уравнений с указанными краевыми

условиями; число уравнений системы равно числу неизвестных функций. Вычисление, естественно, усложняется.

В способе Л. В. Канторовича краевая задача для уравнения в частных производных (Пуассона) заменена краевой задачей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Но можно вообще избежать решения дифференциальных уравнений, а свести задачу к линейной алгебраической системе уравнений, задавая целиком форму решения и располагаясь неизвестными введенными в него постоянными. Например, полагаем для прямоугольника

$$\Phi = (b^2 - y^2)(a^2 - x^2)(c_0 + c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 x^2 y^2 + \dots).$$

Тогда

$$\delta\Phi = (b^2 - y^2)(a^2 - x^2)(\delta c_0 + x^2 \delta c_1 + y^2 \delta c_2 + x^2 y^2 \delta c_3 + \dots)$$

и к упомянутой системе линейных уравнений приходим, используя произвольность вариаций δc_k .

Так, для квадрата, сохранив лишь одну постоянную c_0 , имеем

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a dy (\nabla^2 \Phi + 2) \delta\Phi = \\ = 8 \int_0^a dx \int_0^b dy (a^2 - x^2)(a^2 - y^2) [1 - c_0(a^2 - x^2) - c_0(a^2 - y^2)] \delta c_0 = 0 \end{aligned}$$

и после вычисления (отбросив постоянный множитель) приходим к соотношению

$$\left(1 - \frac{8}{5} a^2 c_0\right) \delta c_0 = 0,$$

так что вследствие произвольности вариации δc_0 получаем

$$c_0 = \frac{5}{8a^2}, \quad \Phi = \frac{5}{8} a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$$

с ошибкой для геометрической жесткости ($-1,2\%$), для наибольшего касательного напряжения ($-6,2\%$). Удержав два коэффициента ($c_0, c_1 = c_2$), получили бы для их определения систему двух линейных уравнений; ошибки в определении жесткости и максимального касательного напряжения для такого решения

$$\Phi = a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \left[\frac{1295}{2216} + \frac{525}{4432} (x^2 + y^2) \right]$$

составляют соответственно ($-0,2\%$) и ($+4,3\%$).

Применение способа Л. В. Канторовича дало почти такую же точность уже в первом приближении. Этого можно было

ожидать, так как решение (минимум функционала) разыскивалось в более широком классе функций: функция $X(x)$ не начиналась наперед, а определялась решением построенной для нее вариационной задачи.

2. Трапецеидальное сечение. Конечно, успешная применимость способа Л. В. Канторовича связана с возможностью проинтегрировать получающееся дифференциальное уравнение. Еще одним таким примером может служить случай трапецеидального сечения. Оно ограничено прямыми

$$x = a, \quad x = a + h = b, \quad y \pm x \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Краевые условия удовлетворяются, если выбрать

$$\Phi = (y^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) X(x), \quad X(a) = 0, \quad X(b) = 0.$$

Вычисление дает (после интегрирования по y)

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h} \delta X dx \int_{-x \operatorname{tg} \alpha}^{x \operatorname{tg} \alpha} (\nabla^2 \Phi + 2) (y^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) dy = \\ = \int_a^{a+h} \delta X(x) \left[\frac{16}{15} x^5 X''(x) \operatorname{tg}^5 \alpha + \frac{16}{3} x^4 X'(x) \operatorname{tg}^5 \alpha + \right. \\ \left. + \frac{8}{3} x^3 X(x) \operatorname{tg}^3 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1) - \frac{8}{3} x^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \right] dx, \end{aligned}$$

и это приводит к дифференциальному уравнению типа Эйлера, интегрируемому в квадратурах:

$$x^2 X''(x) + 5x X'(x) + \frac{5}{2} (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) X(x) = \frac{5}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Его решение записывается в виде

$$X(x) = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha} \left[\frac{(a^{\gamma_1} - b^{\gamma_1}) x^{\gamma_2} - (a^{\gamma_2} - b^{\gamma_2}) x^{\gamma_1}}{a^{\gamma_1} b^{\gamma_2} - b^{\gamma_1} a^{\gamma_2}} - 1 \right],$$

где γ_1, γ_2 — корни характеристического уравнения

$$\gamma^2 + 4\gamma - \frac{5}{2} \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 0.$$

Для равносностороннего треугольника ($a = 0, \alpha = \pi/6$) получаем $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -5$, и второй корень надо отбросить, так как функция $\Phi(x, y)$ должна оставаться конечной; вместе с этим отпадает также первое краевое условие (в вершине треугольника). Приходим к решению

$$\Phi = \frac{3}{2} \left(y^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) \left(\frac{x}{b} - 1 \right);$$

это точное решение [ср. с (3.9.2)]; b — высота треугольника.

Случаю равнобедренного прямоугольного треугольника ($\alpha = 45^\circ$) соответствует дифференциальное уравнение

$$x^2 X''(x) + 5xX'(x) = \frac{5}{2}.$$

Ему соответствующее характеристическое уравнение имеет корень $\gamma_1 = 0$ и отбрасываемый корень $\gamma_2 = -4$, а частное решение разыскивается в виде $C \ln x$. Получаем

$$\Phi = \frac{5}{8} (y^2 - x^2) \ln \frac{x}{b}.$$

Вычисляемая по этому решению геометрическая жесткость оказывается равной

$$C = 2 \iint_S \Phi \, d\sigma = \frac{5}{48} b^4 = 0,104b^4,$$

тогда как точное решение (Л. С. Лейбензон), определяемое рядом

$$C = b^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} \frac{1 + \operatorname{ch} k\pi}{\operatorname{sh} k\pi} \right),$$

приводит к такому же числовому результату. Максимальное касательное напряжение в середине гипотенузы будет

$$\tau_{\max} = Ga \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{\substack{x=b \\ y=0}} = \frac{5}{8} Gab = 0,625Gab,$$

тогда как в точном решении числовой множитель равен 0,652.

Можно убедиться, проведя более тщательные вычисления, что определенные по вариации J значения геометрической жесткости дают оценку этой величины снизу, как и должно быть по сказанному в п. 3.13.

3.15. Удлиненные профили. Далее будет использована координатная система, в которой задается опорная кривая Γ^* , положение точки M^* на которой задается дугой σ (криволинейной абсциссой), отсчитываемой вдоль Γ^* от начальной точки M_0^* . Вектор-радиус точки M^* на опорной кривой, единичный вектор касательной к ней в этой точке и единичный вектор нормали (направленной в сторону, противоположную центру кривизны, — противоположно главной нормали) обозначаются $r_0(\sigma)$, t , n , так что

$$t = \frac{dr_0}{d\sigma}, \quad \frac{dt}{d\sigma} = -\frac{n}{\rho}, \quad \frac{dn}{d\sigma} = \frac{t}{\rho}, \quad (3.15.1)$$

где $\frac{1}{\rho}$ — кривизна (рис. 33).

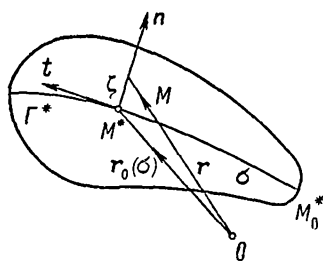


Рис. 33.

Положение любой точки M профиля сечения задается криволинейными координатами σ, ξ , где ξ отсчитывается по той нормали к опорной кривой в точке M^* , на которой расположена точка M ; поэтому вектор-радиус r этой точки определен равенством

$$r = r_0(\sigma) + n\xi, \quad (3.15.2)$$

так что по (3.15.1)

$$dr = t \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) d\sigma + n d\xi, \quad ds^2 = dr \cdot dr = \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right)^2 d\sigma^2 + d\xi^2. \quad (3.15.3)$$

Коэффициенты Ляме и элемент площади в системе координат σ, ξ равны

$$H_\sigma = 1 + \frac{\xi}{\rho}, \quad H_\xi = 1, \quad d\sigma = \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) d\sigma d\xi. \quad (3.15.4)$$

Выражения лапласиана и градиента над скаляром записываются в виде [см. (III. 5.5), (III. 3.8)]

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{1 + \frac{\xi}{\rho}} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{1 + \frac{\xi}{\rho}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right], \\ \nabla \Phi &= \frac{1}{1 + \frac{\xi}{\rho}} t \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + n \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15.5)$$

Минимизируемый в задаче кручения функционал (3.13.5) представляется в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \int_{\delta_1(\sigma)}^{\delta_2(\sigma)} \left[\frac{1}{1 + \frac{\xi}{\rho}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) \Phi \right] d\xi, \quad (3.15.6)$$

причем предположено, что область, занимаемая профилем сечения, определена неравенствами

$$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \quad \delta_1(\sigma) \leq \xi \leq \delta_2(\sigma).$$

1. Сектор тонкого кругового кольца. Для тонкого сектора со средним радиусом ρ , центральным углом 2α и толщиной 2δ

$$-\alpha\rho \leq \sigma \leq \alpha\rho, \quad -\delta < \xi < \delta$$

примем, следуя способу Л. В. Канторовича,

$$\Phi = (\delta^2 - \xi^2) f(\sigma), \quad f(\pm \alpha\rho) = 0.$$

Тогда

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\alpha\rho}^{\alpha\rho} d\sigma \int_{-\delta}^{\delta} \left[\frac{(\delta^2 - \xi^2)^2}{1 + \frac{\xi}{\rho}} f'^2(\sigma) + 4 \left(1 + \frac{\xi}{\rho} \right) f^2(\sigma) \xi^2 - \right. \\ \left. - 4 \left(1 + \frac{\xi}{\rho} \right) f(\sigma) (\delta^2 - \xi^2) \right] d\xi = \\ = \frac{16}{15} \delta^5 \int_0^{\alpha\rho} \left(f'^2 + \frac{5}{2\delta^2} f^2 - 5 \frac{f}{\delta^2} \right) d\sigma = \frac{16}{15} \delta^5 \int_0^{\alpha\rho} L(f) d\sigma,$$

причем отброшены слагаемые порядка $(\delta/\rho)^2$ и более высокого. Пришли к вариационной задаче, для которой уравнение Эйлера записывается, как известно, в виде

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial f'} - \frac{\partial L}{\partial f} = 2 \left(f'' - \frac{5}{2\delta^2} f + \frac{5}{2\delta^2} \right) = 0,$$

так что

$$f = 1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\sigma}{\delta}}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\alpha\rho}{\delta}}, \quad \Phi = (\delta^2 - \xi^2) \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\sigma}{\delta}}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\alpha\rho}{\delta}} \right\}.$$

Естественно, что в рассматриваемом приближении (пренебрежение кривизной) решение повторяет (3.14.4). Геометрическая жесткость по (3.14.5) будет

$$C = \frac{16}{3} \alpha\rho\delta^3 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\delta}{\alpha\rho} \operatorname{th} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\alpha\rho}{\delta} \right).$$

При $\alpha = \pi$ (разрезанное круговое кольцо) получаем

$$C = \frac{16}{3} \pi\rho\delta^3 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\delta}{\pi\rho} \operatorname{th} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\pi\rho}{\delta} \right) \approx \frac{16}{3} \pi\rho\delta^3 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\delta}{\pi\rho} \right),$$

тогда как жесткость целого кольца равна

$$C_* = \frac{1}{2} \pi [(\rho + \delta)^4 - (\rho - \delta)^4] = 4\pi (\rho^2 + \delta^2) \rho\delta \approx 4\pi\rho^3\delta,$$

так что

$$\frac{C}{C_*} = \frac{4}{3} \frac{\delta^2}{\rho^2} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\delta}{\pi\rho} \right), \quad C \ll C_*.$$

2. Симметричный авиационный профиль. Ограничивающие эту область, симметричную относительно оси x , кривые, задаваемые уравнениями (рис. 34)

$$y = a\psi\left(\frac{x}{b}\right), \quad y = -a\psi\left(\frac{x}{b}\right), \quad (3.15.7)$$

касаются в начале координат оси y и пересекают ось x в точках 0 и b .

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \infty.$$

Предполагается также, что производная $\psi'(t)$ непрерывна и обращается в промежутке $(0, 1)$ в нуль один раз при $t = t_*$; величина b определяет хорду профиля, $2a\psi(t_*)$ — его толщину; предполагается, что $a \ll b$ (тонкий профиль). Перечисленными условиями удовлетворяют кривые

$$\psi(t) = t^m (1 - t^p)^q,$$

причем $0 < m < 1$, $p > 0$, $q > 0$, $t = 0$
 $t_* = \left(1 + \frac{pq}{m}\right)^{-1/p}$. Например, полукубической параболе соответствует $p = q = 1$, $m = 1/2$; задание $p = 1$, $q = m = 1/2$ определяет эллипс с осями — большой b и малой a и с центром в точке $(b/2, 0)$.

Опорной кривой является ось x , и минимизируемый интеграл может быть представлен в виде

$$J = \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 dt \int_{-\psi(t)}^{\psi(t)} \left[\lambda^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 - 4a^2 \Phi \right] d\eta \quad \left(\eta = \frac{y}{a} \right),$$

где $\lambda = a/b$ — малый параметр. Ограничимся заданием функции Φ , обращаемой в нуль на контуре области, в простейшей форме:

$$\Phi = Aa^2(\psi^2 - \eta^2), \quad (3.15.8)$$

где A — подлежащая определению постоянная. Приходим к соотношению

$$J(A) = \frac{4}{\lambda} a^4 \int_0^1 dt \int_0^{\psi(t)} [A^2 \lambda^2 \psi^2 \psi'^2 + A^2 \eta^2 - A(\psi^2 - \eta^2)] d\eta$$

и по условию минимума $J'(A) = 0$ получаем

$$A = \frac{1}{1 + 3\lambda^2 \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\int_0^1 \psi^3 \psi'^2 dt}{\int_0^1 \psi^3 dt}. \quad (3.15.9)$$

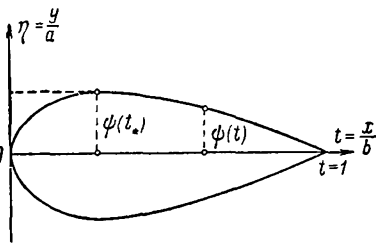


Рис. 34.

Оценка снизу геометрической жесткости приводит к выражению

$$C^- = 4ab \int_0^1 dt \int_0^{\psi(t)} \Phi d\eta = \frac{8}{3} a^3 b A \int_0^1 \psi^3 dt. \quad (3.15.10)$$

Оценку сверху C^+ можно получить, минимизируя интеграл (3.13.10), записываемый в виде

$$J_1 = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 dt \int_0^{\psi(t)} \left[\lambda^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - ab\eta \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + abt \right)^2 \right] d\eta. \quad (3.15.11)$$

Минимизирующая функция назначается в виде

$$\Phi = Bxy + Cby = ab(B\eta t + C\eta),$$

причем внесение линейного слагаемого соответствует переносу начала координат в наперед неизвестную точку $x_0 = -b \frac{C}{B}$ на оси x . Параметры B, C определяются по условиям минимума. Не останавливаясь на этом громоздком вычислении, подробно проведенном в работе Л. С. Лейбензона *), приведем выражение жесткости в случае полукубической параболы:

$$C^+ = \frac{256}{3465} \frac{a^3 b}{1 + \frac{7}{11} \lambda^2}, \quad (3.15.12)$$

тогда как

$$C^- = \frac{256}{3465} \frac{a^3 b}{1 + \frac{11}{13} \lambda^2}, \quad \frac{C^-}{C^+} = \frac{1 + \frac{7}{11} \lambda^2}{1 + \frac{11}{13} \lambda^2} \approx 1 - 0,21 \lambda^2$$

— приближение достаточно точное для длинного и узкого профиля.

3.16. Кручение тонкостенной трубы. Рассматриваемый профиль ограничен извне контуром Γ_0 и изнутри контуром Γ_1 . Контур Γ^* , проходящий посередине между Γ_0 и Γ_1 , принимается за опорную кривую, так что в системе криволинейных координат уравнения контуров σ, ξ могут быть записаны в виде (рис. 35)

$$\Gamma_0: \quad \xi = \frac{1}{2} \delta(\sigma); \quad \Gamma_1: \quad \xi = -\frac{1}{2} \delta(\sigma),$$

где $\delta(\sigma)$ — толщина стенки трубы. Функция напряжений задается в виде

$$\Phi = \frac{C_1}{2} \left(1 - \frac{2\xi}{\delta(\sigma)} \right) \quad (3.16.1)$$

*) Вариационные методы решения задач теории упругости, Собр. соч., т. I, Изд.-во АН СССР, 1951, стр. 324—356.

— она обращается в нуль на Γ_0 и равна неизвестной постоянной C_1 на Γ_1 . Такое задание Φ приемлемо при малой толщине стенки. В мембранной аналогии контур Γ_1 несет диск, получающий поступательное перемещение C_1 , а контур Γ_0 неподвижен и сама мембрана расположена в узкой кольцевой щели между этими контурами; задание Φ в форме (3.16.1) оправдано соображением о пренебрежимости кривизны рельефа изогнутой мембраны поперек щели.

Минимизируемый функционал J по (3.13.5), (3.15.6) записывается в виде

$$J = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma^*} d\sigma \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left[\left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 - 4 \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) \Phi \right] d\xi - 2C_1 S_1. \quad (3.16.2)$$

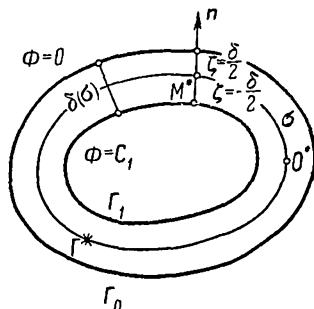


Рис. 35.

Через s^- , s^+ обозначим площади кольцевых областей между контурами (Γ_1 , Γ^*) и (Γ^* , Γ_0); очевидно, что $s^- + s^+ = S$ — площадь профиля. Имеем

$$s^- = \oint_{\Gamma^*} d\sigma \int_{-\delta/2}^0 \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) d\xi = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma^*} \delta d\sigma - \frac{1}{8} \oint_{\Gamma^*} \frac{\delta^2}{\rho} d\sigma, \\ s^+ = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma^*} \delta d\sigma + \frac{1}{8} \oint_{\Gamma^*} \frac{\delta^2}{\rho} d\sigma,$$

так что

$$2C_1 S_1 + 2 \oint_{\Gamma^*} d\sigma \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(1 + \frac{\xi}{\rho}\right) \Phi d\xi = 2C_1 S_1^* + \frac{1}{12} C_1 \oint_{\Gamma^*} \frac{\delta^2}{\rho} d\sigma,$$

где $S_1^* = S_1 + s^-$ — площадь, ограниченная опорным контуром Γ^* . Вычисление дает

$$J = \frac{1}{2} C_1^2 \left[\oint_{\Gamma^*} \frac{d\sigma}{\delta} + \oint_{\Gamma^*} \frac{\delta^2}{\delta^3} \left(\rho^3 \ln \frac{1 + \frac{\delta}{2\rho}}{1 - \frac{\delta}{2\rho}} - \rho^2 \delta \right) d\sigma \right] - 2C_1 \left(S_1^* + \frac{1}{24} \oint_{\Gamma^*} \frac{\delta^2}{\rho} d\sigma \right)$$

или, если пренебречь слагаемыми порядка $(\delta/\rho)^2$,

$$J = \frac{1}{2} C_1^2 \oint_{\Gamma^*} \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{12} \delta'^2 \right) d\sigma - 2C_1 \left(S_1^* + \frac{1}{24} \oint_{\Gamma^*} \frac{\delta^2}{\rho} d\sigma \right). \quad (3.16.3)$$

По условию минимума $\partial J / \partial C_1 = 0$ получаем

$$C_1 = 2 \frac{S_1^* + \frac{1}{24} \oint_{\Gamma^*} \frac{\delta^2}{\rho} d\sigma}{\oint_{\Gamma^*} \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\delta'^2}{12}\right) d\sigma}. \quad (3.16.4)$$

Выражение геометрической жесткости (оценка снизу) по (3.13.8) представляется в виде

$$C = 4 \frac{\left(S_1^* + \frac{1}{24} \oint_{\Gamma^*} \frac{\delta^2}{\rho} d\sigma\right)^2}{\oint_{\Gamma^*} \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\delta'^2}{12}\right) d\sigma}. \quad (3.16.5)$$

Эти формулы в предположении плавной изменяемости толщины стенки ($\delta'(\sigma) \ll 1$) и малости кривизны ($\delta/\rho \ll 1$) записывают в упрощенной форме:

$$J = \frac{1}{2} C_1^2 \oint_{\Gamma^*} \frac{d\sigma}{\delta} - 2C_1 S_1^*, \quad C = \frac{4S_1^{*2}}{\gamma}, \quad \gamma = \oint_{\Gamma^*} \frac{d\sigma}{\delta}, \quad (3.16.6)$$

что соответствует заданию функционала J в виде

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma^*} d\sigma \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 - 4\Phi \right] d\xi - 2C_1 S_1 = \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma^*} d\sigma \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 d\xi - 2C_1 S_1^* \end{aligned} \quad (3.16.7)$$

и пренебрежению разностью $s^+ - s^-$. Надо добавить, что исходное задание функции напряжений Φ в форме линейной зависимости (3.16.1) от ξ ставит под сомнение пригодность уточнений, даваемых соотношениями (3.16.3) и (3.16.5). Например, задав Φ в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} C_1 \left(1 - \frac{2\xi}{\delta}\right) + B \left(1 - \frac{4\xi^2}{\delta^2}\right),$$

так что $\Phi = 0$ на Γ_0 и $\Phi = C_1$ на Γ_1 , и, определив постоянные C_1 , B по условиям минимума функционала J , вычисляемого по (3.16.2), получим выражение геометрической жесткости C , отличающееся от (3.16.5) *).

) Решение, в котором Φ определяется решением дифференциального уравнения Пуассона $\nabla^2 \Phi + 2 = 0$ в форме ряда по степеням параметра δ/l (где l — длина контура Γ^), приведено в гл. VII монографии И. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна (см. литературные указания к гл. VI).

3.17. Многосвязные области. Функция напряжений предполагается представленной в форме (3.3.5), где $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ определены, как решения краевых задач (3.3.2)—(3.3.4). При этом для разыскания неизвестных значений C_k функции напряжений на внутренних контурах Γ_k была получена система линейных уравнений (3.3.10). К этой же системе можно прийти, разыскивая минимум интеграла J по входящим в него постоянным C_k . По (3.13.5) и (3.3.5) имеем

$$J = \frac{1}{2} \int_S \int \left[\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \sum_{k=1}^n C_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \sum_{k=1}^n C_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right)^2 - 4 \left(\Phi_0 + \sum_{k=1}^n C_k \Phi_k \right) \right] do - 2 \sum_{k=1}^n C_k S_k, \quad (3.17.1)$$

и условия минимума записываются в виде

$$\frac{\partial J}{\partial C_s} = \sum_{k=1}^n C_k \int_S \int \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) do - 2 \left\{ S_s + \int_S \int \left[\Phi_s - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) \right] do \right\} = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^n C_k B_{ks} - B_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (3.17.2)$$

где обозначено:

$$B_{ks} = \int_S \int \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) do = \oint_{\Gamma^*} \Phi_k \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma_k} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n_k} ds, \quad (3.17.3)$$

$$\begin{aligned} B_s &= 2 \left\{ S_s + \int_S \int \left[\Phi_s - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) \right] do \right\} = \\ &= 2 \left\{ S_s + \int_S \int \left[\Phi_s - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Phi_s \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \Phi_s \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - \Phi_s \nabla^2 \Phi_0 \right) \right] do \right\} = \\ &= 2S_s - \oint_{\Gamma^*} \Phi_s \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} ds = 2S_s - \oint_{\Gamma_s} \frac{\partial \Phi_0}{\partial n_s} ds. \quad (3.17.4) \end{aligned}$$

В этих преобразованиях использованы определения функций $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ по соотношениям (3.3.2)—(3.3.4). Пришли к формулам (3.3.10), причем симметричность матрицы $\|B_{ks}\|$ теперь не требует доказательства (см. п. 3.5).

Легко также проверить, что определитель этой матрицы отличен от нуля (он положителен). Действительно, записав

выражение функции напряжений $\Phi(x, y)$ вместо (3.3.5) в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^n C_k \Phi_k(x, y),$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) d\sigma &= \frac{1}{2} G^1 \alpha^2 \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^n C_k C_s \int_S \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} G^2 \alpha^2 \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^n B_{ks} C_k C_s. \end{aligned}$$

Это — знакоопределенная положительная квадратичная форма переменных C_0, C_1, \dots, C_n ; по теореме Сильвестра положителен определитель ее коэффициентов и все его диагональные миноры, в их числе определитель

$$|B_{ks}| \quad (k, s = 1, 2, \dots, n).$$

Как пример рассмотрим трехсвязный профиль, представляющий тонкостенную трубу с перемычкой. Вводимые в рассмотрение опорные кривые $\Gamma_1^*, \Gamma_{12}^*, \Gamma_2^*$ являются дугами ACB, BA, BDA ; абсциссы на них обозначаются $\sigma_1, \sigma_{12}, \sigma_2$. Наружный

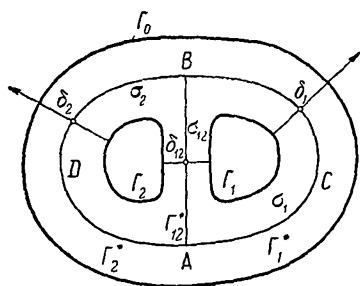


Рис. 36.

контур Γ_0 и контуры отверстий Γ_1, Γ_2 при этом задаются следующими значениями координаты ζ (рис. 36):

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_0: \quad \zeta &= \frac{\delta_1}{2} \quad \text{при } \sigma = \sigma_1, \quad \zeta = \frac{\delta_2}{2} \quad \text{при } \sigma = \sigma_2, \\ \Gamma_1: \quad \zeta &= -\frac{\delta_1}{2} \quad \text{при } \sigma = \sigma_1, \quad \zeta = \frac{\delta_{12}}{2} \quad \text{при } \sigma = \sigma_{12}, \\ \Gamma_2: \quad \zeta &= -\frac{\delta_2}{2} \quad \text{при } \sigma = \sigma_2, \quad \zeta = -\frac{\delta_{12}}{2} \quad \text{при } \sigma = \sigma_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (3.17.5)$$

Это позволяет назначить функцию напряжений в виде

$$\Phi(\sigma, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{2} C_1 \left(1 - \frac{2\zeta}{\delta_1} \right) & \text{при } \sigma = \sigma_1, \\ \frac{1}{2} C_1 \left(1 + \frac{2\zeta}{\delta_{12}} \right) + \frac{1}{2} C_2 \left(1 - \frac{2\zeta}{\delta_{12}} \right) & \text{при } \sigma = \sigma_{12}, \\ \frac{1}{2} C_2 \left(1 - \frac{2\zeta}{\delta_2} \right) & \text{при } \sigma = \sigma_2. \end{cases} \quad (3.17.6)$$

Интеграл по занятой материалом площади S профиля представ-

ляется суммой трех интегралов

$$\int_{\Gamma_1^*} d\sigma_1 \int_{-\delta_{12}/2}^{\delta_{12}/2} (\dots) d\zeta + \int_{\Gamma_{12}^*} d\sigma_{12} \int_{-\delta_{12}/2}^{\delta_{12}/2} (\dots) d\zeta + \int_{\Gamma_2^*} d\sigma_2 \int_{-\delta_{12}/2}^{\delta_{12}/2} (\dots) d\zeta,$$

и выражение функционала J по (3.16.7) может быть записано в виде

$$J = \frac{1}{2} \left[C_1^2 \int_{\Gamma_1^*} \frac{d\sigma_1}{\delta_1} + (C_1 - C_2)^2 \int_{\Gamma_{12}^*} \frac{d\sigma_{12}}{\delta_{12}} + C_2^2 \int_{\Gamma_2^*} \frac{d\sigma_2}{\delta_2} \right] - 2C_1 S_1^* - 2C_2 S_2^*. \quad (3.17.7)$$

Постоянные C_1 , C_2 находятся теперь из системы двух линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial C_1} &= C_1 \left(\int_{\Gamma_1^*} \frac{d\sigma_1}{\delta_1} + \int_{\Gamma_{12}^*} \frac{d\sigma_{12}}{\delta_{12}} \right) - C_2 \int_{\Gamma_{12}^*} \frac{d\sigma_{12}}{\delta_{12}} - 2S_1^* = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial C_2} &= -C_1 \int_{\Gamma_{12}^*} \frac{d\sigma_{12}}{\delta_{12}} + C_2 \left(\int_{\Gamma_2^*} \frac{d\sigma_2}{\delta_2} + \int_{\Gamma_{12}^*} \frac{d\sigma_{12}}{\delta_{12}} \right) - 2S_2^* = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.17.8)$$

При обозначениях

$$\int_{\Gamma_1^*} \frac{d\sigma_1}{\delta_1} = \gamma_1, \quad \int_{\Gamma_{12}^*} \frac{d\sigma_{12}}{\delta_{12}} = \gamma_{12}, \quad \int_{\Gamma_2^*} \frac{d\sigma_2}{\delta_2} = \gamma_2$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{\Delta} [S_1^* (\gamma_{12} + \gamma_2) + S_2^* \gamma_{12}], \quad C_2 = \frac{2}{\Delta} [S_1^* \gamma_{12} + S_2^* (\gamma_{12} + \gamma_1)], \\ \Delta &= (\gamma_1 + \gamma_2) \gamma_{12} + \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.17.9)$$

Геометрическая жесткость профиля определяется формулой

$$C = 2C_1 S_1^* + 2C_2 S_2^* = \frac{4}{\Delta} [(\gamma_{12} + \gamma_2) S_1^{*2} + 2\gamma_{12} S_1^* S_2^* + (\gamma_{12} + \gamma_1) S_2^{*2}]. \quad (3.17.10)$$

Касательные напряжения в стенке трубы и в перемычке определяются из соотношений

$$\tau = G\alpha \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right| = \begin{cases} \frac{C_1}{\delta_1} = \frac{2}{\delta_1 \Delta} [S_1^* (\gamma_{12} + \gamma_2) + S_2^* \gamma_{12}] & \text{вдоль } \Gamma_1, \\ \frac{|C_1 - C_2|}{\delta_{12}} = \frac{2}{\delta_{12} \Delta} |S_1^* \gamma_2 - S_2^* \gamma_1| & \text{вдоль } \Gamma_{12}, \\ \frac{C_2}{\delta_2} = \frac{2}{\delta_2 \Delta} [S_1^* \gamma_{12} + S_2^* (\gamma_{12} + \gamma_1)] & \text{вдоль } \Gamma_2, \end{cases} \quad (3.17.11)$$

и в случае симметричного профиля ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $S_1^* = S_2^* = S^*$) напряжение в переборке отсутствует; конечно, удаление переборки не изменяет при этом геометрической жесткости. Это следует из формул (3.17.10), (3.16.6), причем в последней надо заменить S^* и γ на $2S^*$ и 2γ .

Изложенный здесь прием приближенного расчета без труда обобщается на профили произвольной связности; он представляется более простым, чем приемы, основанные на теореме о циркуляции касательного напряжения.

§ 4. Изгиб силой

4.1. Напряжения. В решении Сен-Венана задачи об изгибе стержня силами отличны от нуля компоненты σ_z , τ_{zx} , τ_{yz} тензора напряжений. Нормальное напряжение σ_z представляется формулой (1.4.6):

$$\sigma_z = -\left(\frac{P}{I_y} x + \frac{Q}{I_x} y\right)(l - z), \quad (4.1.1)$$

а уравнения статики в объеме и на поверхности (на контуре поперечного сечения стержня) записываются в виде [см. (1.5.1), (1.5.3)]

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\left(\frac{P}{I_y} x + \frac{Q}{I_x} y\right), \quad \tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y = 0. \quad (4.1.2)$$

Распределение напряжений, определяемое этими соотношениями, статически эквивалентно изгибающим моментам

$$M_x = -Q(l - z), \quad M_y = P(l - z) \quad (4.1.3)$$

в сечении z и поперечным (перерезывающим) силам, в любом сечении равным P , Q , — последнему условию удовлетворяет любая статически возможная, то есть удовлетворяющая уравнениям статики (4.1.2), система напряжений τ_{zx} , τ_{yz} . Крутящий момент m_z , создаваемый этими напряжениями, равен

$$m_z = \int \int_S (x\tau_{yz} - y\tau_{zx}) d\sigma = aQ - bP, \quad (4.1.4)$$

где (a, b) — точка на линии L действия силы $i_1 P + i_2 Q$; он обращается в нуль, если эта линия проходит через центр инерции O поперечного сечения (начало координат), но тогда изгиб, вообще говоря, сопровождается кручением ($\alpha \neq 0$); кручение отсутствует ($\alpha = 0$), когда линия L проходит через центр жесткости x^* , y^* [см. формулу (2.6.1)]. Тогда $m_z \neq 0$; случай $m_z = 0$, $\alpha = 0$ имеет место при условии, что L — прямая, соединяющая центры инерции и жесткости. Например, для поперечного сечения, имеющего ось симметрии, являющуюся линией действия

силы, или поперечного сечения с двумя осями симметрии, когда линия действия проходит через центр инерции.

Определение касательных напряжений требует решения краевых задач, сформулированных в п. 2.1. Однако их среднее значение на любой кривой в плоскости сечения можно найти, основываясь только на уравнениях статики (4.1.2). Действительно, рассмотрим выделенную из S площадь Ω (рис. 37), ограниченную контуром $abca$, составленным из дуги bca контура сечения Γ и дуги γ (ab), проведенной в S . Тогда по (4.1.2)

$$\begin{aligned} \int_{abca} (\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y) ds &= \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) d\omega = \\ &= - \left(\frac{P}{I_y} \iint_{\Omega} x d\omega + \frac{Q}{I_x} \iint_{\Omega} y d\omega \right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\int_{abca} (\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y) ds = \int_{\gamma} (\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y) ds,$$

так как величина под знаком интеграла на Γ (bca) равна нулю. Итак,

$$\int_{\gamma} (\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y) ds = - \left(\frac{P}{I_y} \iint_{\Omega} x d\omega + \frac{Q}{I_x} \iint_{\Omega} y d\omega \right). \quad (4.1.5)$$

В частности, отсекая площадь Ω отрезком γ , параллельным оси y (рис. 37), имеем

$$\begin{aligned} n_x &= -1, \quad n_y = 0, \quad ds = -dy; \\ \iint_{\Omega} x d\omega &= x_{\text{ц}} \Omega, \quad \iint_{\Omega} y d\omega = y_{\text{ц}} \Omega; \quad b = y_2 - y_1 \end{aligned}$$

($x_{\text{ц}}$, $y_{\text{ц}}$ — координаты центра инерции площади Ω , b — длина отрезка γ) и по (4.1.5) приходим к соотношению (Трикоми. 1933*)

$$\int_{y_1}^{y_2} \tau_{zx} dy = b (\tau_{zx})_{\text{ср}} = \Omega \left(\frac{P}{I_y} x_{\text{ц}} + \frac{Q}{I_x} y_{\text{ц}} \right). \quad (4.1.6)$$

При $y_{\text{ц}} = 0$, когда ось x — ось симметрии поперечного сечения, эта формула приводится в курсах сопротивления материалов.

*) В приведенном Трикоми доказательстве не учтено, что формула (4.1.6) следует из чисто статических соображений.

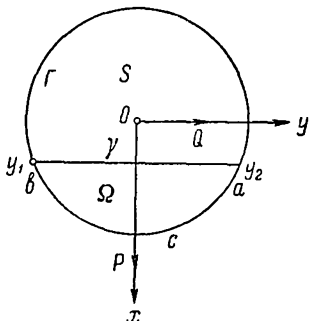


Рис. 37.

Конечно, она выражает равенство нулю суммы проекций на ось x сил, действующих на объем $(l-z)\Omega$, отделенный плоскостью, параллельной yz .

4.2. Изгиб стержня эллиптического поперечного сечения. Вследствие симметрии достаточно рассмотреть случай силы, параллельной оси x , а линию действия силы совместить с осью x ; в противном случае на задачу изгиба наложится уже известное решение задачи кручения (п. 3.6). Распределение касательных напряжений по (2.1.1), (2.1.6), (2.1.7) задается при несущественном изменении обозначений соотношениями

$$\tau_{zx} = \frac{P}{2(1+\nu)I_y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} - x^2 \right), \quad \tau_{yz} = \frac{P}{2(1+\nu)I_y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} - 2\nu xy \right), \quad (4.2.1)$$

причем функция напряжений χ определяется решением задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\text{в } S: \quad \nabla^2 \chi = 0; \quad \text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} = x^2 n_x + 2\nu xy n_y. \quad (4.2.2)$$

На контуре эллипса (3.6.1)

$$\frac{x}{a^2} \frac{dx}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{b^2} = 0, \quad -\frac{x}{a^2} n_y + \frac{y}{b^2} n_x = 0. \quad (4.2.3)$$

Нетрудно сообразить, что краевому условию (4.2.2) можно удовлетворить, задавая гармоническую функцию (она должна быть нечетной по x) в виде

$$\chi = \frac{1}{3} A (x^3 - 3xy^2) + Bx. \quad (4.2.4)$$

Действительно, тогда

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = A [(x^2 - y^2) n_x - 2xy n_y] + B n_x = A \left[x^2 - \left(1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) y^2 \right] n_x + B n_x$$

и условие (4.2.2) можно записать в виде

$$\text{на } \Gamma: \quad A \left[x^2 - \left(1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) y^2 \right] + B = x^2 + 2\nu \frac{a^2}{b^2} y^2 + \lambda \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Справа добавлено слагаемое, обращающееся в нуль на эллипсе; три постоянных λ , A , B разыскиваются из уравнений

$$A = 1 - \frac{\lambda}{a^2}, \quad A \left(1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) = \frac{\lambda}{b^2} - 2\nu \frac{a^2}{b^2}, \quad \lambda = B,$$

так что по (4.2.4)

$$\chi = \frac{(1-2\nu)a^2}{3(3a^2+b^2)} (x^3 - 3xy^2) + \frac{b^2+2a^2(1+\nu)}{3a^2+b^2} a^2 x \quad (4.2.5)$$

и касательные напряжения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{P}{2(1+\nu)I_y} \frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{3a^2+b^2} \left[a^2 - x^2 - \frac{(1-2\nu)a^2y^2}{2(1+\nu)a^2+b^2} \right], \\ \tau_{yz} &= -\frac{a^2(1+\nu)+\nu b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \frac{P}{I_y} xy. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.6)$$

Вдоль полуоси $x=0$ напряжение τ_{zx} распределено по параболическому закону

$$(\tau_{zx})_{x=0} = \frac{Pa^2}{2(1+\nu)I_y} \frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{3a^2+b^2} \left(1 - \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \frac{y^2}{a^2+b^2} \right). \quad (4.2.7)$$

Среднее значение этого напряжения определяется выражением

$$\tau_{cp} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b (\tau_{zx})_{x=0} dy = \frac{Pa^2}{3I_y} = \frac{4}{3} \frac{P}{S} \quad \left(I_y = \frac{\pi}{4} a^3 b, S = \pi ab \right),$$

не зависящим, как следовало ожидать, от коэффициента Пуассона и вычисляемым по элементарной теории [см. (4.1.6)]. Однако отклонение от среднего значения, зависящее от ν и от отношения полуосей эллипса, может быть значительным. Например, при $\nu = 0,25$ это отклонение

$$\frac{1}{\tau_{cp}} (\tau_{max} - \tau_{cp}) = \frac{1}{\tau_{cp}} (\tau_{xz})_{x=0, y=0} - 1 = 0,20 \frac{b^2}{3a^2+b^2}$$

при $b \gg a$ достигает 20%.

4.3. Функция напряжений С. П. Тимошенко. Введение этой функции напряжений (вместо χ) упрощает решение задачи об изгибе симметричного односвязного профиля, нагруженного силой, перпендикулярной оси симметрии. Через Φ обозначим гармоническую функцию, связанную с χ условиями Коши—Римана

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

и введем в рассмотрение функцию F , задав ее соотношением

$$2F(1+\nu) = \Phi + \nu x^2 y - 2(1+\nu)G(y), \quad (4.3.1)$$

причем $G(y)$ будет определено далее. Тогда

$$\nabla^2 F = \frac{\nu}{1+\nu} y - G''(y), \quad (4.3.2)$$

а выражения напряжений (4.2.1) и краевое условие (4.1.2) представятся в виде

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2(1+\nu)I_y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - x^2 \right) = \frac{P}{I_y} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2} x^2 + G'(y) \right], \quad (4.3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{P}{2(1+\nu)I_y} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2\nu xy \right) = -\frac{P}{I_y} \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} n_x - \frac{\partial F}{\partial x} n_y &= \frac{\partial F}{\partial s} = \left[\frac{1}{2} x^2 - G'(y) \right] \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

Уравнение контура, симметричного относительно оси y , может быть представлено в виде $x^2 = 2f(y)$; поэтому достаточно принять $G'(y) = f(y)$, чтобы прийти к краевой задаче для уравнения Пуассона:

$$\text{в } S: \quad \nabla^2 F = \frac{\nu}{1+\nu} y - f'(y); \text{ на } \Gamma: \quad F = 0. \quad (4.3.5)$$

Она эквивалентна задаче об изгибе закрепленной по контуру мембраны, когда нагрузка задана функцией в правой части уравнения (4.3.5). Краевое условие сохраняет вид, если в состав контура кроме дуг, симметричных относительно оси y , входят отрезки прямых $y = \text{const}$, параллельных оси x (на них $dy/ds = 0$).

4.4. Прямоугольное поперечное сечение. Длины сторон, параллельных осям x и y , обозначаются $2a$, $2b$. Достаточно принять теперь $f(y) = \frac{1}{2} a^2$; тогда по (4.3.5)

$$\nabla^2 F = \frac{\nu}{1+\nu} y; \quad F = 0 \text{ при } x = \pm a, y = \pm b. \quad (4.4.1)$$

Напряжения определяются формулами (4.3.3):

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2I_y} (a^2 - x^2) + \frac{P}{I_y} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = - \frac{P}{I_y} \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (4.4.2)$$

Решение разыскивается в форме ряда, удовлетворяющего краевым условиям на сторонах $y = \pm b$:

$$F = \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Тогда для определения неизвестных функций $X_n(x)$ приходим к соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} X_n \right) \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{2b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

причем справа представлено разложение в тригонометрический ряд периодической функции, равной y при $-b < y < b$. Решение получающейся краевой задачи

$$X_n'' - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} X_n = \frac{2b}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad X_n(\pm a) = 0,$$

четное по x , записывается в виде

$$X_n(x) = \frac{2b^3}{\pi^3 n^3} (-1)^n \left(1 - \frac{\text{ch } \frac{n\pi x}{b}}{\text{ch } \frac{n\pi a}{b}} \right).$$

Итак,

$$F = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2b^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (4.4.3)$$

а учитывая соотношение

$$\frac{2b^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{1}{6} (y^3 - b^2 y), \quad |y| \leq b,$$

придем к выражениям напряжений $\left(I_y = \frac{4}{3} a^3 b = \frac{1}{3} a^2 S \right)$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{3P}{2S} \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \right], \\ \tau_{yz} &= \frac{6P}{\pi^2 S} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.4)$$

Элементарное решение, получаемое по формуле (4.1.6), представлено параболическим распределением напряжений

$$\tau'_{zx} = \frac{3P}{2S} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right). \quad (4.4.5)$$

Максимум напряжения τ_{zx} будет иметь место на оси y в точках $y = 0$, $y = \pm b$ наиболее резкого изменения рельефа мембраны:

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{zx})_{\substack{x=0 \\ y=0}} &= \frac{3P}{2S} \left[1 - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \right] = \frac{3P}{2S} f_1 \left(\frac{a}{b} \right), \\ (\tau_{zx})_{\substack{x=0 \\ y=\pm b}} &= \frac{3P}{2S} \left[1 + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^2}{a^2} \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b}} \right] \right] = \frac{3P}{2S} f_2 \left(\frac{a}{b} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.4.6)$$

В книге С. П. Тимошенко и Гудье*) приведена небольшая таблица значений этих функций (для $\nu = 1/4$).

*) S. Timoshenko and J. Goodier, Theory of Elasticity, 1951. Снизу во второй строке таблицы даны значения, вычисленные по приближенному решению (4.7.4).

Таблица 12

$\frac{a}{b}$	2	1	1/2	1/4
$f_1\left(\frac{a}{b}\right)$	0,983	0,940	0,855	0,805
$f_2\left(\frac{a}{b}\right)$	1,033	1,126	1,396	1,988
	1,065	1,146	1,124	2,064

Из таблицы следует, что элементарная теория хорошо согласуется с точной при $a/b \geq 2$ и значительно расходится с ней уже при $a/b \leq 1/2$.

В задаче изгиба длинной узкой полосы ($b \gg a$) можно в первом приближении не учитывать краевых условий на коротких ее сторонах $y = \pm b$; в мембранной аналогии это соответствует предположению, что прогиб (как и нагрузка мембраны) линейно зависит от y . Тогда по (4.4.1), (4.4.2)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\nu}{1+\nu} y, \quad F' = \frac{\nu}{2(1+\nu)} y (x^2 - a^2), \quad (4.4.7)$$

$$\tau_{zx} = \frac{1}{1+\nu} \frac{P}{2I_y} (a^2 - x^2), \quad \tau_{yz} = -\frac{P}{I_y} \frac{\nu}{1+\nu} xy \quad (4.4.8)$$

— касательные напряжения в центре полосы оказываются в $1+\nu$ раз меньше вычисляемых по элементарной теории; при $\nu = 1/4$ они составляют 80% последних, что согласуется с данными вышеприведенной таблицы уже при $b = 4a$. Конечно, это решение непригодно при $y = \pm b$, но, основываясь на нем, можно точное решение дифференциального уравнения (4.4.1) искать в виде

$$F = \frac{\nu}{2(1+\nu)} y (x^2 - a^2) + F_*. \quad (4.4.9)$$

Тогда F_* определяется из краевой задачи

$$\nabla^2 F_* = 0, \quad F_*(\pm a, y) = 0, \quad F_*(x, \pm b) = \pm \frac{\nu b}{2(1+\nu)} (a^2 - x^2),$$

решение которой записывается в виде (см. п. 3.8)

$$F_* = \frac{\nu b}{1+\nu} \frac{16a^3}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi y}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi b}{2a}} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a}. \quad (4.4.10)$$

Напряжения представляются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{3P}{2S} \frac{1}{1+\nu} \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{16}{\pi^2} \frac{\nu b}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi y}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi b}{2a}} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \right], \\ \tau_{yz} &= \frac{3P}{2S} \frac{\nu}{1+\nu} \left[-\frac{2xy}{a^2} + \frac{16}{\pi^2} \frac{b}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi y}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi b}{2a}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.4.11)$$

и при $b > 15a$ наибольшими оказываются не учитываемые элементарной теорией горизонтальные напряжения τ_{yz} на сторонах $x = \pm a$ в точках $y = \pm \eta$, близких к углам прямоугольника. Например,

$$\begin{aligned} \text{при } b = 15a \quad \frac{2S}{3P} (\tau_{xz})_{x=0}^{y=b} &= 5,255, \quad \frac{2S}{3P} (\tau_{yz})_{x=a}^{y=\eta} = 5,202; \quad \eta = 0,875b; \\ \text{при } b = 25a \quad \frac{2S}{3P} (\tau_{xz})_{x=0}^{y=b} &= 8,255, \quad \frac{2S}{3P} (\tau_{yz})_{x=a}^{y=\eta} = 9,233; \quad \eta = 0,917b. \end{aligned}$$

4.5. Вариационная формулировка задачи изгиба. Будем исходить из представления касательных напряжений τ_{yz} , τ_{zx} через функцию напряжений F :

$$\tau_{zx} = \frac{P}{I_y} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2} x^2 + f(y) \right], \quad \tau_{yz} = -\frac{P}{I_y} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (4.5.1)$$

тождественно удовлетворяющего уравнению статики (4.1.2) в объеме; уравнение статики на поверхности *) (на контуре Γ поперечного сечения)

$$\text{на } \Gamma: f_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y = \frac{P}{I_y} \left\{ \frac{\partial F}{\partial s} - \left[\frac{1}{2} x^2 - f(y) \right] n_x \right\} = 0 \quad (4.5.2)$$

не удовлетворяется тождественно. Поэтому, имея в виду применение принципа минимума дополнительной работы, допускающего сравнение статически возможных напряженных состояний, следует в рассмотрение вводить только функции, удовлетворяющие на Γ условию (4.5.2), и, значит,

$$\text{на } \Gamma: \quad \delta \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \delta F = 0, \quad \delta F = \text{const} = \delta F_{\Gamma}. \quad (4.5.3)$$

В принципе минимума дополнительной работы приравняется нулю выражение разности вариаций потенциальной энергии деформации, выраженной через напряжения, и работы вариаций поверхностных сил $\int_O \int (u \delta f_x + v \delta f_y + w \delta f_z) d\sigma$.

*) Поверхностная сила обозначается f ; ее проекции на оси f_x , f_y , f_z .

На боковой поверхности в задаче Сен-Венана это выражение по условию (4.5.3) обращается в нуль. Напряжение σ_z задано его выражением (4.1.1) и поэтому не варьируется в объеме и на торцах, следовательно, $\delta\sigma_z = 0$; значения проекций u , v вектора перемещения, определяемые формулами (2.2.9), не зависят от выбора функции F , и поэтому $\delta u = 0$, $\delta v = 0$. Имеем

$$u(l) - u(0) = -\alpha l y - \frac{\nu P l}{2EI_y} (x^2 - y^2) - \frac{1}{6} \frac{P l^3}{EI_y} + \omega_y^0 l,$$

$$v(l) - v(0) = \alpha l x - \frac{\nu P l}{EI_y} xy - \omega_x^0 l$$

и, учитывая, что $f_x = \mp \tau_{zx}$, $f_y = \mp \tau_{zy}$ при $z = 0$ и $z = l$, можем представить теперь работу вариаций поверхностных сил в форме вариации интеграла по площадям торцов

$$\begin{aligned} \delta \int_S \{ [u(l) - u(0)] \tau_{zx} + [v(l) - v(0)] \tau_{yz} \} do = \\ = -\alpha \frac{P}{I_y} \delta \int_S \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) do - \frac{\nu P l}{2EI_y^2} \delta \int_S \left[(x^2 - y^2) \frac{\partial F}{\partial y} - 2xy \frac{\partial F}{\partial x} \right] do - \\ - \frac{1}{6} \frac{P l^3}{EI_y^2} \delta \int_S \frac{\partial F}{\partial y} do + \frac{lP}{I_y} \delta \int_S \left(\omega_y^0 \frac{\partial F}{\partial y} + \omega_x^0 \frac{\partial F}{\partial x} \right) do, \quad (4.5.4) \end{aligned}$$

причем не выписаны слагаемые, вариация которых нуль, — произведения $u(l) - u(0)$ на не зависящие от F члены τ_{zx} . Слагаемые в третьей строке (4.5.4) преобразуются в контурные интегралы, обращаемые в нуль по (4.5.3).

Вариация потенциальной энергии деформации записывается в виде

$$\begin{aligned} \delta \left[\frac{1}{2E} \int_0^l dz \int_S \sigma_z^2 do + \frac{l}{2G} \int_S (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) do \right] = \\ = \frac{lP^2}{2GI_y^2} \left\{ \delta \int_S \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] do - \delta \int_S [x^2 - 2f(y)] \frac{\partial F}{\partial y} do \right\}, \quad (4.5.5) \end{aligned}$$

и принцип минимума дополнительной работы приводит к задаче минимизации интеграла

$$\begin{aligned} J_2 = \frac{1}{2} \int_S \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - [x^2 - 2f(y)] \frac{\partial F}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left[(x^2 - y^2) \frac{\partial F}{\partial y} - 2xy \frac{\partial F}{\partial x} \right] + 2\alpha G \frac{I_y}{P} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right\} do, \quad (4.5.6) \end{aligned}$$

причем выбор минимизирующей функции F подчинен краевому условию (4.5.2).

Варьируя этот интеграл и проведя надлежащие преобразования интегралов по S в контурные, приходим к выражению

$$\delta J_2 = - \int_S \delta F \left(\nabla^2 F - \frac{vy}{1+v} + f'(y) + 2\alpha G \frac{I_y}{P} \right) do + \\ + \delta F_{\Gamma} \left[\oint_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial n} ds + \oint_{\Gamma} f(y) n_y ds + \alpha G \frac{I_y}{P} \oint_{\Gamma} (x n_x + y n_y) ds \right], \quad (4.5.7)$$

так как остающиеся контурные интегралы оказываются нулями, например:

$$\oint_{\Gamma} [(x^2 - y^2) n_y - 2xyn_x] ds = -4 \int_S y do = 0.$$

Приходим к дифференциальному уравнению Пуассона

$$\text{в } S: \quad \nabla^2 F - \frac{v}{1+v} y + f'(y) + 2\alpha G \frac{I_y}{P} = 0, \quad (4.5.8)$$

которое при $\alpha = 0$ переходит в уравнение (4.3.5). Из него следует

$$\int_S \nabla^2 F do = \oint_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial n} ds = \frac{v}{1+v} \int_S y do - \int_S f'(y) do - 2\alpha G \frac{I_y}{P} S = \\ = - \oint_{\Gamma} f(y) n_y ds - \alpha G \frac{I_y}{P} \oint_{\Gamma} (x n_x + y n_y) ds,$$

так что выражение в квадратных скобках формулы (4.5.7), как следовало ожидать, равно нулю.

4.6. Центр жесткости. Далее рассматриваются поперечные сечения, симметричные относительно оси y и нагруженные силой P , параллельной оси x .

До сих пор использовалась система координат Oxy с началом в центре инерции O стержня; в задаче об изгибе предпочтительно от этого отказаться с целью иметь наиболее простую запись уравнения контура области. Оси новой системы $O'\xi\eta$ направлены параллельно старым, а ее начало расположено на оси симметрии в точке $O'(0, y'_0)$, так что

$$\xi = x, \quad \eta = y - y'_0. \quad (4.6.1)$$

Уравнение линии действия силы $y = b$, координаты центра жесткости ξ^*, η^* и уравнение контура в этой системе осей будут

$$\left. \begin{aligned} \eta = b - y'_0 = b'; \quad \xi^* = x^* = 0, \quad \eta^* = y^* - y'_0; \\ \xi = x = \pm \theta(\eta), \quad [0^2(\eta) = 2f(y)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.2)$$

Далее предполагается, что линия действия силы проходит через центр жесткости, так что $b' = \eta^*$, а постоянная $\alpha = 0$. Тогда вариационное уравнение (4.5.8) способа Галеркина запишется в виде

$$\iint_S \delta F \left[\nabla^2 F - \frac{\nu}{1+\nu} (\eta + y'_0) + \frac{1}{2} \frac{d\theta^2(\eta)}{d\eta} \right] d\omega = 0. \quad (4.6.3)$$

Крутящий момент m_z по (4.5.1), (1.2.4) определится из соотношения

$$\begin{aligned} m_z &= -bP = -(y'_0 + b')P = -(y'_0 + \eta^*)P = \iint_S [x\tau_{zy} - (\eta + y'_0)\tau_{zx}] d\omega = \\ &= -\frac{P}{I_y} \iint_S \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) d\omega - y'_0 P + \frac{1}{2} \frac{P}{I_y} \iint_S \eta (x^2 - \theta^2(\eta)) d\omega. \end{aligned}$$

Преобразуя входящие в него интегралы, имеем

$$-\iint_S \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) d\omega = 2 \iint_S F d\omega - 2 \oint_{\Gamma} F d\omega = 2 \iint_S F d\omega,$$

так как по (4.5.2), (4.6.2) можно принять для односвязной области

$$\text{на } \Gamma: \quad F = 0. \quad (4.6.4)$$

Далее,

$$\iint_S \eta [x^2 - \theta^2(\eta)] d\omega = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta d\eta \int_{-\theta(\eta)}^{\theta(\eta)} [x^2 - \theta^2(\eta)] dx = -\frac{4}{3} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta \theta^3(\eta) d\eta.$$

Записывая еще выражение момента инерции I_y в виде

$$I_y = \iint_S x^2 d\omega = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta \int_{-\theta(\eta)}^{\theta(\eta)} x^2 dx = \frac{2}{3} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \theta^3(\eta) d\eta,$$

приходим к следующему выражению координаты центра жесткости (Дункан (1933), Л. С. Лейбензон (1933)) через функцию напряжений F :

$$\eta^* = \left[\int_{\eta_1}^{\eta_2} \theta^3(\eta) d\eta \right]^{-1} \left[\int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta \theta^3(\eta) d\eta - 3 \iint_S F d\omega \right]. \quad (4.6.5)$$

Для симметричного профиля выражение координаты центра жесткости (2.6.1) через функцию Φ и ϕ задачи кручения также

может быть преобразовано к виду, содержащему одну лишь функцию Φ . Действительно, сославшись на (2.1.10), (2.1.12), имеем

$$\begin{aligned} \int_S x \Phi \, d\sigma &= \int_S \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{2} \Phi \, d\sigma - \int_S \int \frac{x^2}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \theta^2(\eta) \Phi n_x \, ds - \frac{1}{2} \int_S \int x^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, d\sigma = \frac{1}{2} \int_S \int [\theta^2(\eta) - x^2] \frac{\partial \Phi}{\partial x} \, d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \int_S \int [\theta^2(\eta) - x^2] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + y \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \int_S \int y (\theta^2 - x^2) d\sigma + \frac{1}{2} \int_S \int \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \Phi [\theta^2(\eta) - x^2] - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right\} d\sigma = \\ &= -\frac{1}{2} \int_S \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \, d\sigma + \frac{2}{3} \int_{y_1}^{y_2} y \theta^3(\eta) \, dy, \end{aligned}$$

так как $\Phi = 0$ на Γ . Приходим к формуле (Г. Ю. Джанелидзе, 1963)

$$y^* = \left[\int_{\eta_1}^{\eta_2} \theta^3(\eta) \, d\eta \right]^{-1} \left[\int_{y_1}^{y_2} y \theta^3(\eta) \, dy + \frac{3}{2} \int_S \int \left(\frac{v}{1+v} y - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right) \Phi \, d\sigma \right] \quad (4.6.6)$$

или, в системе координат $O'\xi\eta$,

$$\begin{aligned} \eta^* &= \left[\int_{\eta_1}^{\eta_2} \theta^3(\eta) \, d\eta \right]^{-1} \left[\int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta \theta^3 \, d\eta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \int_S \int \left(\frac{v}{1+v} \eta - \frac{1}{2} \frac{d\theta^2}{d\eta} \right) \Phi \, d\sigma + \frac{3}{4} \frac{v}{1+v} y'_0 C \right], \quad (4.6.7) \end{aligned}$$

где C — геометрическая жесткость при кручении.

4.7. Приближенные решения. Рассматривается задача изгиба силой с линией действия, проходящей через центр жесткости, симметричного профиля, ограниченного кривыми $x = \pm \theta(\eta) = \pm c\eta^m$ и отрезками прямых $\eta = b_1$, $\eta = b_2$. Решение вариационного уравнения (4.6.3), удовлетворяющего краевому условию (4.6.4), задается в соответствии со способом Л. В. Канторвича (п. 3.14) в виде

$$F = (c^2 \eta^{2m} - x^2) \omega(\eta), \quad \omega(b_1) = \omega(b_2) = 0. \quad (4.7.1)$$

Приходим к соотношению

$$\int_{b_1}^{b_2} d\eta \delta\omega(\eta) \int_{-c\eta^m}^{c\eta^{1+m}} (c^2\eta^{2m} - x^2) \left[\nabla^2 (c^2\eta^{2m} - x^2) \omega(\eta) + mc^2\eta^{2m-1} - \right. \\ \left. - \frac{v}{1+v} (\eta + y'_0) \right] dx = 0.$$

Из него, проведя интегрирование по x и воспользовавшись произвольностью вариации $\delta\omega$, приходим к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению

$$L(\omega) = -\frac{5}{4c^2\eta^{2m}} \left[mc^2\eta^{2m-1} - \frac{v}{1+v} (\eta + y'_0) \right], \quad (4.7.2)$$

где $L(\omega)$ представляет дифференциальный оператор

$$L(\omega) = \omega'' + \frac{5m}{\eta} \omega' + \frac{5}{2} \left(\frac{2m-1}{\eta^2} m - \frac{1}{c^2\eta^{2m}} \right) \omega. \quad (4.7.3)$$

При любом m решение выражается через бесселевы функции; мы ограничимся рассмотрением простейших случаев, когда интегрирование выполняется элементарно.

а) Прямоугольник ($-a \leq x \leq a$, $-b \leq \eta \leq b$). Здесь $m = 0$, $c = a$, $y'_0 = 0$, $y = \eta$ и решение записывается в виде

$$F = \frac{1}{2} \frac{vb}{1+v} (a^2 - x^2) \left\{ \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\eta}{b}}{\text{sh} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}} - \frac{\eta}{b} \right\} \quad (4.7.4)$$

вместо приведенного выше [см. формулы (4.4.9), (4.4.10)] точного решения. Вычисляемые по (4.7.4) значения касательного напряжения τ_{xx} при $x = 0$, $y = b$, записываемые в форме (4.4.6), для нескольких значений a/b приведены во второй строке таблицы 12 снизу.

б) В случае $m = 1$ (трапецидальное сечение, рассмотренное в п. 3.14 для задачи кручения) дифференциальное уравнение (4.7.2) типа Эйлера интегрируется в квадратурах. Остановимся на двух примерах.

1) Равнобедренный прямоугольный треугольник ($b_1 = 0$, $b_2 = h$, $m = 1$, $c = 1$)

$$F = -\frac{5}{8} \frac{v}{1+v} (\eta^2 - x^2) \left[\frac{1}{3} h \ln \frac{\eta}{h} + \frac{2}{5v} (\eta - h) \right]. \quad (4.7.5)$$

2) Равносторонний треугольник ($b_1 = 0$, $b_2 = h$, $m = 1$, $c = \text{tg } 30^\circ$)

$$F = \frac{1}{2} \frac{v}{1+v} \left(\frac{1}{3} \eta^2 - x^2 \right) \left[h - \eta + \frac{5}{12} \left(\frac{1}{v} - 2 \right) \eta \ln \frac{\eta}{h} \right]. \quad (4.7.6)$$

В обоих случаях начало координат расположено в вершине треугольника. При $\nu = 1/2$ формула (4.7.6) дает точное решение

$$F = \frac{1}{6} \left(\frac{\eta^2}{3} - x^2 \right) (h - \eta),$$

и интересно отметить, что в этом случае центры жесткости и инерции поперечного сечения совпадают — легко проверить по (4.6.5), что $\eta^* = \frac{2}{3}h$.

в) Сегмент параболы $x^2 = \frac{h^2}{4b} \eta$, ограниченный хордой $\eta = b$ длины h . Дифференциальное уравнение (4.7.2), в котором теперь $m = 1/2$, $c^2 = h^2/4b$, $y'_0 = -\frac{3}{5}b$, также интегрируется в элементарных функциях (бесселевы функции с «полупелым» индексом). Получаем

$$F = \left(\frac{h^2}{4b} \eta - x^2 \right) \frac{\nu b}{2(1+\nu)} \left[\frac{3}{5} + \frac{5}{2\lambda} \frac{2+\nu}{\nu} - \frac{\eta}{h} + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2\lambda} \frac{2+\nu}{\nu} \right) \left(\frac{b}{\eta} \right)^{1/2} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\lambda \eta}{b}} - \sqrt{\frac{\lambda \eta}{b}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\lambda \eta}{b}}}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda}} \right] \quad (4.7.7)$$

где $\lambda = 40b^2/h^2$ и выражение координаты центра жесткости (4.6.5) дается формулой

$$\eta^* = \frac{5}{7} + \frac{8}{35} \frac{\nu}{1+\nu} - \frac{4}{5} \frac{\nu}{1+\nu} f_1(\lambda) - \frac{2+\nu}{7(1+\nu)} f_2(\lambda), \\ f_1(\lambda) = \frac{5}{\sqrt{\lambda} \operatorname{cth} \sqrt{\lambda} - 1} - \frac{15}{\lambda}, \quad f_2(\lambda) = \frac{35}{\lambda} [1 - f_1(\lambda)].$$

Вычисление по этим формулам дает ($\nu = 1/4$)

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda = 0 & 0,4 & 2,5 & 4,9 & \infty \\ \frac{\eta^*}{b} = 0,343 & 0,350 & 0,375 & 0,418 & 0,760 \end{array}$$

Интересно отметить, что использование при малых λ табличных значений гиперболических функций (с пятью знаками) не дает правильных числовых результатов; чтобы избежать при вычислении $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ малых разностей, следует удержать в разложении $x \operatorname{cth} x$ в степенной ряд слагаемые до x^{10} включительно, но этого не требуется для построения пятизначных таблиц.

4.8. Авиационный профиль. Уравнения контура профиля в соответствии с обозначениями п. 4.6 записываются в виде (ср. п. 3.15)

$$x = \pm a\theta \left(\frac{\eta}{b} \right) = \pm ag(t), \quad g(t) = t^m (1 - t^p)^q. \quad (4.8.1)$$

Тогда по (3.15.8), (3.15.9)

$$\Phi = Aa^2(g^2 - \xi^2), \quad A = \frac{1}{1 + 3\lambda^2\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\int_0^1 g^3 g'^2 dt}{\int_0^1 g^3 dt}, \quad (4.8.2)$$

причем $\kappa = a\xi$, $\lambda = a/b$.

Используя знание функции напряжений, вычислим по формуле (4.6.7) координату центра жесткости η^* . Чтобы представить результат в просто обозримой форме, введем обозначения

$$\eta_G^* = b \frac{\int_0^1 t g^3(t) dt}{\int_0^1 g^3(t) dt}, \quad \eta_0' = -y_0' = b \frac{\int_0^1 t g(t) dt}{\int_0^1 g(t) dt}. \quad (4.8.3)$$

Величина η_G^* представляет предложенное Гриффитцем приближенное выражение координаты центра изгиба; η_0' — координата центра инерции сечения в системе осей $O'\xi\eta$; очевидно, что она противоположна по знаку координате y_0' начала O' этой системы в осях Oxy с началом в центре инерции.

Теперь, учитывая, что

$$\frac{1}{2} \int_S \int \frac{dg^2(t)}{dt} (g^2 - \xi^2) d\sigma = \int_0^1 \frac{dg^2}{dt} dt \int_0^g (g^2 - \xi^2) d\xi = \frac{4}{3} \int_0^1 g' g^4 dt = 0, \quad (4.8.4)$$

так как $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, и используя выражение (3.15.10) геометрической жесткости, после простого вычисления по (4.6.7) придем к полученному Л. С. Лейбензоном (1933) выражению координаты центра жесткости авиационного профиля:

$$\eta^* = \eta_G^* + \frac{2\nu}{1+\nu} (\eta_G^* - \eta_0') \frac{1}{1 + 3\lambda^2\varepsilon}. \quad (4.8.5)$$

В приложении к удлинённому и узкому профилю множитель $(1 + 3\lambda^2\varepsilon)^{-1}$ отбрасывают.

Перейдем к задаче изгиба авиационного профиля — определению из вариационного уравнения (4.6.3) функции напряжений F , обращающейся в нуль на контуре (4.8.1). Перепишем это уравнение в виде

$$\int_0^1 dt \int_0^{g(t)} \left[\left(\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) F_1 - \frac{\nu}{1+\nu} \left(t - \frac{\eta_0'}{b} \right) + \lambda^2 \frac{dg^2(t)}{dt} \right] \delta F_1 d\xi = 0, \quad (4.8.6)$$

где $F = F_1 a^2 b$, и ограничиваясь варьированием одной лишь постоянной B , полагаем

$$F_1 = B [g^2(t) - \xi^2], \quad \delta F_1 = (g^2(t) - \xi^2) \delta B.$$

Тогда B определяется уравнением

$$B = \left[\int_0^1 dt \int_0^{g(t)} (g^2 - \xi^2) \left(\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) (g^2 - \xi^2) d\xi \right]^{1-} \times \\ \times \left[\frac{\nu}{1+\nu} \int_0^1 dt \int_0^{g(t)} \left(t - \frac{\eta_0'}{b} \right) (g^2 - \xi^2) d\xi \right],$$

причем последнее слагаемое в (4.8.6) отпадает [см. (4.8.4)]. Это вычисление дает (при использовании обозначений (4.8.3))

$$F = -\frac{1}{2b} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\eta_G^* - \eta_0'}{1+3\lambda^2\varepsilon} (g^2 - \xi^2), \quad (4.8.7)$$

и по формуле (4.6.5) теперь легко получить вышеприведенное выражение (4.8.5) координаты центра изгиба.

§ 5. Задача Мичелла

5.1. Постановка задачи. Эта впервые рассмотренная Мичеллом (1900) задача является естественным продолжением задачи Сен-Венана. Рассматривается напряженное состояние в призматическом стержне, равномерно нагруженном по его боковой поверхности; краевые условия (1.1.3), (1.1.4) задачи Сен-Венана на этой поверхности поэтому должны быть записаны в виде

$$\text{на } \Gamma \dots \begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = F_x(s), \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y = F_y(s), \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y = F_z(s), \end{cases} \quad (5.1.1)$$

где Γ , как выше, — контур поперечного сечения, s — отсчитываемая по нему дуга.

Поскольку принимается принцип Сен-Венана, а решение задачи Сен-Венана предполагается известным, можно, не в ущерб общности, считать правый торец $z = l$ свободным от нагружения; в ранее принятых обозначениях (1.2.3), (1.2.4) это условие записывается в виде

$$z = l: \quad P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0; \quad m_x = 0, \quad m_y = 0, \quad m_z = 0. \quad (5.1.2)$$

В рассмотрение вводятся интегральные величины; это проекции главного вектора сил, распределенных по контуру Γ любого

поперечного сечения z ,

$$q_x = \oint_{\Gamma} F_x ds, \quad q_y = \oint_{\Gamma} F_y ds, \quad q_z = \oint_{\Gamma} F_z ds \quad (5.1.3)$$

и их главные моменты относительно осей O_zxyz с началом в этом сечении

$$\mu_x = \oint_{\Gamma} y F_z ds, \quad \mu_y = - \oint_{\Gamma} x F_z ds, \quad \mu_z = \oint_{\Gamma} (x F_y - y F_x) ds. \quad (5.1.4)$$

Как и выше, принято, что O_z — центр инерции сечения, x, y — главные оси инерции в этой точке, z — продольная ось стержня.

Три интегральных уравнения равновесия отрезка стержня $[z, l]$, выражающих обращение в нуль главного вектора приложенных к нему внешних сил, записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} (l-z) q_x - \int_S \tau_{zx} do &= 0, & (l-z) q_y - \int_S \tau_{yz} do &= 0, \\ (l-z) q_z - \int_S \sigma_z do &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.5)$$

Моменты относительно осей системы O_zxyz сил, распределенных по боковой поверхности этого отрезка стержня, равны

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} ds \int_z^l [y F_z - (\xi - z) F_y] d\xi &= (l-z) \mu_x - \frac{1}{2} (l-z)^2 q_y, \\ \oint_{\Gamma} ds \int_z^l [(\xi - z) F_x - x F_z] d\xi &= \frac{1}{2} (l-z)^2 q_x + (l-z) \mu_y, \\ \oint_{\Gamma} ds \int_z^l (x F_y - y F_x) d\xi &= (l-z) \mu_z, \end{aligned}$$

и поэтому остающиеся три интегральных уравнения равновесия будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} (l-z) \mu_x - \frac{1}{2} (l-z)^2 q_y - \int_S y \sigma_z do &= 0, \\ (l-z) \mu_y + \frac{1}{2} (l-z)^2 q_x + \int_S x \sigma_z do &= 0, \\ (l-z) \mu_z - \int_S (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) do &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.6)$$

Следуя идее полуобратного метода Сен-Венана, удовлетворим этим уравнениям, приняв, что τ_{zx} , τ_{yz} линейно, а σ_z квадратично зависят от z :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \tau_{zx}^0 + (l-z) \tau_{zx}^1, \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}^0 + (l-z) \tau_{yz}^1, \\ \sigma_z &= \sigma_z^0 + (l-z) \sigma_z^1 + \frac{1}{2} (l-z)^2 \sigma_z^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.7)$$

где введенные в рассмотрение семь функций $\tau_{zx}^0, \dots, \sigma_z^{(2)}$ должны удовлетворять интегральным условиям

$$\int_S \tau_{zx}^0 do = 0, \quad \int_S \tau_{yz}^0 do = 0, \quad \int_S (x\tau_{yz}^0 - y\tau_{zx}^0) do = 0, \quad (5.1.8)$$

$$\int_S \tau_{zx}^1 do = q_x, \quad \int_S \tau_{yz}^1 do = q_y, \quad \int_S (x\tau_{yz}^1 - y\tau_{zx}^1) do = \mu_z, \quad (5.1.9)$$

$$\int_S \sigma_z^0 do = 0, \quad \int_S y\sigma_z^0 do = 0, \quad \int_S x\sigma_z^0 do = 0, \quad (5.1.10)$$

$$\int_S \sigma_z^1 do = q_z, \quad \int_S y\sigma_z^1 do = \mu_x, \quad \int_S x\sigma_z^1 do = -\mu_y, \quad (5.1.11)$$

$$\int_S \sigma_z^{(2)} do = 0, \quad \int_S y\sigma_z^{(2)} do = -q_y, \quad \int_S x\sigma_z^{(2)} do = -q_x. \quad (5.1.12)$$

Обратимся теперь к уравнениям статики в объеме; подстановка в них выражений (5.1.7) приводит к системам уравнений

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \tau_{xz}^1, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \tau_{yz}^1, \quad (5.1.13)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}^0}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^0}{\partial y} = \sigma_z^1, \quad (5.1.14)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^1}{\partial y} = \sigma_z^{(2)}. \quad (5.1.15)$$

Их следует рассматривать при краевых условиях: для системы (5.1.13):

$$\text{на } \Gamma: \quad \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = F_x(s), \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = F_y(s), \quad (5.1.16)$$

а для систем (5.1.14), (5.1.15) — при условиях:

$$\text{на } \Gamma: \quad \tau_{zx}^0 n_x + \tau_{yz}^0 n_y = F_z(s), \quad (5.1.17)$$

$$\text{на } \Gamma: \quad \tau_{zx}^1 n_x + \tau_{yz}^1 n_y = 0. \quad (5.1.18)$$

5.2. Распределение нормальных напряжений. Обратимся теперь к рассмотрению зависимостей Бельтрами. Сохранив

обозначение ∇^2 плоского оператора Лапласа и представив первый инвариант тензора напряжений σ в виде

$$\sigma = \sigma^0 + (l-z)\sigma_z^1 + \frac{1}{2}(l-z)^2\sigma_z^{(2)}, \quad \sigma^0 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z^0, \quad (5.2.1)$$

можем удовлетворить этим зависимостям, полагая

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma^0}{\partial x^2} = 0, \quad \nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma^0}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial x\partial y} = 0, \quad (5.2.2)$$

$$\frac{\partial^2\sigma_z^1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\sigma_z^1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\sigma_z^1}{\partial x\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2\sigma_z^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\sigma_z^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\sigma_z^{(2)}}{\partial x\partial y} = 0, \quad (5.2.3)$$

$$\nabla^2\tau_{zx}^0 = \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma_z^1}{\partial x}, \quad \nabla^2\tau_{yz}^0 = \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma_z^1}{\partial y}, \quad (5.2.4)$$

$$\nabla^2\tau_{zx}^1 = \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma_z^{(2)}}{\partial x}, \quad \nabla^2\tau_{yz}^1 = \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma_z^{(2)}}{\partial y}, \quad (5.2.5)$$

$$\nabla^2\sigma_z^0 + \frac{2+\nu}{1+\nu}\sigma_z^{(2)} = 0, \quad \nabla^2\sigma_z^1 = 0, \quad \nabla^2\sigma_z^{(2)} = 0, \quad (5.2.6)$$

причем второе и третье соотношения повторяют (5.2.3), а из последних следует, что $\sigma_z^1, \sigma_z^{(2)}$ — линейные функции x, y . Их вид определяется интегральными условиями (5.1.11), (5.1.12):

$$\sigma_z^1(x, y) = \frac{q_z}{S} - \frac{\mu_y}{I_y}x + \frac{\mu_x}{I_x}y, \quad (5.2.7)$$

$$\sigma_z^{(2)}(x, y) = -\left(\frac{q_x}{I_y}x + \frac{q_y}{I_x}y\right). \quad (5.2.8)$$

Итак, распределение нормальных напряжений по поперечному сечению задается соотношением

$$\sigma_z = \sigma_z^0 + (l-z)\left(\frac{q_z}{S} - \frac{\mu_y}{I_y}x + \frac{\mu_x}{I_x}y\right) - \frac{1}{2}(l-z)^2\left(\frac{q_x}{I_y}x + \frac{q_y}{I_x}y\right), \quad (5.2.9)$$

а дифференциальные уравнения (5.2.4), (5.2.5) преобразуются к виду

$$\nabla^2\tau_{zx}^0 = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\mu_y}{I_y}, \quad \nabla^2\tau_{yz}^0 = \frac{1}{1+\nu}\frac{\mu_x}{I_x}, \quad (5.2.10)$$

$$\nabla^2\tau_{zx}^1 = -\frac{1}{1+\nu}\frac{q_x}{I_y}, \quad \nabla^2\tau_{yz}^1 = -\frac{1}{1+\nu}\frac{q_y}{I_x}. \quad (5.2.11)$$

Из сказанного здесь и в п. 5.1 видно, что задача Мичелла распадается на три задачи. Две из них «автономны» в том смысле, что построение их решений не требует решений прочих задач.

Первая состоит в разыскании напряжений $\tau_{zx}^{(1)}, \tau_{yz}^{(1)}$. Она тождественна задаче Сен-Венана об изгибе силой и кручении

стержня. Это следует из совпадения системы уравнений (5.1.9), (5.1.15), (5.1.18), (5.2.11) с системой (1.5.4), (1.5.1), (1.5.3), (1.5.2) после замены q_x, q_y, μ_z соответственно на P, Q, m_z .

Вторая задача — разыскание τ_{zx}^0, τ_{yz}^0 ; она возникает при наличии растягивающих поверхностных сил $F_z(s)$, которыми определяются силовые факторы q_z, μ_x, μ_y , входящие в систему уравнений (5.1.8), (5.1.14), (5.1.17), (5.2.10), определяющих эти напряжения. При некоторой замене обозначений ее можно свести к краевым задачам Сен-Венана и еще к одной краевой задаче для уравнения Лапласа (п. 5.3). Наиболее сложна третья задача — определение $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; попутно находится σ_z^0 . Она сводится к плоской задаче теории упругости (гл. VII), постановка которой требует знания решений двух предшествующих задач.

5.3. Растяжение стержня. Как указывалось выше, наличие продольных поверхностных сил $F_z(s)$ создает нормальное напряжение

$$(l-z)\sigma_z^1 = (l-z)\left(\frac{q_z}{S} - \frac{\mu_y}{I_y}x + \frac{\mu_x}{I_x}y\right) \quad (5.3.1)$$

и касательные напряжения τ_{zx}^0, τ_{yz}^0 , определяемые системой уравнений

$$\frac{\partial \tau_{zx}^0}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^0}{\partial y} = \frac{q_z}{S} - \frac{\mu_y}{I_y}x + \frac{\mu_x}{I_x}y, \quad (5.3.2)$$

$$\nabla^2 \tau_{zx}^0 = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\mu_y}{I_y}, \quad \nabla^2 \tau_{yz}^0 = \frac{1}{1+\nu} \frac{\mu_x}{I_x}, \quad (5.3.3)$$

$$\tau_{zx}^0 n_x + \tau_{yz}^0 n_y = F_z(s), \quad (5.3.4)$$

$$\int_S \int \tau_{zx}^0 do = 0, \quad \int_S \int \tau_{yz}^0 do = 0, \quad \int_S \int (x\tau_{yz}^0 - y\tau_{zx}^0) do = 0. \quad (5.3.5)$$

Нетрудно убедиться, что всякое решение уравнений статики (5.3.2), (5.3.4) в объеме и на поверхности тождественно удовлетворяет первым двум интегральным условиям (5.3.5). Действительно, по (5.3.2)

$$-\mu_y = \int_S \int x \left(\frac{\partial \tau_{zx}^0}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^0}{\partial y} \right) do = \oint_{\Gamma} x (\tau_{zx}^0 n_x + \tau_{yz}^0 n_y) do - \int_S \int \tau_{zx}^0 do,$$

так что по (5.3.4) и (5.1.4)

$$-\mu_y = \oint_{\Gamma} x F_z ds - \int_S \int \tau_{zx}^0 do, \quad \int_S \int \tau_{xz}^0 do = 0.$$

Аналогично проверяется второе соотношение (5.3.5); вместе с тем

$$q_z = \int_S \left(\frac{\partial \tau_{zx}^0}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^0}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_{\Gamma} (\tau_{zx}^0 n_x + \tau_{yz}^0 n_y) ds = \oint_{\Gamma} F_z ds,$$

что соответствует (5.1.3).

Уравнениям статики и зависимостям Бельтрами (5.3.3) можно удовлетворить, полагая

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx}^0 &= G\alpha_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi^0}{\partial y} + \frac{q_z}{2S} x - \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\mu_y}{I_y} x^2 - 2\nu \frac{\mu_x}{I_x} xy \right), \\ \tau_{yz}^0 &= -G\alpha_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^0}{\partial x} + \frac{q_z}{2S} y + \frac{1}{2(1+\nu)} \left(-2\nu \frac{\mu_y}{I_y} xy + \frac{\mu_x}{I_x} y^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.3.6)$$

где Φ — функция напряжений, решающая задачу кручения для области S :

$$\text{в } S: \quad \nabla^2 \Phi = -2; \quad \text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0, \quad (5.3.7)$$

а Ψ^0 — решение уравнения Лапласа, определяемое по краевому условию

$$\begin{aligned} \text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \Psi^0}{\partial s} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\frac{\mu_y}{I_y} (x^2 n_x + 2\nu x y n_y) - \frac{\mu_x}{I_x} (2\nu x y n_x + y^2 n_y) \right] + \\ &+ F_z(s) - \frac{q_z}{S} \frac{d\omega}{ds} \quad \left[d\omega = \frac{1}{2} (x dy - y dx) \right], \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

где, как выше в п. 2.5, $d\omega$ — элементарная секторная площадь. Нетрудно, учитывая (5.1.3), проверить, что так введенная функция Ψ^0 однозначно определена на Γ , так как

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial \Psi^0}{\partial s} ds = 0. \quad (5.3.9)$$

Можно представить Ψ^0 в виде суммы трех слагаемых

$$\Psi^0 = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\mu_y}{I_y} \vartheta_1 - \frac{\mu_x}{I_x} \vartheta_2 \right) + \vartheta_3 \quad (5.3.10)$$

определяемых решениями краевых задач

$$\left. \begin{aligned} \text{в } S: \quad \nabla^2 \vartheta_1 &= 0; & \text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s} &= x^2 n_x + 2\nu x y n_y, \\ \text{в } S: \quad \nabla^2 \vartheta_2 &= 0; & \text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s} &= 2\nu x y n_x + y^2 n_y, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.11)$$

$$\text{в } S: \quad \nabla^2 \vartheta_3 = 0; \quad \text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \vartheta_3}{\partial s} = F_z(s) - \frac{q_z}{S} \frac{d\omega}{ds}. \quad (5.3.12)$$

Функции ϑ_1 , ϑ_2 были определены при рассмотрении задачи Сен-Венана [см. (2.1.7)—(2.1.9)] об изгибе силами, причем теперь

роль P , Q отходит к μ_y , $-\mu_x$; краевая задача для ϑ_3 ранее не встречалась.

Крутящий момент μ_z^{01} , соответствующий функции напряжений Φ и компонентам ϑ_1 , ϑ_2 функции Ψ , вычислялся в п. 2.5; он равен по (2.6.2)

$$\mu_z^{01} = GC\alpha_0 - \mu_y y^* - \mu_x x^*,$$

где x^* , y^* — координаты центра жесткости. Компоненте ϑ_3 соответствует крутящий момент, представляемый по формуле (2.5.5) в виде

$$\begin{aligned} \mu_z^{02} &= \\ &= - \int_S \int \left(x \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x} + y \frac{\partial \vartheta_3}{\partial y} \right) d\omega = -2 \oint_{\Gamma} \vartheta d\omega + 2 \int_S \int \vartheta_3 d\omega = - \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \vartheta_3}{\partial s} ds = \\ &= - \oint_{\Gamma} \left(F_z(s) - \frac{q_z}{S} \frac{d\omega}{ds} \right) \varphi ds = - \oint_{\Gamma} F_z(s) \varphi ds + \frac{q_z}{S} \int_S \int \varphi d\omega. \end{aligned}$$

Остается подчинить выбор постоянной α_0 третьему условию (5.3.5); оно сводится к требованию $\mu_z^{01} + \mu_z^{02} = 0$ и записывается в виде

$$GC\alpha_0 = \mu_x x^* + \mu_y y^* + \oint_{\Gamma} F_z(s) \varphi ds - \frac{q_z}{S} \int_S \int \varphi d\omega. \quad (5.3.13)$$

Легко находятся перемещения, определяемые по функции ϑ_3 :

$$\left. \begin{aligned} u^{(02)} &= - \frac{\nu q_z}{ES} (l - z) x, & v^{(02)} &= - \frac{\nu q_z}{ES} (l - z) y, \\ w^{(02)} &= \frac{q_z}{2ES} [x^2 + y^2 - (l - z)^2] + \frac{1}{G} \chi_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.14)$$

где χ_3 — гармоническая функция, связанная с ϑ_3 условиями Коши — Римана (2.1.9). К этим выражениям надо добавить перемещения, получаемые по формулам (2.2.9), в которых следует принять $R = 0$, $m_x = m_y = 0$, заменить P , Q на μ_y , $-\mu_x$, а постоянную α — ее значением по (5.3.13).

5.3а. Растяжение стержня силами постоянной интенсивности. При действии равномерно распределенной по контуру поперечного сечения растягивающей силы ($F_z = \text{const}$) и в случае совпадения центров тяжести площади S и контура Γ

$$\mu_x = 0, \quad \mu_y = 0, \quad q_z = LF_z,$$

где L — периметр контура. Краевое условие (5.3.12) записывается в виде

$$\text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial \vartheta_3}{\partial s} = LF_z \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{S} \frac{d\omega}{ds} \right),$$

и для односвязной области, введя для упрощения записей вместо ϑ_3 гармоническую функцию

$$U = \frac{1}{LF_z} \vartheta_3,$$

приходим к задаче Дирихле:

$$\nabla^2 U = 0 \text{ в } S; \quad U_\Gamma = \frac{s}{L} - \frac{\omega}{S}. \quad (5.3.1a)$$

Соответствующие напряжения согласно (5.3.6), (5.3.1) определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx}' &= LF_z \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{x}{S} \right), \\ \tau_{yz}' &= LF_z \left(-\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{y}{S} \right) \\ (l-z) \sigma_z' &= \frac{LF_z}{S} (l-z). \end{aligned} \right\} \quad (5.3.2a)$$

Для стержня прямоугольного поперечного сечения ($|x| < a$, $|y| < b$) краевое условие (5.3.1a), если начало отсчета дуг взять в точке $x = a$, $y = 0$, как нетрудно проверить, приведет к виду

$$U(\pm a, y) = \pm \frac{b-a}{8(a+b)} \frac{y}{b}, \quad U(x, \pm b) = \pm \frac{b-a}{8(a+b)} \frac{x}{a},$$

и оно удовлетворяется гармонической функцией *)

$$U(x, y) = \frac{b-a}{8(a+b)} \frac{xy}{ab} = \frac{2(b-a)}{SL} xy.$$

В частности, для квадрата $U = 0$, и этот результат верен для любого правильного многоугольника и для круга. Действительно, краевое условие (5.3.1a) теперь принимает вид (h — апофема)

$$U_\Gamma = \frac{s}{L} - \frac{hs}{hL} = 0.$$

Задача становится более сложной для стержня эллиптического поперечного сечения. Введя эллиптические координаты α , β :

$$x = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \quad y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \quad (c = \sqrt{a^2 - b^2}),$$

и называя через α_0 значение α на контуре сечения эллипса с полуосями a , b , имеем

$$c \operatorname{ch} \alpha_0 = a, \quad c \operatorname{sh} \alpha_0 = b, \quad d\omega = \frac{1}{2} (x_\Gamma dy_\Gamma - y_\Gamma dx_\Gamma) = \frac{1}{2} ab d\beta, \quad \omega = S \frac{\beta}{2\pi}.$$

*) Решения, приводимые в этом пункте, получены Л. М. Зубовым

Классическое представление дуги эллипса имеет вид

$$\frac{s}{L} = \frac{\int_0^\beta \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha_0 - \cos^2 \beta} \, d\beta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha_0 - \cos^2 \beta} \, d\beta} = \frac{1}{4E(k)} \left[E(k) - E\left(\frac{\pi}{2} - \beta, k\right) \right];$$

здесь $E\left(\frac{\pi}{2} - \beta, k\right)$ — эллиптический интеграл второго рода в нормальной форме Лежандра с модулем $k = (\operatorname{ch} \alpha_0)^{-1}$, а $E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Имеет место разложение в тригонометрический ряд *)

$$E\left(\frac{\pi}{2} - \beta, k\right) = B_0\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + B_1 \sin 2\beta + B_2 \sin 4\beta + B_3 \sin 6\beta + \dots,$$

причем

$$B_0 = \frac{2E(k)}{\pi},$$

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1) \dots (m+n)}{(m+n+1) \dots (m+2n)} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m+2n)} \right]^2 \frac{k^{2m+2n}}{2m+2n+1}.$$

Краевое условие (5.3.1а) теперь представляется периодической, как можно было предвидеть, функцией

$$U_{\Gamma} = \frac{1}{4E(k)} (B_1 \sin 2\beta + B_2 \sin 4\beta + B_3 \sin 6\beta + \dots),$$

и решение задачи представляется рядом

$$U = - \frac{1}{4E(k)} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{sh} 2n\alpha}{\operatorname{sh} 2n\alpha_0} \sin 2n\beta.$$

Действительно, каждый член этого ряда, являясь мнимой частью функции $\operatorname{sh} 2n(\alpha + i\beta)$, удовлетворяет уравнению Лапласа; он непрерывен вместе с его производными по α и β в сплошном эллипсе (и при переходе через разрез между фокусами!).

5.4. Касательные напряжения τ_{zx}^1 , τ_{yz}^1 . Как уже говорилось, это — целиком задача Сен-Венана. Заменяя P , Q , m_z в решениях п. 2.1 на q_x , q_y , μ_z , придем к выражениям

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx}^1 &= G\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi^1}{\partial y} - \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{q_x}{I_y} x^2 + 2\nu \frac{q_y}{I_x} xy \right), \\ \tau_{yz}^1 &= -G\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^1}{\partial x} - \frac{1}{2(1+\nu)} \left(2\nu \frac{q_x}{I_y} xy + \frac{q_y}{I_x} y^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.4.1)$$

*) А. М. Ж у р а в с к и й, Справочник по эллиптическим функциям, Изд-во АН СССР, 1941.

причем здесь

$$\Psi^1 = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{q_x}{I_y} \vartheta_1 + \frac{q_y}{I_x} \vartheta_2 \right), \quad (5.4.2)$$

а ϑ_1, ϑ_2 — решения краевых задач (5.3.11). Постоянная α_1 определяется условием

$$CG\alpha_1 = \mu_z - (x^* q_y - y^* q_x). \quad (5.4.3)$$

5.5. Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Рассмотрению подлежат уравнения статики в объеме (5.1.13), на поверхности (5.1.16), зависимости (5.2.2), определяющие σ_z , соотношения (5.2.6) и интегральные условия (5.1.10).

По (5.4.1), заменив ϑ_1, ϑ_2 сопряженными с ними гармоническими функциями χ_1, χ_2 [см. (2.1.9)] и введя с помощью соотношений (2.1.10), (2.1.12) функцию Φ , можно первую группу, уравнений записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x} - G\alpha_1 y - \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{q_x}{I_y} x^2 + 2\nu \frac{q_y}{I_x} xy \right), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + G\alpha_1 x - \frac{1}{2(1+\nu)} \left(2\nu \frac{q_x}{I_y} xy + \frac{q_y}{I_x} y^2 \right), \\ \Lambda &= G\alpha_1 \Phi + \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{q_x}{I_y} \chi_1 + \frac{q_y}{I_x} \chi_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.5.1)$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, приняв

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{6(1+\nu)} \left[\frac{q_x}{I_y} x^3 + \nu \frac{q_y}{I_x} (3x^2 y - y^3) \right] + \Lambda + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= -\frac{1}{6(1+\nu)} \left[\frac{q_y}{I_x} y^3 + \nu \frac{q_x}{I_y} (3xy^2 - x^3) \right] + \Lambda + \frac{\partial U}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} G\alpha_1 (x^2 - y^2) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (5.5.2)$$

где введена известная в плоской задаче теории упругости функция напряжений Эри $U(x, y)$ (п. 1.2 гл. VII).

После подстановки этих выражений в зависимости Бельтрами и несложных преобразований придем к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{1+\nu} \frac{q_x}{I_y} x + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{q_y}{I_x} y - (1+\nu) \nabla^4 U &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_z^0 + 2\Lambda - \nu \nabla^2 U), \\ \frac{2}{1+\nu} \frac{q_y}{I_x} y + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{q_x}{I_y} x - (1+\nu) \nabla^4 U &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_z^0 + 2\Lambda - \nu \nabla^2 U), \\ \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{q_x}{I_y} y + \frac{q_y}{I_x} x \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_z^0 + 2\Lambda - \nu \nabla^2 U), \end{aligned} \right\} \quad (5.5.3)$$

где $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ — бигармонический оператор — двукратно примененный плоский оператор Лапласа. Вместе с тем по (5.2.6), (5.2.8)

$$\nabla^2 \sigma_z^0 = \frac{2+\nu}{1+\nu} \left(\frac{q_x}{I_y} x + \frac{q_y}{I_x} y \right). \quad (5.5.4)$$

Поэтому, сложив первое и второе уравнения (5.5.3) и учитывая, что Λ — гармоническая функция, придем к бигармоническому дифференциальному уравнению

$$\nabla^4 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (5.5.5)$$

для функции Эри. Краевые условия, определяющие эту функцию, учитывая соотношения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} n_x - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} n_y = \frac{d}{ds} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} n_x + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} n_y = -\frac{d}{ds} \frac{\partial U}{\partial x},$$

можно записать в виде

$$\text{на } \Gamma: \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^s X \, ds, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = - \int_0^s Y \, ds, \quad (5.5.6)$$

где по (5.1.16), (5.5.2)

$$\left. \begin{aligned} X &= F_x(s) + \frac{1}{6(1+\nu)} \left[\frac{q_x}{I_y} x^3 + \nu \frac{q_y}{I_x} (3x^2y - y^3) \right] n_x - \\ &\quad - \frac{1}{2} G\alpha_1 (x^2 - y^2) n_y - \Lambda n_x, \\ Y &= F_y(s) + \frac{1}{6(1+\nu)} \left[\nu \frac{q_x}{I_y} (3xy^2 - x^3) + \frac{q_y}{I_x} y^3 \right] n_y - \\ &\quad - \frac{1}{2} G\alpha_1 (x^2 - y^2) n_x - \Lambda n_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.7)$$

Нетрудно проверить, что (в случае односвязной области)

$$\oint_{\Gamma} X \, ds = 0, \quad \oint_{\Gamma} Y \, ds = 0, \quad (5.5.8)$$

чем гарантируется однозначность заданий производных функции Эри на контуре. Действительно, по (5.1.3) и преобразуя контурные интегралы, имеем

$$\oint_{\Gamma} X \, ds = q_x + \frac{1}{2(1+\nu)} q_x - \int_S \int \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \, d\omega$$

и теперь по (2.1.9), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.4)

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial \Lambda}{\partial x} do &= G a_1 \iint_S \frac{\partial \Phi}{\partial y} do + \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{q_x}{I_y} \iint_S \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} do + \frac{q_y}{I_x} \iint_S \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} do \right) = \\ &= G a_1 \oint_{\Gamma} n_y \Phi ds + \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{q_x}{I_y} \oint_{\Gamma} \vartheta_1 n_y ds + \frac{q_y}{I_x} \oint_{\Gamma} \vartheta_2 n_y ds \right) = \\ &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{q_x}{I_y} \oint_{\Gamma} x \frac{\partial \vartheta_1}{\partial s} ds - \frac{q_y}{I_x} \oint_{\Gamma} y \frac{\partial \vartheta_2}{\partial s} ds \right), \end{aligned}$$

откуда, сославшись на (5.3.11), легко получим

$$\iint_S \frac{\partial \Lambda}{\partial x} do = \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)} q_x, \quad (5.5.9)$$

как и требовалось. Аналогично доказывается второе равенство (5.5.8). Впрочем, сказанное следует и из чисто статических соображений [ср. п. 1.5].

5.6. Определение σ_z^0 . Возвращаясь к (5.5.3) и исключив $\nabla^2 U$ с помощью (5.5.2), придем к соотношению

$$\begin{aligned} \sigma_z^0 = -2(1+\nu)\Lambda + \nu(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{6}(2-\nu) \left(\frac{q_x}{I_y} x^3 + \frac{q_y}{I_x} y^3 \right) + \\ + \frac{1}{2} \nu \left(\frac{q_x}{I_y} x y^2 + \frac{q_y}{I_x} x^2 y \right) + c_0 + c_1 x + c_2 y, \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

причем постоянные c_0, c_1, c_2 находят по условиям (5.1.10), выражающим, что система напряжений σ_z^0 статически эквивалентна нулю. Определение этих постоянных требует вычисления моментов напряжений нулевого и первого порядка

$$\iint_S (\sigma_x + \sigma_y) do, \quad \iint_S x (\sigma_x + \sigma_y) do, \quad \iint_S y (\sigma_x + \sigma_y) do,$$

выполняемого по формулам пп. 4.3, 4.4 гл. I для двух уравнений статики (5.1.13), в которых $-\tau_{xz}^1, -\tau_{yz}^1$ играют роль объемных сил, а поверхностными силами являются F_x, F_y . Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_S (\sigma_x + \sigma_y) do &= \oint_{\Gamma} (xF_x + yF_y) ds - \iint_S (x\tau_{xz}^1 + y\tau_{yz}^1) do, \\ \iint_S x (\sigma_x + \sigma_y) do &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} [(x^2 - y^2) F_x + 2xy F_y] ds - \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint_S [(x^2 - y^2) \tau_{zx}^1 + 2xy \tau_{yz}^1] do \quad \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

тогда как входящие в эти выражения моменты второго порядка для напряжений τ_{xz}^1 , τ_{yz}^1 могут быть определены по п. 4.10 гл. I только частично в комбинациях вида

$$3 \int_S \int x^2 \tau_{zx}^1 d\sigma = \frac{q_x}{I_y} \int_S \int x^4 d\sigma + \frac{q_y}{I_x} \int_S \int x^3 y d\sigma,$$

$$\int_S \int (y^2 \tau_{zx}^1 + 2xy \tau_{yz}^1) d\sigma = \frac{q_x}{I_y} \int_S \int x^2 y^2 d\sigma + \frac{q_y}{I_x} \int_S \int xy^3 d\sigma.$$

Вместе с тем интегралы

$$\int_S \int y^2 \tau_{zx}^1 d\sigma, \quad \int_S \int x^2 \tau_{yz}^1 d\sigma$$

не могут быть выражены через нагрузки при использовании лишь уравнений статики.

5.7. Изгиб тяжелого стержня. Рассматривается горизонтальный тяжелый стержень, торец которого $z = l$ свободен; ось x направлена по нисходящей вертикали, так что отлична от нуля только компонента $\rho K_x = \gamma$ объемной силы (γ — вес единицы объема). Частное решение уравнений равновесия может быть взято в виде $\sigma'_x = -\gamma x$, ему соответствует распределение поверхностных сил на боковой поверхности

$$F'_x = -\gamma x n_x, \quad F'_y = 0, \quad F'_z = 0.$$

Но эта поверхность не нагружена; поэтому на взятое частное решение следует наложить решение задачи Мичелла, в которой

$$F_x = \gamma x n_x, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad (5.7.1)$$

так что из шести интегральных величин (5.1.3), (5.1.4) отлична от нуля только

$$q_x = \gamma \oint x n_x ds = \gamma S. \quad (5.7.2)$$

Поэтому по (5.2.9)

$$\sigma_z = \sigma_z^0 + \frac{1}{2} (l - z)^2 \sigma_z^{(2)} = \sigma_z^0 - \frac{1}{2} (l - z)^2 \frac{\gamma S}{I_y} x, \quad (5.7.3)$$

$$\tau_{zx} = (l - z) \tau_{zx}^1, \quad \tau_{yz} = (l - z) \tau_{yz}^1, \quad (5.7.4)$$

и речь идет о задаче изгиба силой, решаемой формулами п. 5.4, и о плоской задаче, в которой находятся напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} и статически эквивалентное нулю слагаемое σ_z^0 напряжения σ_z .

В частном случае стержня круглого сечения радиуса a по (4.2.5), (5.5.1), (4.2.6)

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1-2\nu}{12} (x^3 - 3xy^2) + \frac{3+2\nu}{4} a^2 x, \quad \Lambda = \frac{\nu S}{2(1+\nu) I_y} \chi_1 = \frac{2\nu}{a^2(1+\nu)} \chi_1, \\ \tau_{zx}^I &= \frac{\nu}{2(1+\nu) a^2} [(3+2\nu)(a^2 - x^2) - (1-2\nu)y^2], \quad \tau_{yz}^I = -\frac{\nu}{a^2} \frac{1+2\nu}{1+\nu} xy \end{aligned} \right\} \quad (5.7.5)$$

и, далее, по (5.5.2)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu x}{2a^2(1+\nu)} \left[(3+2\nu) \left(a^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) - (1-2\nu) y^2 \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\nu x}{2a^2(1+\nu)} \left[\frac{1}{3} (1+2\nu) (x^2 - 3y^2) + (3+2\nu) a^2 \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (5.7.6)$$

причем функция напряжений U представляет решение бигармонической краевой задачи (5.5.6), в которой значения X , Y на контуре области $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ задаются выражениями

$$X = \frac{\nu \gamma x}{a^2(1+\nu)} \left(\frac{4}{3} x^2 - a^2 \right) n_x, \quad Y = -\frac{\nu x}{a^2(1+\nu)} \left[\frac{2}{3} (1+2\nu) x^2 + a^2 \right] n_y.$$

Легко проверить, что произведение x , или y , или $x^2 + y^2$ на гармоническую функцию удовлетворяет бигармоническому дифференциальному уравнению; имеет место и обратное утверждение: всякая бигармоническая функция представима в одном из трех видов:

$$f_1 + x f_2, \quad f_1 + y f_2, \quad f_1 + (x^2 + y^2) f_2, \quad (5.7.7)$$

где f_1 , f_2 — некоторые гармонические функции. Для круговой области косинусы n_x , n_y угла нормали с координатными осями пропорциональны x , y ; поэтому, записав теперь краевые условия в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} x - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} y &= \frac{\nu \gamma x^2}{a^2(1+\nu)} \left(\frac{4}{3} x^2 - a^2 \right), \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} x + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} y &= -\frac{\nu x y}{a^2(1+\nu)} \left[\frac{2}{3} (1+2\nu) x^2 + a^2 \right], \end{aligned} \quad (5.7.8)$$

нетрудно сообразить, что функцию U следует разыскивать в форме бигармонического полинома не выше пятой степени. По сказанному он представляется суммой гармонического полинома пятой степени и произведения x (или y) на гармонический полином четвертой степени; к этой сумме можно добавить любой полином третьей степени (всегда, очевидно, бигармонический). Оказывается достаточным принять

$$U = \frac{\gamma}{a^2(1+\nu)} [A(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) + Bx(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + Ca^2x^3 + Da^2xy^2], \quad (5.7.9)$$

причем входящие в это выражение гармонические полиномы равны вещественным частям $(x + iy)^5$, $(x + iy)^4$. Подстановка в краевые условия (5.7.8) приводит к системе пяти уравнений, из которых одно является следствием прочих, так что оказывается достаточным введения четырех постоянных. Получаем

$$U = \frac{\gamma}{24a^2(1+\nu)} \left[\frac{1}{5}(1-\nu)(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(x^5 - 6x^3y^2 + xy^4) - (5+2\nu)a^2x^3 - (1-2\nu)a^2xy^2 \right]$$

и по (5.7.6) выражения искоемых напряжений (при учете также напряжения $\sigma'_x = -\gamma x$) будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\gamma}{12a^2(1+\nu)} [(5+2\nu)xa^2 - 3(1-2\nu)xy^2 - (5+2\nu)x^3], \\ \tau_{xy} &= -\frac{\gamma}{12a^2(1+\nu)} [-(1-2\nu)ya^2 + (1-2\nu)y^3 + 3(1+2\nu)x^2y], \\ \sigma_y &= \frac{\gamma}{12a^2(1+\nu)} [3(1+2\nu)xa^2 - 3(1+2\nu)xy^2 - (1-2\nu)x^3]. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.10)$$

Распределение напряжений σ_z^0 по поперечному сечению по (5.6.1) представляется в виде

$$\sigma_z^0 = -\frac{2+\nu}{3(1+\nu)} \gamma x \left[1 - \frac{3}{2a^2}(x^2 + y^2) \right], \quad (5.7.11)$$

причем постоянная c_1 определена по условию (5.1.10).

В точках поперечного сечения $x = \pm a$, $y = 0$ напряжение σ_z по (5.7.3) оказывается равным

$$\sigma_z = \mp 2\gamma a \left[\left(\frac{l-z}{a} \right)^2 - \frac{2+\nu}{12(1+\nu)} \right]. \quad (5.7.12)$$

Второе слагаемое даст поправку, не учитываемую элементарной теорией.

Таковыми же элементарными средствами может быть рассмотрена задача об изгибе тяжелого стержня эллиптического поперечного сечения; задача изгиба для него рассмотрена в п. 4.2, функцию напряжений U следует задать в форме (5.7.9), а в записи краевого условия вида (5.7.8) учесть, что n_x , n_y пропорциональны x/a^2 , y/b^2 .

5.8. Средние значения напряжений. Средние значения напряжений τ_{zx} , τ_{yz} , σ_x , σ_y на отрезках, параллельных координатным осям, можно найти, не прибегая к решению краевых задач, а основываясь только на статических соображениях.

Так, сославшись на системы уравнений (5.1.14), (5.1.17), (5.2.7) и соответственно на (5.1.15), (5.1.18), (5.2.8) и повторив

рассуждения п. 4.1, получим в принятых там обозначениях (рис. 37)

$$\int_{y_1}^{y_2} \tau_{zx} dy = b (\tau_{zx})_{cp} = -q_z \frac{\Omega(x)}{S} + \int_{\Gamma_1} F_z ds + \\ + \Omega(x) \left\{ \frac{x_{\Pi}}{I_y} [q_x(l-z) + \mu_y] + \frac{y_{\Pi}}{I_x} [q_y(l-z) - \mu_x] \right\}, \quad (5.8.1)$$

где Γ_1 — дуга bca контура Γ . Аналогично записывается выражение среднего значения τ_{yz} на отрезке, параллельном оси x .

Ниже требуется знание также среднего значения τ_{zx}^1 по площади $\Omega(x)$; имеем

$$\iint_{\Omega} x \left(\frac{\partial \tau_{zx}^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^1}{\partial y} \right) do = - \left(\frac{q_x}{I_y} j_x + \frac{q_y}{I_x} j_{xy} \right),$$

где j_y , j_{xy} — момент инерции относительно оси x и центробежный момент инерции этой площади. С другой стороны, если учесть (5.1.18),

$$\iint_{\Omega} x \left(\frac{\partial \tau_{zx}^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^1}{\partial y} \right) do = \int_{\gamma} x (\tau_{zx}^1 n_x + \tau_{yz}^1 n_y) ds - \int_{\Omega(x)} \tau_{zx}^1 do = \\ = -x \int_{y_1}^{y_2} \tau_{zx}^1 dy - \iint_{\Omega(x)} \tau_{zx}^1 do,$$

то, сославшись на (5.8.1), получим

$$\iint_{\Omega(x)} \tau_{zx}^1 do = \frac{q_x}{I_y} (j_y - x x_{\Pi} \Omega(x)) + \frac{q_y}{I_x} (j_{xy} - x y_{\Pi} \Omega(x)). \quad (5.8.2)$$

Теперь по (5.1.13), (5.1.16) имеем

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) do = \int_{\Gamma} F_x ds - \int_{y_1}^{y_2} \sigma_x dy = \iint_{\Omega(x)} \tau_{zx}^1 do,$$

так что, применив (5.8.2), приходим к такому выражению среднего значения напряжения σ_x на отрезке γ :

$$\int_{y_1}^{y_2} \sigma_x dy = b(x) (\sigma_x)_{cp} = \\ = \int_{\Gamma_1} F_x ds - \frac{q_x}{I_y} (j_y - x x_{\Pi} \Omega(x)) - \frac{q_y}{I_x} (j_{xy} - x y_{\Pi} \Omega(x)). \quad (5.8.3)$$

Для поперечного сечения, симметричного относительно оси x , в формулах (5.8.1) — (5.8.3) следует принять $y_{\Pi} = 0$, $j_{xy} = 0$.

5.9. О задаче Альманзи. Задачу о напряженном состоянии в призматическом стержне, боковая поверхность которого нагружена силами, полиномиально зависящими от осевой координаты z :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= F_x = \sum_{k=0}^n a_k(s) \frac{(l-z)^k}{k!}, \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y &= F_y = \sum_{k=0}^n b_k(s) \frac{(l-z)^k}{k!}, \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y &= F_z = \sum_{k=0}^n c_k(s) \frac{(l-z)^k}{k!}, \end{aligned} \right\} \quad (5.9.1)$$

рассмотрел Альманзи (1901). Она представляет естественное продолжение задач Сен-Венана и Мичелла, а ее решение может быть сведено к последовательности решений этих задач.

Г Л А В А VII

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Постановка плоских задач теории упругости

1.1. Плоская деформация. Наименование «плоская задача» присвоено обширной и наиболее полно разработанной главе теории упругости. В ней рассматриваются вопросы, отличающиеся по содержанию, но объединяемые математическим методом решения, — это задача о плоской деформации и задача о плоском напряженном состоянии.

В задаче о плоской деформации рассматривается частное решение уравнений теории упругости, в котором перемещения u, v предполагаются не зависящими от координаты $x_3 = z$, тогда как w не зависит от x, y , а его зависимость от z может быть только линейной:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = ez + w_0. \quad (1.1.1)$$

Очевидным следствием этих предположений является отсутствие напряжений τ_{zx}, τ_{yz}

$$\tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.1.2)$$

и, конечно, независимость от z остающихся компонент $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z$ тензора напряжений.

Обобщенный закон Гука при этих условиях записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\theta_1 + e) + \frac{\partial u}{\partial x} \right], & \sigma_y &= 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\theta_1 + e) + \frac{\partial v}{\partial y} \right], \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \sigma_z &= 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \theta_1 + \frac{1-\nu}{1-2\nu} e \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

Здесь

$$\theta_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-2\nu}{2\mu} (\sigma_x + \sigma_y) - 2\nu e, \quad (1.1.4)$$

причем последнее представление следует из двух первых соотношений закона Гука (1.1.3). Заменив Φ_1 этим значением, приведем выражение σ_z к виду

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) + E\varepsilon \quad (E = 2\mu(1 + \nu)), \quad (1.1.5)$$

и этим задача определения σ_z отодвигается на второй план, речь идет о разыскании плоского поля напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Плоская деформация реализуется в призматическом теле, теоретически бесконечной длины, нагруженном поверхностными и объемными силами, перпендикулярными оси z , интенсивность которых не зависит от z . Тогда все поперечные сечения тела находятся в одинаковых условиях, чем оправдывается задание перемещений в форме (1.1.1). Приблизненно плоская деформация осуществляется в удаленной от торцов средней части тела конечного протяжения по оси z . Зависимость напряженного состояния от z учитывается в постановке задач Мичелла и Альманзи (§ 5 гл. VI), сводящихся к наложению задач Сен-Венана и плоской.

Уравнения статики плоской задачи в объеме записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho K_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho K_y = 0, \quad (1.1.6)$$

а на поверхности, иначе говоря, на контуре Γ поперечного сечения тела,

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = F_x, \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = F_y. \quad (1.1.7)$$

Внешние силы — объемные и поверхностные, приложенные к любой выделенной из тела двумя поперечными сечениями его части, — должны находиться в равновесии. Это приводит к уравнениям равновесия, выражающим обращение в нуль их главного вектора

$$\int_S \rho K_x do + \oint_{\Gamma} F_x ds = 0, \quad \int_S \rho K_y do + \oint_{\Gamma} F_y ds = 0 \quad (1.1.8)$$

и главного момента относительно оси z

$$\int_S \rho (xK_y - yK_x) do + \oint_{\Gamma} (xF_y - yF_x) ds = 0. \quad (1.1.9)$$

Через S обозначена площадь поперечного сечения тела.

Уравнения (1.1.8) легко получить, конечно, из уравнений статики (1.1.6), (1.1.7) с помощью преобразования

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho K_x \right) do &= \oint_{\Gamma} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) ds + \int_S \rho K_x do = \\ &= \oint_{\Gamma} F_x ds + \int_S \rho K_x do = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно прийти к уравнению моментов (1.1.9):

$$\begin{aligned} \int_S \left[x \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho K_y \right) - y \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho K_x \right) \right] do = \\ = \oint_{\Gamma} (x F_y - y F_x) ds + \int_S \rho (x K_y - y K_x) do = 0. \end{aligned}$$

Этот же прием позволяет найти моменты нулевого и первого порядков напряжений σ_x , σ_y . Имеем

$$\begin{aligned} \int_S x \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho K_x \right) do &= \oint_{\Gamma} x F_x ds + \int_S \rho x K_x do - \int_S \sigma_x do = 0, \\ \int_S x^2 \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho K_x \right) do &= \\ &= \oint_{\Gamma} x^2 F_x ds + \int_S \rho x^2 K_x do - 2 \int_S x \sigma_x do = 0, \\ \int_S xy \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho K_x \right) do &= \\ &= \oint_{\Gamma} xy F_x ds + \int_S \rho xy K_x do - \int_S (y \sigma_x + x \tau_{xy}) do = 0, \\ \int_S x^2 \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho K_y \right) do &= \\ &= \oint_{\Gamma} x^2 F_y ds + \int_S \rho x^2 K_y do - 2 \int_S x \tau_{xy} do = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из трех аналогичных равенств имеем

$$\left. \begin{aligned} \int_S (\sigma_x + \sigma_y) do &= \oint_{\Gamma} (x F_x + y F_y) ds + \int_S \rho (x K_x + y K_y) do, \\ \int_S x (\sigma_x + \sigma_y) do &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} [(x^2 - y^2) F_x + 2xy F_y] ds + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_S \rho [(x^2 - y^2) K_x + 2xy K_y] do, \\ \int_S y (\sigma_x + \sigma_y) do &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} [2xy F_x + (y^2 - x^2) F_y] ds + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_S \rho [2xy K_x + (y^2 - x^2) K_y] do. \end{aligned} \right\} \quad (1.1. 10)$$

Эти выражения позволяют определить через заданные объемные и поверхностные силы главный вектор и моменты напряжений σ_z в поперечном сечении тела:

$$\left. \begin{aligned} R &= \int_S \int \sigma_z d\omega = \nu \int_S \int (\sigma_x + \sigma_y) d\omega + ESe, \\ m_x &= \int_S \int y \sigma_z d\omega = \nu \int_S \int y (\sigma_x + \sigma_y) d\omega + ESey_0, \\ m_y &= - \int_S \int x \sigma_z d\omega = - \nu \int_S \int x (\sigma_x + \sigma_y) d\omega - ESex_0, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.11)$$

где x_0, y_0 — координаты его центра тяжести.

Если закрепления торцов не создают продольной силы, то $R = 0$, и этим определяется введенная в формулы (1.1.1) постоянная e ; если же не допускается продольное смещение w , то $e = 0$.

Формулы (1.1.10), (1.1.11) определяют силовые факторы $-R, -m_x, -m_y$ простейших задач Сен-Венана (о растяжении и изгибе парама), решения которых следует наложить на решение задачи о плоской деформации призматического тела с ненагруженными торцами.

1.2. Функция напряжений Эри. Было показано в п. 1.6 гл. I, что однородным уравнениям статики можно удовлетворять, выражая напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ через одну функцию напряжений [см. (1.6.11) гл. I]. Этот результат легко получить и непосредственно; действительно, каждое по отдельности из двух однородных уравнений статики

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2.1)$$

тождественно удовлетворяется с помощью функций

$$\sigma_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \sigma_y = - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

и условие $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ приводит к уравнению того же вида, что и (1.2.1):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0.$$

Поэтому, введя в рассмотрение новую функцию $U(x, y)$ — функцию напряжений Эри (Airy, 1862), имеем

$$\varphi_1 = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \varphi_2 = - \frac{\partial U}{\partial x}$$

и отсюда приходим к основным соотношениям

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (1.2.2)$$

Конечно, они легко проверяются подстановкой в (1.2.1). Называя еще $\sigma_x^0, \tau_{xy}^0, \sigma_y^0$ (не зависящие от z) частные решения уравнений статики (1.1.6), определяемые действием объемных сил, имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, & \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_y &= \sigma_y^0 + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, & \sigma_z &= \nu(\sigma_x^0 + \sigma_y^0) + \nu \nabla^2 U + Ee. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

Здесь и далее ∇^2 обозначает лапласиан по двум переменным x, y .

1.3. Дифференциальное уравнение для функции напряжений. Далее предполагается, что частное решение $\sigma_x^0, \tau_{xy}^0, \sigma_y^0$ не только статически возможно в объеме, но и реализуемо в упругом теле, то есть удовлетворяет зависимостям Бельтрами, причем σ_z^0 определяется соотношением (1.1.5), а $\tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = 0$. Тогда (здесь и во всем последующем опускаем постоянную e) сумма нормальных напряжений будет равна

$$\sigma^0 = \sigma_x^0 + \sigma_y^0 + \sigma_z^0 = (1 + \nu)(\sigma_x^0 + \sigma_y^0), \quad (1.3.1)$$

и эти зависимости по (1.5.7) гл. IV запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x^0 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) + 2\rho \frac{\partial K_x}{\partial x} + \rho \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} K &= 0, \\ \nabla^2 \sigma_y^0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) + 2\rho \frac{\partial K_y}{\partial y} + \rho \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} K &= 0, \\ \nabla^2 \tau_{xy}^0 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) + \rho \left(\frac{\partial K_x}{\partial y} + \frac{\partial K_y}{\partial x} \right) &= 0, \\ \nabla^2 (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) + \frac{\rho}{1-\nu} \operatorname{div} K &= 0 \\ \left(\operatorname{div} K = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

причем последнее уравнение является следствием двух первых.

Остается потребовать, чтобы функция Эри удовлетворяла однородным зависимостям Бельтрами. В них теперь

$$\sigma = (1 + \nu) \nabla^2 U. \quad (1.3.3)$$

Это дает условия

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 U &= 0, & \nabla^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 U &= 0, & -\nabla^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 U &= 0, \\ \nu \nabla^2 \nabla^2 U &= 0, \end{aligned}$$

приводящие к единственному уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 U = 0, \quad (1.3.4)$$

Итак, функция напряжений Эри удовлетворяет этому дифференциальному уравнению четвертого порядка, называемому бигармоническим. Оно однородно при выборе частного решения, удовлетворяющего уравнениям статики в объеме и зависимостям Бельтрами.

1.4. Плоское напряженное состояние. Объемные и поверхностные силы и в этом случае перпендикулярны оси z ($K_z = 0$, $F_z = 0$). Предполагается, что частное решение, соответствующее действию объемных сил, реализуемое в упругом теле, известно. Поэтому в дальнейшем рассмотрении объемные силы не учитываются.

Рассматривается напряженное состояние, в котором отсутствуют напряжения на площадках, перпендикулярных оси z :

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = 0. \quad (1.4.1)$$

Оно называется плоским напряженным состоянием. Конечно, однородные уравнения статики в объеме записываются в виде (1.2.1), и им можно удовлетворить введением функции напряжений Эри

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (1.4.2)$$

Однако ни откуда не следует, что эта функция, значит и напряжения, не зависит от z . Действительно, зависимости Бельтрами теперь следует записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 U &= 0, \\ \nabla^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial x^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 U &= 0, \\ -\nabla^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial x \partial y} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 U &= 0, \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \nabla^2 U &= 0, \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \nabla^2 U &= 0, \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 U &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4.3)$$

Сложив первое и второе уравнения и учитывая шестое, нетрудно увидеть, что и в плоском напряженном состоянии функция напряжений является бигармонической по переменным x, y :

$$\nabla^2 \nabla^2 U = 0 \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (1.4.4)$$

Три последних уравнения (1.4.3) дают

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 U = c, \quad \nabla^2 U = cz + a(x, y), \quad (1.4.5)$$

где c — постоянная, $a(x, y)$ — гармоническая функция. В рассмотрение вводится бигармоническая функция $U_1(x, y)$, лапласиан которой равен $a(x, y)$:

$$\nabla^2 U_1(x, y) = a(x, y).$$

По (1.4.5) получаем теперь

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4} cz(x^2 + y^2) + U_1(x, y) + b(x, y, z), \quad (1.4.6)$$

причем b — функция, гармоническая по x, y . Подстановка в три первых уравнения (1.4.3) дает соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 b}{\partial z^2 \partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 b}{\partial z^2 \partial x^2} &= 0, \\ -\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \frac{\nu}{1+\nu} - \frac{\partial^4 b}{\partial z^2 \partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Из них, учитывая, что $\partial^2 a / \partial x^2 = -\partial^2 a / \partial y^2$, имеем

$$\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1+\nu} a(x, y) + m''(z)x + n''(z)y + p''(z),$$

где m'' , n'' , p'' — произвольные функции z . Отсюда находим

$$b(x, y, z) = -\frac{\nu z^2}{2(1+\nu)} a(x, y) + zU_2(x, y) + U_3(x, y) + m(z)x + n(z)y + p(z),$$

где U_2, U_3 — гармонические функции. Подстановка в (1.4.6) теперь приводит к выражению

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4} cz(x^2 + y^2) + U_1(x, y) - \frac{\nu z^2}{2(1+\nu)} \nabla^2 U_1(x, y) + zU_2(x, y) + U_3(x, y) + m(z)x + n(z)y + p(z),$$

в котором $U_3(x, y)$ можно включить в состав бигармонической функции $U_1(x, y)$, а группу слагаемых

$$m(z)x + n(z)y + p(z)$$

отбросить, не меняя напряженного состояния. Приходим к такому выражению функции напряжений:

$$U(x, y, z) = U_1(x, y) - \frac{\nu z^2}{2(1+\nu)} \nabla^2 U_1(x, y) + zU_2(x, y) + \frac{1}{4} cz(x^2 + y^2), \quad (1.4.7)$$

причем U_1 — бигармоническая, U_2 — гармоническая функция:

$$\nabla^2 \nabla^2 U_1(x, y) = 0, \quad \nabla^2 U_2(x, y) = 0. \quad (1.4.8)$$

Здесь определен общий класс напряженных состояний, удовлетворяющих условиям (1.4.1), уравнениям статики (1.2.1) и зависимостям Бельтрами (1.4.3).

Напряжения оказываются квадратично зависящими от z . Поэтому плоское напряженное состояние реализуемо в упругом теле лишь при условии, что и силы на его боковой поверхности распределены по такому же закону.

1.5. Обобщенное плоское напряженное состояние. Через $2h$ назовем размер тела по оси z и вместо U_1 введем в рассмотрение также бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$:

$$U_1 = \Phi + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{h^2}{3} \nabla^2 \Phi, \quad \nabla^2 U_1 = \nabla^2 \Phi. \quad (1.5.1)$$

Теперь, предполагая еще, что напряженное состояние в теле симметрично относительно срединной плоскости тела $z = 0$, так что $U_2 = 0$, $c = 0$, можно переписать соотношение (1.4.7) в виде

$$U = \Phi + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left(\frac{h^2}{3} - z^2 \right) \nabla^2 \Phi. \quad (1.5.2)$$

Напряжения, определяемые по формулам (1.4.2), оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left(\frac{h^2}{3} - z^2 \right) \frac{\partial^2 \nabla^2 \Phi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left(\frac{h^2}{3} - z^2 \right) \frac{\partial^2 \nabla^2 \Phi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left(\frac{h^2}{3} - z^2 \right) \frac{\partial^2 \nabla^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.3)$$

В дальнейшем предполагается, что тело представляет пластинку толщины $2h$, малой по сравнению с ее размерами в плане. Это позволяет принять, что ее напряженное состояние с достаточной точностью может быть описано заданием средних по толщине значений напряжений

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_x dz, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \tau_{xy} dz, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_y dz. \quad (1.5.4)$$

Тогда, заметив, что

$$\int_{-h}^h \left(\frac{h^2}{3} - z^2 \right) dz = 0,$$

придем к следующим выражениям этих средних значений:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \quad (1.5.5)$$

Эти формулы определяют так называемое обобщенное плоское напряженное состояние. Конечно, поверхностные силы также должны быть осреднены по толщине пластинки:

$$\bar{F}_x(s) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_x(z, s) dz, \quad \bar{F}_y(s) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_y(z, s) dz. \quad (1.5.6)$$

Обобщенный закон Гука при отсутствии напряжений τ_{zx} , τ_{yz} , σ_z записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \tau_{xy}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.5.7)$$

и для определения средних по толщине значений перемещений u , v служат формулы

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_x - \nu \bar{\sigma}_y), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_y - \nu \bar{\sigma}_x), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \bar{\tau}_{xy}. \quad (1.5.8)$$

Далее по третьему соотношению (1.5.7) находим, используя также (1.5.4), разность значений $w(x, y, \pm h)$ на верхней и нижней сторонах пластинки — изменение ее толщины:

$$w(x, y, h) - w(x, y, -h) = -\frac{2\nu h}{1-\nu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = -\frac{2\nu h}{1-\nu} \Phi. \quad (1.5.9)$$

Остающиеся уравнения (1.5.7) определяют разности значений u , v на сторонах пластинки через производные по x , y среднего значения $\bar{w}(x, y)$, но последнее остается неизвестным.

1.6. Плоская задача. В обозначениях осредненных по толщине величин, описывающих обобщенное плоское напряженное состояние, далее отбрасываются черточки, а для функции напряжений вместо Φ принимается обозначение U . Тогда формулы в п. 1.5 переписываются в виде

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1.6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right), & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.2)$$

В случае плоской деформации формулы (1.6.1) сохраняются, но обобщенный закон Гука по (1.1.3) и (1.1.4) записывается в виде (при $e = 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_x - \nu\sigma), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_y - \nu\sigma), \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\tau_{xy}, \quad (1.6.3)$$

причем здесь, как и в (1.6.2), введено обозначение

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma. \quad (1.6.4)$$

Из сопоставления этих записей следует, что, имея решение задачи о плоской деформации, можно получить при замене обозначения

$$\nu \text{ на } \frac{\nu}{1+\nu} \quad (1.6.5)$$

решение соответствующей (при том же законе объемных сил и при одинаково сформулированных краевых условиях) задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии*). В том и другом случае речь идет об одной и той же бигармонической краевой задаче, называемой плоской задачей теории упругости, иногда плоской теорией упругости (plane elasticity).

Конечно, содержание этих задач различно. В первом случае речь идет о состоянии в призматическом теле достаточно большой длины, а во втором — об осредненном напряженном состоянии в тонкой пластинке. В первом случае отсутствует (или постоянно) относительное удлинение ϵ_z , но имеется напряжение σ_z , во втором $\sigma_z = 0$, но не сохраняется толщина пластинки ($\epsilon_z \neq 0$).

В последующих рассмотрениях задач для плоских областей имеется в виду (при отсутствии оговорок) случай плоской деформации. Слово «обобщенное» при рассмотрении обобщенного плоского напряженного состояния опускается.

В дальнейшем не имеющих значения размер по оси z принимается равным единице длины.

1.7. Перемещения в плоской задаче. Определение перемещений u , v сводится к интегрированию системы уравнений (1.6.3), в которых напряжения заменены их выражениями (1.6.1) через бигармоническую функцию напряжений Эри $U(x, y)$. Эта система трех уравнений, содержащая две неизвестные функции, интегрируема, поскольку выполнены эквивалентные условиям сплошности зависимости Бельтрами.

*) В случае тепловых напряжений это правило несколько усложняется, так как в формулировку закона Гука вносятся новые слагаемые, зависящие от ν . См. п. 5.8 этой главы.

Через s обозначается гармоническая функция $\nabla^2 U$, а сопряженная с s гармоническая функция — через t :

$$\nabla^2 U = s; \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial t}{\partial x}; \quad s + it = f(z), \quad z = x + iy^*, \quad (1.7.1)$$

и рассматривается функция комплексного переменного, вводимая как неопределенный интеграл над $f(z)$ **):

$$S(x, y) + iT(x, y) = F(z) = \int^z f(z) dz. \quad (1.7.2)$$

Заметим, что t определено по s с точностью до вещественной аддитивной постоянной (обозначаемой ω_0); поэтому $F(z)$ определено с точностью до аддитивно входящей линейной функции

$$i\omega_0 z + u_0 + iv_0 = (-\omega_0 y + u_0) + i(\omega_0 x + v_0). \quad (1.7.3)$$

Имеем по (1.7.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{dF}{dz} = f(z) = s + it = \frac{\partial S}{\partial x} + i \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= i \frac{dF}{dz} = if(z) = is - t = \frac{\partial S}{\partial y} + i \frac{\partial T}{\partial y} \end{aligned}$$

и поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = s, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial x} = -t. \quad (1.7.4)$$

Это позволяет заменить (1.6.3) уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \nu \nabla^2 U \right) = \frac{1}{2\mu} \left[-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (1-\nu) \nabla^2 U \right] = \\ &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial U}{\partial x} + (1-\nu) S \right], \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu \nabla^2 U \right) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{\partial U}{\partial y} + (1-\nu) T \right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.5)$$

Отсюда находим

$$u = \frac{1}{2\mu} \left[(1-\nu) S - \frac{\partial U}{\partial x} \right] + f_1(y), \quad v = \frac{1}{2\mu} \left[(1-\nu) T - \frac{\partial U}{\partial y} \right] + f_2(x),$$

и подстановка в третье уравнение (1.7.5) с учетом (1.7.4) дает

$$f'_1(y) + f'_2(x) = 0, \quad f'_1(y) = -\omega_0, \quad f'_2(x) = \omega_0 = \text{const},$$

*) В рассмотрении плоских задач нет опасности смещения $z = x + iy$ с $z = x_3$.

**) Ниже, в соответствии с обозначениями Н. И. Мусхелишвили, $F(z)$ заменено на $4\phi(z)$.

так как сумма функций от x и y может быть нулем, если они постоянны (и противоположного знака). Приходим к искомым выражениям перемещений

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \left[(1-\nu)S - \frac{\partial U}{\partial x} \right] + u_0 - \omega_0 y, \\ v &= \frac{1}{2\mu} \left[(1-\nu)T - \frac{\partial U}{\partial y} \right] + v_0 + \omega_0 x, \end{aligned} \right\} \quad (1.7.6)$$

причем слагаемые вида (1.7.3) представляют перемещение твердой плоской фигуры в ее плоскости: (u_0, v_0) — проекции перемещения какой-либо ее точки, ω_0 — малый угол поворота вокруг оси x_3 . В плоском напряженном состоянии ν заменяется по правилу (1.6.5), так что

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[S - (1+\nu) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + u_0 - \omega_0 y, \\ v &= \frac{1}{E} \left[T - (1+\nu) \frac{\partial U}{\partial y} \right] + v_0 + \omega_0 x. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.7)$$

1.8. Главный вектор и главный момент. В плоском поле тензора напряжений

$$\hat{T} = i_1 i_1 \sigma_x + i_2 i_2 \sigma_y + (i_1 i_2 + i_2 i_1) \tau_{xy} \quad (1.8.1)$$

рассматривается дуга l ; единичные векторы нормали к ней \mathbf{n} и касательной \mathbf{t} (в сторону возрастания дуги s) ориентированы, как оси x, y декартовой системы. Тогда произведение

$$\mathbf{n} \cdot \hat{T} = \mathbf{F} \quad (1.8.2)$$

представляет распределение поверхностных сил, действующих со стороны среды, расположенной «над» кривой (в части плоскости, куда направлен вектор \mathbf{n}), на среду «под» ней. По (1.8.1), (1.8.2) имеем

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \mathbf{n} \cdot \hat{T} \cdot \mathbf{i}_1 = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ F_y &= \mathbf{n} \cdot \hat{T} \cdot \mathbf{i}_2 = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \\ &= - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} \right) = - \frac{d}{ds} \frac{\partial U}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8.3)$$

Отсюда получаем выражения проекций на оси x, y главного вектора этого распределения сил на дуге l от начальной ее точки ($s = 0$) до рассматриваемой $M(s)$:

$$\int_0^s F_x ds = P = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \int_0^s F_y ds = Q = - \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1.8.4)$$

Его главный момент относительно начала координат (относительно оси x_3) равен

$$m^0 = i_3 \cdot \int_0^s (i_1 x + i_2 y) \times n \cdot \hat{T} ds = - \int_0^s \left(x d \frac{\partial U}{\partial x} + y d \frac{\partial U}{\partial y} \right) =$$

$$= - \int_0^s d \left(x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} - U \right),$$

или

$$m^0 = U + xQ - yP. \quad (1.8.5)$$

В этих формулах отброшены не имеющие значения аддитивные постоянные интегрирования; их удержание внесло бы в выражении U линейную функцию координат, не влияющую на напряжения.

Формула (1.8.5) может быть записана также в виде

$$U = m^0 - xQ + yP = m^M, \quad (1.8.6)$$

где m^M — главный момент относительно точки $M(s)$ дуги l распределения сил F на этой дуге (от ее начальной точки M_0 до конечной M).

1.9. Ортогональные криволинейные координаты. Называя через e_1, e_2 единичные векторы касательных к координатным линиям $[q^1], [q^2]$, имеем вместо (1.8.1)

$$\hat{T} = \sigma_1 e_1 e_1 + \sigma_2 e_2 e_2 + (e_1 e_2 + e_2 e_1) \tau_{12} \quad (1.9.1)$$

и, сославшись на (1.6.10) гл. I, а также на (III. 3.9), (II. 4.14):

$$\hat{T} = \text{Ink } i_3 i_3 U = \nabla \times [\nabla \times i_3 i_3 U]^* \quad \left(\nabla = \frac{e_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{e_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q^2} \right),$$

после вычисления с использованием формул (III. 4.8) найдем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{\partial U}{\partial q^2} + \frac{\partial \ln H_2}{H_1 \partial q^1} \frac{\partial U}{\partial q^1}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{\partial U}{\partial q^1} + \frac{\partial \ln H_1}{H_2 \partial q^2} \frac{\partial U}{\partial q^2}, \\ \tau_{12} &= - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial^2 U}{\partial q^1 \partial q^2} + \frac{\partial \ln H_1}{H_2 \partial q^2} \frac{\partial U}{\partial q^1} + \frac{\partial \ln H_2}{H_1 \partial q^1} \frac{\partial U}{\partial q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9.2)$$

Следствием этих соотношений служит выражение суммы нормальных напряжений, определяющей лапласиан над U [см. (III. 5.5)]:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q^2} \right). \quad (1.9.3)$$

Уравнения равновесия записываются по (1.9.2) гл. IV; можно проверить, что они при отсутствии объемных сил тождественно удовлетворяются значениями напряжений (1.9.2). Формулы, выражающие связь компонент тензора деформации с вектором перемещения, имеют вид (III.5.9):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{H_1 \partial q^1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{H_2 \partial q^2} + \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1}, \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{H_2 \partial q^2} + \frac{\partial u_2}{H_1 \partial q^1} - \frac{u_1}{H_2} \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^2} - \frac{u_2}{H_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9.4)$$

1.10. Полярные координаты на плоскости. В этих координатах, обозначаемых r , θ , уравнения равновесия принимают вид [см. (1.9.4) гл. IV]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \rho K_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho K_\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.10.1)$$

и их нетрудно получить непосредственно, рассматривая силы, действующие на элемент среды, выделенный радиусами θ , $\theta + d\theta$ и окружностями r , $r + dr$. Выражения напряжений через функцию напряжений, тождественно удовлетворяющие однородным уравнениям равновесия, представляются в виде

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 U}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (1.10.2)$$

Компоненты деформации даются формулами

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (1.10.3)$$

1.11. Представление бигармонической функции. Конечно, гармоническая функция является также и бигармонической. Непосредственной проверкой легко установить, что функции

$$x f_1, \quad y f_2, \quad (x^2 + y^2) f_3,$$

где $f_i(x, y)$ — гармонические функции, удовлетворяют бигармоническому уравнению. Достаточно для этого вспомнить выражение лапласиана произведения (II.4.20):

$$\nabla^2 \varphi \psi = \varphi \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \varphi + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla \psi.$$

Поэтому, например,

$$\begin{aligned} \nabla^2 (x^2 + y^2) f_3 &= (x^2 + y^2) \nabla^2 f_3 + f_3 \nabla^2 (x^2 + y^2) + 4 \left(x \frac{\partial f_3}{\partial x} + y \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) = \\ &= 4 \left[f_3 + \left(x \frac{\partial f_3}{\partial x} + y \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

и, далее,

$$\nabla^4(x^2 + y^2)f_3 = 4\nabla^2\left(x \frac{\partial f_3}{\partial x} + y \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) = 8\nabla^2 f_3 = 0,$$

что и требовалось.

Из сказанного следует, что

$$xf_1 + f_4, yf_2 + f_5, (x^2 + y^2)f_3 + f_6; \nabla^2 f_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 6), \quad (1.11.1)$$

являются бигармоническими функциями; ниже станет ясным и обратное предложение: любая бигармоническая функция представима в одном из этих видов (см. замечание в п. 1.14).

Покажем, например, что бигармоническая функция $xf_1 + yf_2$ представима в первом из указанных видов. Достаточно для этого ввести в рассмотрение гармоническую функцию f_3 , связанную с f_2 условиями Коши — Римана

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Теперь, приняв обозначения $f_4 = yf_2 - xf_3$, $f_1 + f_3 = f_1^*$, причем f_4 и f_1^* — гармонические функции, имеем

$$xf_1 + yf_2 = x(f_1 + f_3) + (yf_2 - xf_3) = xf_1^* + f_4,$$

что и требовалось.

При решении плоских задач в декартовых координатах гармонические функции часто выбираются в форме однородных гармонических полиномов, равных вещественной (Re) или мнимой части (Im) степеней $z = x + iy$:

$$\operatorname{Re} z^n, \quad \operatorname{Im} z^n. \quad (1.11.2)$$

Поэтому однородный бигармонический полином $(n+1)$ -й степени представим в видах

$$C_1 x \operatorname{Re} z^n + C_2 \operatorname{Re} z^{n+1}, \quad C_3 y \operatorname{Im} z^n + C_4 \operatorname{Im} z^{n+1},$$

$$C_5 (x^2 + y^2) \operatorname{Re} z^{n-1} + C_6 \operatorname{Re} z^{n+1}$$

и т. д. Конечно, любой полином ниже четвертой степени — бигармонический.

При использовании полярных координат, заменив комплексное переменное z его выражением через модуль и аргумент, приходим к представлениям бигармонических функций

$$C_1 r^{n+2} \frac{\cos}{\sin} n\theta + C_2 r^n \frac{\cos}{\sin} n\theta, \quad \frac{C_3}{r^{n-2}} \frac{\cos}{\sin} n\theta + \frac{C_4}{r^n} \frac{\cos}{\sin} n\theta.$$

Само собой разумеется, что сказанным не исчерпывается многообразие решений бигармонического уравнения.

1.12. Введение комплексного переменного. За независимые переменные, вместо декартовых координат, принимаются

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad \left[x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \right]. \quad (1.12.1)$$

Вообще во всем последующем черточкой над буквой обозначается переход к комплексно-сопряженной величине. Например, обозначение $\bar{\phi}(\bar{z})$ выражает, что в функции $\phi(z)$ совершен переход не только от z к \bar{z} , но все прочие комплексные величины, входящие в $\phi(z)$, например коэффициенты ряда Тейлора этой функции, заменены сопряженными величинами. Через $\overline{\phi(\bar{z})}$, в соответствии с этим правилом, обозначается $\bar{\phi}(z)$ и т. д.

Рассматривая теперь $U(x, y)$ как функцию от z, \bar{z} , зависящую от этих переменных через посредство x, y , приходим к правилам дифференцирования

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) U, \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) U \quad (1.12.2)$$

и, обратно,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) U, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) U. \quad (1.12.3)$$

Следствием этих формул являются выражения вторых производных, лапласиана и бигармонического оператора:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) U, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) U, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) U, \quad \nabla^2 U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}, \\ \nabla^4 U &= 16 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12.4)$$

1.13. Преобразование формул плоской задачи. Следствием формул (1.12.4) служат следующие выражения векторов напряжений на площадках, перпендикулярных осям *):

$$\sigma_x + i\tau_{xy} = 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) U, \quad \tau_{xy} + i\sigma_y = 2i \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) U. \quad (1.13.1)$$

Их следствием, дающим более компактные выражения для вычисления напряжений, служат формулы Г. В. Колосова

$$\sigma_x + \sigma_y = \nabla^2 U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (1.13.2)$$

Единичный вектор нормали к дуге l может быть представлен комплексным числом

$$n = n_x + in_y = \frac{dy}{ds} - i \frac{dx}{ds} = -i \frac{dz}{ds}, \quad (1.13.3)$$

*) Далее векторы на плоскости задаются комплексными числами.

и вектор напряжения на площадке с нормалью \mathbf{n} представляется в виде

$$\begin{aligned} F_x + iF_y &= \mathbf{n} \cdot \hat{T} = (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) + i(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) = \\ &= \frac{1}{2} [(\sigma_x + i\tau_{xy})(n + \bar{n}) + (\sigma_y - i\tau_{xy})(n - \bar{n})] = \\ &= \frac{1}{2} [(\sigma_x + \sigma_y)n + (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy})\bar{n}] \end{aligned}$$

или, если сослаться на (1.13.2),

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \hat{T} &= 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} n - \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} \bar{n} \right) = \\ &= -2i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} \frac{d\bar{z}}{ds} \right) = -2i \frac{d}{ds} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (1.13.4)$$

Отсюда приходим к следующему представлению главного вектора поверхностных сил на дуге l , соответствующему формулам (1.8.4):

$$P + iQ = \int_0^s \mathbf{n} \cdot \hat{T} ds = -2i \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1.13.5)$$

Главный момент этих сил на дуге l относительно начала координат по (1.8.5), (1.13.5) записывается в виде

$$m^0 = U - \left(z \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right). \quad (1.13.6)$$

В полярных координатах векторы напряжения на дуге круга и на площадках вдоль радиусов представляются соответственно выражениями

$$\mathbf{e}_r \cdot \hat{T} = e_r \sigma_r + e_\theta \tau_{r\theta}, \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \hat{T} = e_r \tau_{r\theta} + e_\theta \sigma_\theta.$$

Но эти векторы \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ задаются комплексными числами

$$e^{i\theta}, \quad ie^{i\theta}.$$

Поэтому, вернувшись к (1.13.4), приходим к таким выражениям векторов напряжений:

$$\begin{aligned} (\sigma_r + i\tau_{r\theta}) e^{i\theta} &= 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} e^{i\theta} - \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} e^{-i\theta} \right), \\ (\sigma_\theta - i\tau_{r\theta}) e^{i\theta} &= 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} e^{i\theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} e^{-i\theta} \right) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_r + i\tau_{r\theta} &= 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} e^{-2i\theta} \right), \quad \sigma_\theta - i\tau_{r\theta} = 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} e^{-2i\theta} \right). \end{aligned} \quad (1.13.7)$$

Отсюда приходим к таким представлениям формул Г. В. Колосова:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} e^{2i\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) e^{2i\theta}. \quad (1.13.8)$$

Конечно, их можно было получить, перейдя к выражениям компонент тензора напряжений в системе осей, повернутых на угол θ относительно исходной декартовой системы.

Эти формальные преобразования закончим формулой для вектора перемещения; сославшись на (1.12.2), (1.7.6) и введя обозначение

$$s + it = \nabla^2 U + it = 4\varphi'(z), \quad F(z) = S + iT = 4\varphi(z), \quad (1.13.9)$$

имеем

$$2\mu(u + iv) = 4(1 - \nu)\varphi(z) - 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + 2\mu(u_0 + iv_0 + i\omega_0 z) \quad (1.13.10)$$

или, в полярных координатах,

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left[4(1 - \nu)\varphi(z) - 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right] + 2\mu e^{-i\theta} (u_0 + iv_0) + 2\mu i\omega_0 r. \quad (1.13.11)$$

1.14. Формула Гурса. Эта формула дает представление би-гармонической функции через две функции комплексного переменного. Исходными служат соотношения (1.12.4) и (1.13.9):

$$\nabla^2 U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \nabla^2 U + it = 4\varphi'(z), \quad \nabla^2 U - it = 4\bar{\varphi}'(\bar{z}).$$

Из них получаем

$$\frac{1}{2} \nabla^2 U = 2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}), \quad (1.14.1)$$

и интегрирование по z , вводящее аддитивно входящую функцию от \bar{z} , обозначаемую $\bar{\chi}'(\bar{z})$, дает

$$2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z}).$$

Еще одно интегрирование приводит к искомому представлению

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z}) + \chi(z). \quad (1.14.2)$$

Внесенная справа при этом интегрировании по \bar{z} функция равна $\chi(z)$, так как U — вещественная функция.

Все формулы предшествующего пункта легко выразить теперь через функции $\varphi(z)$, $\chi(z)$. При этом используются упрощающие записи обозначения

$$\varphi'(z) = \Phi(z), \quad \chi'(z) = \psi(z), \quad \psi'(z) = \Psi(z). \quad (1.14.3)$$

Приходим к основным соотношениям для напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] = 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)] = 4\operatorname{Re} \Phi(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \end{aligned} \right\} \quad (1.14.4)$$

и для вектора перемещения

$$2\mu(u + iv) = (3 - 4\nu)\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) + 2\mu(u_0 + iv_0 + i\omega_0 z). \quad (1.14.5)$$

Отметим еще формулы

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'(\bar{z}) - \bar{\Psi}(\bar{z}), \\ \sigma_y + i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z), \end{aligned} \right\} \quad (1.14.6)$$

$$P + iQ = -i[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})], \quad m^0 = \operatorname{Re}[\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\Phi'(z)], \quad (1.14.7)$$

а также соотношение

$$2\mu(u + iv) = 4(1 - \nu)\varphi(z) - i(P + iQ) + 2\mu(u_0 + iv_0 + i\omega_0 z). \quad (1.14.8)$$

Представления в полярных координатах имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r + i\tau_{r\theta} &= \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z}\bar{\Phi}'(\bar{z}) - \frac{\bar{z}}{z}\bar{\Psi}(\bar{z}), \quad \sigma_\theta - i\tau_{r\theta} = \\ &= \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \frac{\bar{z}}{z}\bar{\Psi}(\bar{z}) \quad \left(e^{-2i\theta} = \frac{\bar{z}}{z}\right), \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= 4\operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \\ &= 2\left[z\Phi'(z) + \frac{z}{\bar{z}}\Psi(z)\right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.14.9)$$

Функция $\chi(z)$ входит лишь в выражение момента m^0 ; ее знание чаще всего излишне. Поэтому часто оказывается ненужным и разыскание функции напряжений; напряженное состояние и перемещения в плоской задаче целиком определяются двумя функциями комплексного переменного $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и их производными. Систематическое применение этих функций к решению краевых задач плоской теории упругости принадлежит Н. И. Мусхелишвили; далее они называются функциями Мусхелишвили.

Изучение аналитического характера функций Н. И. Мусхелишвили проводится в § 5 этой главы; в §§ 2—4 рассматриваются решения задач, не требующие применений теории функций комплексного переменного.

Проекция на ось x_3 вектора поворота ω , называемая поворотом ε , определяется по формуле

$$\begin{aligned} i_3 \cdot \omega = \varepsilon &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) v - i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) u \right] = \\ &= -\frac{i}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} (u + iv) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u - iv) \right] \end{aligned}$$

и по (1.14.5):

$$\mu \varepsilon = -(1 - \nu) i [\Phi(z) - \bar{\Phi}(\bar{z})] + \mu \omega_0. \quad (1.14.10)$$

З а м е ч а н и е. Полагая в формуле Гурса (1.14.2)

$$\varphi(z) = p + iq, \quad \operatorname{Re} \chi(z) = r,$$

имеем

$$U = xp + yq + r,$$

и это общее представление бигармонической функции преобразуется к одному из видов

$$U = 2xp + (yq - xp + r) = 2yq + (xp - yq + r),$$

причем величины в скобках — гармонические функции. Приняв же в формуле Гурса

$$\varphi(z) = z\varphi_1(z), \quad \operatorname{Re} \varphi_1(z) = p_1,$$

получим

$$U = \frac{1}{2} z\bar{z} [\varphi_1(z) + \bar{\varphi}_1(\bar{z})] + r = (x^2 + y^2) p_1 + r.$$

Этим подтверждается, что всякая бигармоническая функция представима в одном из видов (1.11.1).

1.15. Перенос начала координат. При параллельном переносе координатной системы в точку $z = c$,

$$z = z_1 + c, \quad z_1 = x_1 + iy_1, \quad (1.15.1)$$

новые значения функций Мусхелишвили обозначаются $\Phi_1(z_1)$, $\Psi_1(z_1)$. Компоненты тензора напряжений остаются при этом неизменными. Поэтому согласно (1.14.4) имеем

$$\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) = \Phi_1(z_1) + \bar{\Phi}_1(\bar{z}_1), \quad \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = \bar{z}_1\Phi'_1(z_1) + \Psi_1(z_1). \quad (1.15.2)$$

Отсюда следует

$$[\Phi_1(z_1) - \Phi(z_1 + c)] + [\bar{\Phi}_1(\bar{z}_1) - \bar{\Phi}(\bar{z}_1 + \bar{c})] = 0,$$

и можно удовлетворить этому соотношению, приняв

$$\Phi_1(z_1) - \Phi(z_1 + c) = i\alpha,$$

причем α — вещественная постоянная; ее можно принять равной нулю, так как добавление чисто мнимой постоянной к выражению $\Phi_1(z_1)$ не влияет на напряжения и вносит лишь слабое, соответствующее перемещению фигуры как твердого тела, в выражение вектора $u + iv$. Итак,

$$\Phi_1(z_1) = \Phi(z_1 + c), \quad \varphi_1(z_1) = \varphi(z_1 + c). \quad (1.15.3)$$

Обращаясь теперь ко второму соотношению (1.15.2), имеем

$$\Psi_1(z_1) = \Psi(z_1 + c) + (\bar{z}_1 + \bar{c})\Phi'(z_1 + c) - \bar{z}_1\Phi'_1(z_1),$$

так что по (1.15.3)

$$\Psi_1(z_1) = \Psi(z_1 + c) + \bar{c}\Phi'(z_1 + c), \quad \psi_1(z_1) = \psi(z_1 + c) + \bar{c}\Phi(z_1 + c). \quad (1.15.4)$$

§ 2. Балка и брус с круговой осью

2.1. Постановка плоской задачи о балке и плите. Рассматривается обобщенное плоское напряженное состояние в прямоугольной полосе длины l и высоты $2b$ ($0 \leq x \leq l$, $-b \leq y \leq b$). Принимается, что $2b \ll l$, и это делает приемлемой, в соответствии с принципом Сен-Венана, допустимость точного выполнения краевых условий только на длинных сторонах $y = \pm b$ прямоугольной области и замену распределения поверхностных сил на коротких сторонах ($x = 0$, $x = l$) статически эквивалентным распределением — продольной и поперечной силами P , Q и изгибающим моментом μ . Поперечное сечение балки представляет прямоугольник толщиной h и высотой $2b$, причем $h \ll b$, что позволяет ограничиться рассмотрением средних значений напряжений и перемещений по толщине балки. Принятая постановка задачи применима также к задаче о плоской деформации плиты, теоретически бесконечно протяженной по оси x_3 , когда закон нагружения ее граней $y = \pm b$, $x = 0$, $x = l$ не зависит от x_3 . Размер по оси x_3 не фигурирует в дальнейшем изложении, он может быть принят равным единице длины. Переход к формулам задачи о плите от формул рассматриваемой далее задачи о балке осуществляется в соответствии с правилом (1.6.5) путем замены

$$\nu \text{ на } \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}. \quad (2.1.1)$$

При этом, поскольку значение модуля сдвига μ в этом переходе сохраняется,

$$2\mu = \frac{E}{1 + \nu} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} = E_1(1 - \nu), \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (2.1.2)$$

В дальнейшем продольные стороны балки $y = b$, $y = -b$ называем верхней и нижней, а поперечные сечения $x = 0$, $x = l$ — торцами (левым и правым).

Условия нагружения сторон балки записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} y = b: & \quad \sigma_y = Y^+(x), \quad \tau_{xy} = X^+(x), \\ y = -b: & \quad \sigma_y = -Y^-(x), \quad \tau_{xy} = -X^-(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

где функции $X^\pm(x)$, $Y^\pm(x)$ заданы при $0 < x < l$. Следуя принятому в строительной механике приему разложения нагрузки

на симметричную и кососимметричную части, введем в рассмотрение функции

$$\left. \begin{aligned} \tau_1(x) &= \frac{1}{2} [X^+(x) + X^-(x)], & \tau_2(x) &= \frac{1}{2} [X^+(x) - X^-(x)], \\ \sigma_1(x) &= \frac{1}{2} [Y^+(x) - Y^-(x)], & \sigma_2(x) &= \frac{1}{2} [Y^+(x) + Y^-(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

Это позволяет разбить задачу на две, называемые далее задачами А и Б:

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad y = \pm b: \quad \sigma_y &= \sigma_1(x), & \tau_{xy} &= \pm \tau_1(x), \\ \text{Б} \quad y = \pm b: \quad \sigma_y &= \pm \sigma_2(x), & \tau_{xy} &= \tau_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

Наложение решений этих задач приводит, что нетрудно проверить, к задаче с заданными краевыми условиями (2.1.3).

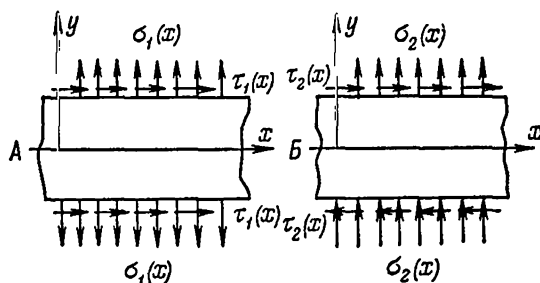


Рис. 38.

В задаче А нормальные поверхностные силы на верхней и нижней сторонах имеют противоположные направления (растяжение по оси y при $\sigma_1 > 0$), а касательные — одинаковые направления (растяжение по оси x при $\tau_1 > 0$). В задаче Б нормальные поверхностные силы на верхней и нижней сторонах направлены одинаково (вверх, то есть по оси y при $\sigma_2 > 0$), а касательные — противоположно (при $y = b$, $\tau_2 > 0$ — вправо). В задаче А перемещение u четно, v нечетно по y ; конечно, u нечетно, а v четно по y в задаче Б. Задачу А следует назвать задачей растяжения, а Б — изгиба (рис. 38).

Система поверхностных сил на части балки $(0, x)$ статически эквивалентна продольной и поперечной силам

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= \int_0^x [X^+(x) + X^-(x)] dx = 2 \int_0^x \tau_1(x) dx, \\ Q(x) &= \int_0^x [Y^+(x) + Y^-(x)] dx = 2 \int_0^x \sigma_2(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (2.1.6)$$

и изгибающему моменту относительно точки $(x, 0)$

$$\begin{aligned}\mu(x) &= - \int_0^x (x - \xi) [Y^+(\xi) + Y^-(\xi)] d\xi - b \int_0^x [X^+(\xi) - X^-(\xi)] d\xi = \\ &= - 2 \int_0^x (x - \xi) \sigma_2(\xi) d\xi - 2b \int_0^x \tau_2(\xi) d\xi. \quad (2.1.7)\end{aligned}$$

В частности, на правом торце

$$\left. \begin{aligned}x = l: \quad P(l) &= 2 \int_0^l \tau_1(x) dx, \quad Q(l) = 2 \int_0^l \sigma_2(x) dx, \\ \mu(l) &= -lQ + 2 \int_0^l \xi \sigma_2(\xi) d\xi - 2b \int_0^l \tau_2(x) dx,\end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

и чтобы сделать этот торец свободным от нагружения в смысле Сен-Венана, надо приложить к нему силы $-P(l)$, $-Q(l)$ и момент $-\mu(l)$.

2.2. Плоская задача Сен-Венана. Предполагается, что продольные стороны $y = \pm b$ свободны от нагружения, а поверхностные силы на правом торце статически эквивалентны продольной силе P , поперечной силе Q и изгибающему моменту μ .

В задаче о растяжении продольной силой отлично от нуля и равномерно распределено по высоте полосы напряжение σ_x , тогда как $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$. Функция Эри представляется простейшим выражением

$$U_A = \frac{P}{4b} y^2. \quad (2.2.1)$$

Приложение положительного (вращающего от оси x к оси y) изгибающего момента μ создает только напряжения σ_x , сжимающие на верхней части полосы ($y > 0$) и линейно распределенные по высоте. Сославшись, например, на (1.4.6) гл. VI, имеем

$$\sigma_x = -\frac{\mu}{I} y, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad I = \frac{2}{3} b^3,$$

где I — момент инерции поперечного сечения относительно оси x_3 (при единичном размере по толщине). Поэтому

$$U_B^{(1)} = -\frac{\mu}{6I} y^3 = -\frac{\mu}{4b^3} y^3. \quad (2.2.2)$$

Более сложна задача изгиба поперечной силой Q , прикладываемой на правом торце. Тогда

$$\sigma_x = -\frac{Q(l-x)}{I} y, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{Q}{I} y, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x},$$

и можно удовлетворить этим уравнениям и краевым условиям отсутствия напряжений τ_{xy} и σ_y на продольных сторонах $y = \pm b$, приняв

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{2I} (b^2 - y^2), \quad \sigma_y = 0.$$

Этим значениям напряжений удовлетворяет бигармоническая функция напряжений

$$U_B^{(2)} = \frac{Q}{2I} (l - x) y \left(b^2 - \frac{y^2}{3} \right). \quad (2.2.3)$$

Сославшись на формулы п. 1.7, имеем

$$s = \nabla^2 U_B^{(2)} = \sigma_x = -\frac{Q}{I} (l - x) y, \quad s + it = \frac{Q}{I} i \left(lz - \frac{1}{2} z^2 \right),$$

так что

$$S + iT = \frac{Q}{2I} i \left(lz^2 - \frac{z^3}{3} \right), \quad S = \frac{Q}{2I} \left(-2lxy + x^2y - \frac{1}{3} y^3 \right),$$

$$T = \frac{Q}{2I} \left[l(x^2 - y^2) - \frac{x^3}{3} + xy^2 \right]$$

и перемещения оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} EIu &= \frac{Q}{2} \left[(1 + \nu) y \left(b^2 - \frac{y^2}{3} \right) - 2lxy + x^2y - \frac{1}{3} y^3 \right] + EI(u_0 - \omega_0 y), \\ EIv &= \frac{Q}{2} \left[-(1 + \nu) (l - x) (b^2 - y^2) + l(x^2 - y^2) - \frac{x^3}{3} + xy^2 \right] + \\ &\quad + EI(v_0 + \omega_0 x). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

Постоянные u_0 , v_0 находим из условий обращения в нуль перемещений в точке $(0, 0)$; для определения ω_0 полагаем, как указывалось в п. 2.2 гл. VI,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{00} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{00} = 0$$

— первый случай соответствует заделке примыкающего к точке $(0, 0)$ элемента dx на оси балки, а второй — заделке элемента dy в поперечном сечении. Уравнение упругой линии, найденное по второму уравнению (2.2.4) при $y = 0$, будет

$$v(x, 0) = \frac{Q}{2EI} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + \left[\frac{\tau_{xy}^0}{\mu} x \right], \quad (2.2.5)$$

где слагаемым в квадратной скобке, добавляемым при втором способе заделки, учитывается влияние касательных напряжений на прогиб. Значение этой поправки можно характеризовать величиной ее отношения на конце балки к прогибу конца, вычисляемому при заделке первым способом:

$$\frac{\tau_{xy}^0 l}{\mu} : \frac{Ql^3}{3EI} = 3(1 + \nu) \frac{b^2}{l^2}. \quad (2.2.6)$$

Применимость принципа Сен-Венана предполагает, как указывалось, малость отношения b/l ; поправка в прогибе на влияние касательных напряжений пропорциональна квадрату этого отношения — это обычный порядок коррективов, вносимых в техническую теорию балки.

2.3. Операторное представление решений. Этот простой способ записи решений задач математической физики для полосы $|y| \leq b$ проще всего пояснить на примере уравнения Лапласа

$$\nabla^2 F = \partial^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\partial = \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (2.3.1)$$

Его решение разыскивается в форме степенного ряда по y

$$F = \sum_{s=0}^{\infty} y^{2s} f_{2s}(x) + \sum_{s=0}^{\infty} y^{2s+1} f'_{2s}(x) *). \quad (2.3.2)$$

Подставив его в (2.3.1), после перегруппировки получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} y^{2s} [\partial^2 f_{2s}(x) + (2s+1)(2s+2) f_{2s+2}(x)] + \\ + \sum_{s=0}^{\infty} y^{2s+1} [\partial^2 f'_{2s}(x) + (2s+2)(2s+3) f'_{2s+2}(x)] = 0 \end{aligned}$$

и, приравняв нулю коэффициенты при y^{2s} , y^{2s+1} для $s=0, 1, 2, \dots$, приходим к цепи равенств

$$\begin{aligned} \partial^2 f_0(x) + 1 \cdot 2 f_2(x) &= 0, & \partial^2 f'_0(x) + 2 \cdot 3 f'_2(x) &= 0, \\ \partial^2 f_2(x) + 3 \cdot 4 f_4(x) &= 0, & \partial^2 f'_2(x) + 4 \cdot 5 f'_4(x) &= 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial^2 f_{2s}(x) + (2s+1)(2s+2) f_{2s+2}(x) &= 0, & \partial^2 f'_{2s}(x) + (2s+2)(2s+3) f'_{2s+2}(x) &= 0, \end{aligned}$$

позволяющих выразить все коэффициенты ряда (2.3.2) через $f_0(x)$, $f'_0(x)$, то есть через значения искомого решения $F(x, y)$ и его первой производной по y на прямой $y=0$ (на оси полосы):

$$f_{2s}(x) = \frac{(-1)^s}{(2s)!} \partial^{2s} f_0(x), \quad f'_{2s}(x) = \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \partial^{2s} f'_0(x). \quad (2.3.3)$$

Итак,

$$F(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^s}{(2s)!} (y\partial)^{2s} f_0(x) + \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \frac{(y\partial)^{2s+1}}{\partial} f'_0(x) \right], \quad (2.3.4)$$

*) Здесь $f'_{2s}(x)$ не обозначает производной $f_{2s}(x)$ по x ; дифференцирование по x указывается буквой ∂ .

но этот же результат можно представить в другой записи:

$$F(x, y) = \cos y \partial f_0(x) + \frac{\sin y \partial}{\partial} f'_0(x). \quad (2.3.5)$$

Смысл ее ясен — следует заменить $\cos y \partial$, $(\sin y \partial)/\partial$ рядом по степеням ∂^2 и вернуть букве ∂ ее значение оператора дифференцирования по x над функциями $f_0(x)$, $f'_0(x)$, перед которыми она написана в (2.3.5).

Легко, однако, прийти к решению (2.3.5), не прибегая к действиям с рядами, а записав уравнение Лапласа (2.3.1) в виде обыкновенного дифференциального уравнения по независимой переменной y , в котором ∂ рассматривается временно как число

$$F'' + \partial^2 F = 0. \quad (2.3.6)$$

Решению этого уравнения при начальных условиях

$$\text{при } y = 0 \quad F = f_0(x), \quad F' = f'_0(x), \quad (2.3.7)$$

записываемому в форме (2.3.5), дается в конечном счете вышеприведенное истолкование. Промежуточные вычисления выполняются не непосредственно над рядами, а по их представлениям (2.3.5). Например, среднее значение $F(x, y)$ по «высоте полосы», значение ее нормальной производной при $y = b$ могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^b F(x, y) dy = \frac{\sin b \partial}{b \partial} f_0(x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y=b} = -\partial \sin b \partial f_0(x) + \cos b \partial f'_0(x) \text{ и т. д.}$$

Нет нужды также заботиться о сходимости ряда (2.3.4), представленного записью (2.3.5), дающей только формальный прием построения решения, последнее в окончательном виде может быть выражено не степенным рядом, а в другой форме.

2.4. Функция напряжений в задаче о полосе. Следуя сказанному в п. 2.3, запишем бигармоническое уравнение для функции Эри в виде

$$U^{IV} + 2\partial^2 U'' + \partial^4 U = 0. \quad (2.4.1)$$

Здесь требуется задание четырех начальных условий — значений U и ее производных первого, второго и третьего порядков при $y = 0$. Для упрощения последующих формул будем искать U в форме суммы ее четной и нечетной по y частей, что соответствует разбиению на задачи А и Б. Вычисления далее ведутся параллельно. Начальные условия записываются в виде

$$\left. \begin{array}{ll} \text{А} & y=0: \quad U=f_0(x), \quad U'=0, \quad U''=f''_0(x), \quad U'''=0, \\ \text{Б} & y=0: \quad U=0, \quad U'=f'_0(x), \quad U''=0, \quad U'''=f'''_0(x), \end{array} \right\} \quad (2.4.2)$$

и соответствующие решения «обыкновенного» дифференциального уравнения (2.4.1) будут

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad U(x, y) &= \cos y \partial f_0'(x) + \frac{1}{2} y \frac{\sin y \partial}{\partial} [f_0''(x) + \partial^2 f_0(x)], \\ \text{Б} \quad U(x, y) &= \frac{\sin y \partial}{\partial} f_0'(x) + \\ &+ \frac{1}{2 \partial^2} \left(\frac{\sin y \partial}{\partial} - y \cos y \partial \right) [f_0'''(x) + \partial^2 f_0'(x)], \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad \nabla^2 U &= \cos y \partial [f_0''(x) + \partial^2 f_0(x)], \\ \text{Б} \quad \nabla^2 U &= \frac{\sin y \partial}{\partial} [f_0'''(x) + \partial^2 f_0'(x)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.4)$$

Краевые условия (2.1.5) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \text{А} \quad y = \pm b: \quad \sigma_y &= \partial^2 U = \sigma_1(x), \quad \tau_{xy} = -\partial \frac{\partial U}{\partial y} = \pm \tau_1(x), \\ \text{Б} \quad y = \pm b: \quad \sigma_y &= \partial^2 U = \pm \sigma_2(x), \quad \tau_{xy} = -\partial \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_2(x) \end{aligned}$$

и при обозначениях

$$m_k(x) = \int_0^x (x - \xi) \sigma_k(\xi) d\xi, \quad t_k(x) = \int_0^x \tau_k(\xi) d\xi, \quad k = 1, 2, \quad (2.4.5)$$

определяют выражения функции напряжений и ее нормальной производной при $y = \pm b$:

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad y = \pm b: \quad U &= m_1(x), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mp t_1(x), \\ \text{Б} \quad y = \pm b: \quad U &= \pm m_2(x), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -t_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

По этим условиям определяются неизвестные функции в решении (2.4.3), а по ним и сами эти решения

$$\begin{aligned} \text{А} \quad U(x, y) &= \frac{1}{F_A (2b\partial)} \left[\left(\frac{y}{b} \sin y \partial \sin b\partial + \cos y \partial \cos b\partial + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \cos y \partial \frac{\sin b\partial}{b\partial} \right) m_1(x) - \left(\frac{y}{b} \frac{\sin y \partial}{\partial} \cos b\partial - \cos y \partial \frac{\sin b\partial}{\partial} \right) t_1(x) \right], \end{aligned} \quad (2.4.7A)$$

$$\begin{aligned} \text{Б} \quad U(x, y) &= \frac{1}{F_B (2b\partial)} \left[\left(\frac{y}{b} \cos y \partial \cos b\partial + \sin y \partial \sin b\partial - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{\sin y \partial}{b\partial} \cos b\partial \right) m_2(x) + \left(y \cos y \partial \frac{\sin b\partial}{b\partial} - \frac{\sin y \partial}{\partial} \cos b\partial \right) t_2(x) \right], \end{aligned} \quad (2.4.7B)$$

где введены обозначения

$$F_A(2b\partial) = 1 + \frac{\sin 2b\partial}{2b\partial}, \quad F_B(2b\partial) = 1 - \frac{\sin 2b\partial}{2b\partial}. \quad (2.4.8)$$

Ряды по степеням ∂ выражений в квадратных скобках в задаче А начинаются слагаемым нулевой степени, а в задаче Б — второй степени. Поэтому функции $U(x, y)$ в обеих задачах представимы рядами, содержащими, кроме постоянных слагаемых, только положительные степени ∂ .

Перемещения, вычисляемые по формулам (1.7.7), оказываются равными

$$\begin{aligned} 2\mu u &= \frac{1}{F_A(2b\partial)} \left[\partial \left(-\cos y\partial \cos b\partial - \frac{y}{b} \sin y\partial \sin b\partial + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos y\partial \frac{\sin b\partial}{b\partial} \right) m_1(x) + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\cos y\partial \sin b\partial + \frac{y}{b} \sin y\partial \cos b\partial - \frac{2}{1+\nu} \cos y\partial \frac{\cos b\partial}{b\partial} \right) t_1(x) \right], \\ 2\mu v &= \frac{1}{F_A(2b\partial)} \left[\partial \left(\sin y\partial \cos b\partial - \frac{y}{b} \cos y\partial \sin b\partial + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{1+\nu} \sin y\partial \frac{\sin b\partial}{b\partial} \right) m_1(x) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin y\partial \sin b\partial + \frac{y}{b} \cos y\partial \cos b\partial - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\sin y\partial}{b\partial} \cos b\partial \right) t_1(x) \right], \\ &\hspace{15em} (2.4.9A) \\ 2\mu u &= \frac{1}{F_B(2b\partial)} \left[-\partial \left(\frac{y}{b} \cos y\partial \cos b\partial + \sin y\partial \sin b\partial + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\sin y\partial}{b\partial} \cos b\partial \right) m_2(x) + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{y}{b} \cos y\partial \sin b\partial + \sin y\partial \cos b\partial - \frac{2}{1+\nu} \sin y\partial \frac{\sin b\partial}{b\partial} \right) t_2(x) \right], \\ 2\mu v &= \frac{1}{F_B(2b\partial)} \left[\partial \left(\frac{y}{b} \sin y\partial \cos b\partial - \cos y\partial \sin b\partial + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{1+\nu} \cos y\partial \frac{\cos b\partial}{b\partial} \right) m_2(x) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y}{b} \sin y\partial \sin b\partial + \cos y\partial \cos b\partial + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos y\partial \frac{\sin b\partial}{b\partial} \right) t_2(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.9B)$$

В эти формулы входят слагаемые, разложения которых в ряды содержат и отрицательные степени; можно было это предвидеть, так как определение перемещений требует дальнейшего интегрирования выражений поверхностных сил.

Выражения напряжений легко получить дифференцированием функции напряжений (2.4.7). Не приводя этих громоздких

формул, отметим, что представление наиболее важных в теории балок величин оказывается достаточно простым. Например, нормальные напряжения $\sigma_x(x, \pm b)$ на продольных сторонах балки оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad \sigma_x(x, \pm b) &= -\frac{F_B(2b\partial)}{F_A(2b\partial)} \sigma_1(x) - \frac{2 \cos^2 b\partial}{F_A(2b\partial)} \frac{1}{b} t_1(x), \\ \text{Б} \quad \sigma_x(x, \pm b) &= \mp \frac{F_A(2b\partial)}{F_B(2b\partial)} \sigma_2(x) \mp \frac{2 \sin^2 b\partial}{F_B(2b\partial)} \frac{1}{b} t_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.10)$$

Касательное напряжение $\tau_{xy}(x, 0)$ на оси балки оказывается равным

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad \tau_{xy}(x, 0) &= 0, \\ \text{Б} \quad \tau_{xy}(x, 0) &= \frac{1}{F_B(2b\partial)} \left[-\sin b\partial \sigma_2(x) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos b\partial - \frac{\sin b\partial}{b\partial} \right) \tau_2(x) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.11)$$

Уравнение упругой линии записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad v(x, 0) &= 0, \\ \text{Б} \quad 2\mu v(x, 0) &= \frac{\partial}{F_B(2b\partial)} \left[\left(-\sin b\partial + \frac{2}{1+\nu} \frac{\cos b\partial}{b\partial} \right) m_2(x) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos b\partial + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\sin b\partial}{b\partial} \right) t_2(x) \right] + 2\mu (\omega_0 x + v_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.12)$$

Применимость этих формул, казалось бы, обусловлена неограниченной дифференцируемостью функций, задающих поверхностные силы. Однако ниже будет показано, что это ограничение может быть устранено. Приведенным формальным представлениям оказывается возможным придать вполне определенный смысл и при наличии кусочно-непрерывных поверхностных сил и даже сосредоточенных сил и моментов.

Отметим еще используемые ниже представления операторов F_A и F_B и обратных им величин:

$$\left. \begin{aligned} F_A(2b\partial) &= 2 \left(1 - \frac{1}{3} b^2 \partial^2 + \frac{1}{15} b^4 \partial^4 - \frac{2}{315} b^6 \partial^6 + \dots \right), \\ \frac{1}{F_A(2b\partial)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} b^2 \partial^2 + \frac{2}{45} b^4 \partial^4 - \frac{1}{2635} b^6 \partial^6 + \dots \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.4.13A)$$

$$\left. \begin{aligned} F_B(2b\partial) &= \frac{2}{3} b^2 \partial^2 \left(1 - \frac{1}{5} b^2 \partial^2 + \frac{2}{105} b^4 \partial^4 - \frac{1}{945} b^6 \partial^6 + \dots \right), \\ \frac{1}{F_B(2b\partial)} &= \frac{3}{2b^2 \partial^2} \left(1 + \frac{1}{5} b^2 \partial^2 + \frac{11}{525} b^4 \partial^4 + \frac{34}{23625} b^6 \partial^6 + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.13B)$$

Наличие множителя ∂^{-2} в выражении F_B^{-1} обуславливает большую сложность задач изгиба по сравнению с задачей растяжения.

2.5. Элементарная теория балки. При удержании в степенных рядах по ∂ только не зависящего от ∂ слагаемого выражения функции напряжений (2.4.7) представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad U^0(x, y) &= m_1(x) + \frac{1}{2b}(b^2 - y^2)t_1(x), \\ \text{Б} \quad U^0(x, y) &= \frac{y}{I} \left[\left(b^2 - \frac{1}{3}y^2 \right) m_2(x) + \frac{1}{3}(b^2 - y^2)bt_2(x) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.5.1)$$

и определяемые по ним напряжения оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{t_1(x)}{b} - \frac{2y}{I} [m_2(x) + bt_2(x)], \\ \sigma_y &= \sigma_1(x) + \frac{1}{2}(b^2 - y^2)\frac{1}{b}\tau'_1(x) + \frac{y}{I} \left[\left(b^2 - \frac{1}{3}y^2 \right) \sigma_2(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}(b^2 - y^2)b\tau'_2(x) \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{y}{b}\tau_1(x) - \frac{1}{I} \left[(b^2 - y^2)m'_2(x) + \left(\frac{1}{3}b^2 - y^2 \right) b\tau_2(x) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

Здесь, как выше, $I = \frac{2}{3}b^3$. Эти выражения, конечно, удовлетворяют уравнениям статики в объеме и краевым условиям на продольных сторонах балки, тогда как зависимости Бельтрами не выполнены, так как функции напряжений (2.5.1) при произвольном задании поверхностных сил не являются бигармоническими. Заметим еще, что в представленном решении (2.5.2) торец $x = 0$ свободен (в смысле Сен-Венана) от нагружения — на нем продольная и поперечная силы и изгибающий момент равны нулю [см. формулы (2.4.5)].

Определяемые по (2.5.2) распределения напряжений σ_x и касательных напряжений, создаваемых нормальным нагружением, принимаются в элементарной теории балки; нормальные напряжения σ_y в этой теории не учитываются.

Поскольку функции напряжений (2.5.1) не являются бигармоническими, перемещения следует определить низшим членом разложений в ряд по ∂ из общих представлений (2.4.9). Приходим к выражениям

$$\left. \begin{aligned} Eu &= -vm'_1(x) - \frac{1}{b} \int_0^x t_1(\xi) d\xi + \frac{y}{I} \int_0^x \mu^0(\xi) d\xi + u_0 - \omega_0 y, \\ Ev &= y\sigma_1(x) + v \frac{y}{b} t_1(x) - \frac{1}{I} \int_0^x (x - \xi) \mu^0(\xi) d\xi + v_0 + \omega_0 x, \end{aligned} \right\} \quad (2.5.3)$$

причем

$$\mu^0(x) = -2[m_2(x) + bt_2(x)] \quad (2.5.4)$$

представляет изгибающий момент относительно точки $(x, 0)$, создаваемый поверхностными силами, распределенными по отрезку $[0, x]$ балки.

Уравнение упругой линии представляется в виде

$$EI \frac{d^2}{dx^2} v(x, 0) = -\mu^0(x). \quad (2.5.5)$$

Итак, элементарная теория полностью содержится в первом члене разложения строгого решения; следующие его члены, содержащие производные от задающих нагружение функций, представляют коррективы, вносимые один за другим в элементарную теорию. Порядок их по отношению к основным слагаемым элементарной теории пропорционален последовательным степеням отношения b^2/l^2 ; они оказываются существенными при резко изменяющихся по длине балки поверхностных силах и для сравнительно коротких балок. Можно еще отметить, что эти коррективы определяют статически эквивалентные нулю системы напряжений, так как уравнения статики в объеме и на поверхности уже удовлетворены в исходном приближении (2.5.1).

2.6. Полиномиальное нагружение (Менаже, 1901). При нагружении поверхностными силами, задаваемыми полиномом степени n , высшая степень полиномов, входящих в правые части выражений (2.4.7), равна $n + 2$; поэтому разложения этих выражений в ряды по степеням ∂ обрываются; функция напряжений представляется автоматически находимым полиномом от x, y .

Например, при равномерном нормальном нагружении $Y^+(x) = \text{const}$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} Y^+(x), \quad m_1(x) = m_2(x) = \frac{1}{4} Y^+ x^2$$

и в разложениях задачи А следует сохранить лишь слагаемые с ∂^2 , тогда как в задаче Б должны быть учтены и члены разложения с ∂^4 , так как формулы (2.4.7Б) содержат множитель ∂^{-2} . Степени слагаемых разложения возрастают через две единицы, поэтому вычисление при линейном законе нагружения проводится до тех же степеней ∂^2 и ∂^4 . В случае нагружения по квадратичному или кубическому закону требуется сохранить четвертую в задаче А и шестую степень ∂ в задаче Б и т. д.

Вычисление при равномерном или линейном нормальном нагружении приводит к таким выражениям функций напряжений (в задаче А слагаемые с ∂^2 уничтожаются):

$$\left. \begin{array}{ll} \text{А} & U_A(x, y) = U_A^0(x, y), \\ \text{Б} & U_B(x, y) = U_B^0(x, y) + \frac{y}{30I} (b^2 - y^2)^2 \sigma_2(x). \end{array} \right\} \quad (2.6.1)$$

В них слагаемые U_A^0 , U_B^0 определяются формулами (2.5.1). Напряжения, налагаемые на решения (2.5.2), оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \frac{2}{15I} y (5y^2 - 3b^2) \sigma_2(x), \\ \sigma_y^{(1)} &= \frac{1}{30I} (b^2 - y^2)^2 y \sigma_2''(x), \\ \tau_{xy}^{(1)} &= -\frac{1}{30I} (b^4 - 6b^2 y^2 + 5y^4) \sigma_2'(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.6.2)$$

причем $\sigma_2''(x) = 0$, а $\sigma_2'(x)$ постоянно при линейном и равно нулю при равномерном нагружении.

В уравнение упругой линии, составляемое по формулам (2.4.12), кроме слагаемого элементарной теории, пропорционального двойному интегралу над изгибающим моментом $\mu^0(x)$, войдут члены, пропорциональные этому моменту и его второй производной $\sigma_2(x)$:

$$\begin{aligned} EI v(x, 0) = & - \int_0^x (x - \xi) \mu^0(\xi) d\xi - \frac{b^2}{5} (8 + 5\nu) m_2(x) + \\ & + \frac{1}{5} b^4 \left(\frac{22}{105} - \frac{3 + 4\nu}{4} \right) \sigma_2(x) + v_0 + \omega_0 x, \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Впрочем, слагаемое, пропорциональное $\sigma_2(x)$, включается в выражение перемещения твердого тела.

Приведенные здесь формулы практически применимы к любому закону полиномиального нагружения, так как поправки к ним будут иметь порядок b^4/l^4 и более высокий; учет их в теории, предполагающий применимость принципа Сен-Венана, вряд ли уместен.

Имея решение для случая линейного нагружения, можно ограничиться рассмотрением только статически эквивалентных нулю нагружений. Действительно, по заданному закону нагружения $f(x)$ может быть определено нагружение

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi - \frac{3}{l} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \int_0^l \left(1 - \frac{2\xi}{l} \right) f(\xi) d\xi, \quad (2.6.4)$$

удовлетворяющее требованиям статической эквивалентности нулю

$$\int_0^l \tilde{f}(x) dx = 0, \quad \int_0^l x \tilde{f}(x) dx = 0 \quad (2.6.5)$$

и отличающееся от $f(x)$ линейно зависящим от x нагружением

$$f_*(x) = -\frac{1}{l} \left[\int_0^l f(\xi) d\xi + 3 \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \int_0^l \left(1 - \frac{2\xi}{l} \right) f(\xi) d\xi \right]. \quad (2.6.6)$$

Но для этого нагружения решение известно. Можно ограничиться рассмотрением нагружений с равным нулю главным вектором; тогда достаточно в формуле (2.6.4) сохранить справа два слагаемых.

2.7. Синусоидальное нагружение (решения Рибьера (1898) и Файлона (1903)). Соотношения п. 2.4 можно записать в единой общей форме

$$\Phi(x, y) = Q(y, \partial) f(x), \quad (2.7.1)$$

в которой $\Phi(x, y)$ — искомая величина (функция напряжений, напряжение, перемещения), $f(x)$ определяется законом нагружения, а $Q(y, \partial)$ — заданная функция оператора ∂ , зависящая от y . При нагружении по закону синуса или косинуса

$$f(x) = \begin{cases} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{cases}, \quad \partial^2 f(x) = -\alpha^2 f(x), \dots, \partial^{2s} f(x) = (-\alpha^2)^s f(x)$$

и соотношение (2.7.1) оказывается возможным записать в явной форме

$$\Phi(x, y) = Q(y, \alpha i) f(x), \quad (2.7.2)$$

не прибегая к разложениям в ряды. Например,

$$\cos y \partial f(x) = \cos y \alpha i f(x) = \operatorname{ch} \alpha y f(x), \quad \frac{\sin y \partial}{\partial} f(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha y}{\alpha} f(x)$$

и т. д.

Задавая закон нагружения тригонометрическим рядом вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \alpha_k x + b_k \sin \alpha_k x), \quad \alpha_k = 2 \frac{k\pi}{l}, \quad (2.7.3)$$

в котором, как известно,

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \alpha_k x dx, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \alpha_k x dx, \quad (2.7.4)$$

имеем

$$\Phi(x, y) = \Phi_*(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} Q(y, \alpha_k i) (a_k \cos \alpha_k x + b_k \sin \alpha_k x), \quad (2.7.5)$$

где $\Phi_*(x, y)$ — решение, соответствующее постоянному члену ряда (2.7.3) — среднему значению $f(x)$ на протяжении балки. Оно строится по правилам п. 2.6.

Например, при нормальном лишь нагружении верхней стороны балки $y = b$ по закону

$$Y^+(x) = 2\sigma_1(x) = 2\sigma_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos \alpha_k x + b_k \sin \alpha_k x) \quad (2.7.6)$$

функция напряжений по (2.4.7) представляется рядом

$$\left. \begin{aligned} U_A(x, y) &= -b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \cos \alpha_k x + b_k \sin \alpha_k x}{\alpha_k (2b\alpha_k + \operatorname{sh} 2b\alpha_k)} \left(-\frac{y}{b} \operatorname{sh} \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k b + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ch} \alpha_k y \operatorname{ch} \alpha_k b + \operatorname{ch} \alpha_k y \frac{\operatorname{sh} \alpha_k b}{\alpha_k b} \right) + U_A^*(x, y), \\ U_B(x, y) &= -b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \cos \alpha_k x + b_k \sin \alpha_k x}{\alpha_k (2b\alpha_k - \operatorname{sh} 2b\alpha_k)} \left(\frac{y}{b} \operatorname{ch} \alpha_k y \operatorname{ch} \alpha_k b - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sh} \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k b - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\alpha_k b} \operatorname{ch} \alpha_k b \right) + U_B^*(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (2.7.7)$$

Здесь $U_A^*(x, y)$, $U_B^*(x, y)$ — решения вида (2.6.1), соответствующие постоянному и линейному по x слагаемым в разложении моментов $m_k(x)$ в тригонометрический ряд

$$m_1(x) = m_2(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\alpha_k^2} + x \frac{b_k}{\alpha_k} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^2} (a_k \cos \alpha_k x + b_k \sin \alpha_k x) \right]. \quad (2.7.8)$$

Сходимость рядов (2.7.7) и находимых по ним напряжений при $-b \leq y < b$ обеспечивается наличием слагаемого $\operatorname{sh} 2\alpha_k b$ в знаменателе. Сходимость сохраняется и на нагруженной стороне балки $y = b$, исключая точки разрыва нагрузки.

Пример. Рассматривается нагружение балки длины $2l$ четной по x «треугольной» нагрузкой

$$Y^+(x) = 2\sigma_1(x) = 2\sigma_2(x) = \frac{1}{2} q \left(1 - \frac{2|x|}{l} \right), \quad |x| \leq l.$$

Ее представление тригонометрическим рядом имеет вид

$$Y^+(x) = \frac{4q}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k^4}, \quad |x| < l, \quad \alpha_k = (2k-1) \frac{\pi}{l},$$

и по (2.7.8)

$$m_1(x) = m_2(x) = \frac{2q}{l^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k^4} \right) = \frac{ql^2}{48} - \frac{2q}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k^4},$$

причем использовано известное соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Вычисляемые по (2.4.10) нормальные напряжения σ_x на сторонах балки даются формулами

$$\sigma_x(x, \pm b) = \frac{2q}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k^2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2b\alpha_k - 2b\alpha_k}{\operatorname{sh} 2b\alpha_k + 2b\alpha_k} \pm \frac{\operatorname{sh} 2b\alpha_k + 2b\alpha_k}{\operatorname{sh} 2b\alpha_k - 2b\alpha_k} \right) \mp \frac{b}{l} \frac{ql^2}{24},$$

причем постоянное слагаемое определено по (2.5.2).

Эти формулы преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(x, b) &= Y^+(x) + \frac{32qb^2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\operatorname{sh}^2 2b\alpha_k - 4b^2\alpha_k^2} - \frac{b}{l} \frac{ql^2}{24}, \\ \sigma_x(x, -b) &= -\frac{16qb}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x \operatorname{sh} 2b\alpha_k}{(\operatorname{sh}^2 2b\alpha_k - 4b^2\alpha_k^2) \alpha_k} + \frac{b}{l} \frac{ql^2}{24}, \end{aligned} \right\} \quad (2.7.9)$$

и здесь обнаруживается не учитываемое в элементарной теории различие абсолютных значений напряжений σ_x на нагруженной и ненагруженной сторонах балки.

В случае очень тонкой балки ($b \ll l$) коэффициенты рядов (2.7.9) заменяются их разложениями по степеням $b\alpha_k$:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh}^2 2b\alpha_k - 4b^2\alpha_k^2)^{-1} &= \frac{3}{16b^4\alpha_k^4} \left(1 - \frac{8}{15} \alpha_k^2 b^2 + \dots \right), \\ \frac{\operatorname{sh} 2b\alpha_k}{\alpha_k} (\operatorname{sh}^2 2b\alpha_k - 4b^2\alpha_k^2)^{-1} &= \frac{3}{8b^4\alpha_k^4} \left(1 + \frac{2}{15} \alpha_k^2 b^2 \right), \end{aligned}$$

и формулы (2.7.9) представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, b) &= Y^+(x) - \frac{16q}{5b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k^2} + \frac{6q}{l^2 b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k^4} - \frac{b}{l} \frac{ql^2}{24}, \\ \sigma_x(x, -b) &= -\frac{4q}{5b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k^2} - \frac{6q}{l^2 b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k^4} + \frac{b}{l} \frac{ql^2}{24} \end{aligned}$$

или, если вспомнить представление $Y^+(x)$ тригонометрическим рядом,

$$\sigma_x(x, \pm b) = \pm \left[\frac{1}{5} Y^+(x) + \frac{b}{l} \mu^0(x) \right]. \quad (2.7.10)$$

Здесь введено обозначение

$$\mu^0(x) = \frac{4q}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k^4} - \frac{ql^2}{24} = -2m_2(x).$$

Согласно (2.5.4) это — изгибающий момент относительно точки $(|x|, 0)$ на оси балки. При $0 < x < l$ его можно в соответствии с (2.4.5) представить также в виде

$$\mu^0(x) = -\frac{1}{2} q \int_0^x (x - \xi) \left(1 - \frac{2\xi}{l}\right) d\xi = -\frac{1}{4} q \left(x^2 - \frac{2}{3} \frac{x^3}{l}\right),$$

и нетрудно проверить, что представление четной по x функции $\mu^0(x)$ для $|x| < l$ тригонометрическим рядом имеет указанный выше вид.

В полученном приближенном решении (2.7.10) исчезает упомянутое различие абсолютных значений величин $\sigma_x(x, \pm b)$. Нетрудно сообразить, что (2.7.10) соответствует решению задачи о балке длины l , левый конец которой ($x = 0$) свободен, нагруженной по линейному закону

$$Y^+(x) = \frac{1}{2} q \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \quad 0 < x < l.$$

Отметим, что, вследствие симметрии нагружения левой и правой ($x < 0$, $x > 0$) балки длины $2l$, в ее середине $x = 0$ отсутствуют перерезывающая сила и изгибающий момент. Привычные представления элементарной теории изгиба балки позволяют при таких условиях, отбросив левую часть балки ($-l < x < 0$), ограничиться рассмотрением только ее правой части. Отличие строгого решения (2.7.9) от приближенного (2.7.10) обусловлено тем, что воздействие левой части на правую, передаваемое через поперечное сечение $x = 0$, определяется наличием напряженного состояния в этом сечении, а не только его статически эквивалентными характеристиками.

2.8. Сосредоточенная сила (Карман и Зеевальд, 1927). Функция $f(x)$, задающая закон нагружения, может быть определена не рядом, а интегралом Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda.$$

Здесь $f_c(\lambda)$, $f_s(\lambda)$ — косинус и синус Фурье-трансформанты:

$$f_c(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos u\lambda du, \quad f_s(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin u\lambda du,$$

Тогда решение уравнения (2.7.1) также представится интегралом Фурье

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_c(\lambda, y) \cos \lambda x + \Phi_s(\lambda, y) \sin \lambda x] d\lambda,$$

причем $\Phi_c(\lambda, y)$, $\Phi_s(\lambda, y)$ — Фурье-трансформанты:

$$\Phi_c(\lambda, y) = Q(\lambda l, y) f_c(\lambda), \quad \Phi_s(\lambda, y) = Q(\lambda l, y) f_s(\lambda).$$

Далее рассматривается задача об оперттой по краям $x = \pm l$ балке, нагруженной нормально к ее продольной стороне $y = b$ сосредоточенной в точке $(0, b)$ силой Q и уравновешивающими ее силами — $Q/2$ (реакциями опор) на краях $(\pm l, b)$. Изгибающий момент $\mu(x)$ в поперечном сечении x при таком нагружении задается «треугольной» эпюрой

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} Ql \left(1 - \frac{|x|}{l}\right), & |x| \leq l, \\ 0, & |x| > l. \end{cases} \quad (2.8.1)$$

Представление этой четной по x функции интегралом Фурье записывается в виде

$$\mu(x) = \frac{Ql}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_0^l \left(1 - \frac{u}{l}\right) \cos \lambda u du = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} (1 - \cos \lambda l) d\lambda.$$

По (2.4.7), учитывая, что при только нормальном нагружении $m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}\mu$, и заменив ∂ на $i\lambda$, представим функцию напряжений в таком виде:

$$\begin{aligned} U(x, y) = & -\frac{Q}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda l}{\lambda^2 \left(1 + \frac{\text{sh } 2b\lambda}{2b\lambda}\right)} \left(-\frac{y}{b} \text{sh } y\lambda \text{sh } b\lambda + \text{ch } y\lambda \text{ch } b\lambda + \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{ch } y\lambda \frac{\text{sh } b\lambda}{b\lambda} \right) \cos \lambda x d\lambda + \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1 - \frac{\text{sh } 2b\lambda}{2b\lambda}} \left(\frac{y}{b} \text{ch } y\lambda \text{ch } b\lambda - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{sh } y\lambda \text{sh } b\lambda - \frac{\text{sh } y\lambda}{b\lambda} \text{ch } b\lambda \right) - \frac{y}{l} \left(b^2 - \frac{y^2}{3} \right) \right] \frac{1 - \cos \lambda l}{\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda \left. \right\} - \\ & - \frac{\mu(x)}{2l} y \left(b^2 - \frac{y^2}{3} \right). \quad (2.8.2) \end{aligned}$$

Здесь выделено слагаемое, соответствующее решению элементарной теории изгиба. Поэтому разложение в степенной ряд по

λ подынтегрального выражения во втором интеграле начнется со слагаемого второй степени.

Нормальное напряжение σ_x представляется выражением

$$\sigma_x = \frac{y}{I} \mu(x) - \frac{Q}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda l}{1 + \frac{\text{sh } 2b\lambda}{2b\lambda}} \left(\text{ch } y\lambda \text{ ch } b\lambda - \frac{y}{b} \text{sh } \lambda y \text{ sh } \lambda b - \right. \right. \\ \left. \left. - \text{ch } y\lambda \frac{\text{sh } b\lambda}{b\lambda} \right) \cos \lambda x d\lambda + \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1 - \frac{\text{sh } 2b\lambda}{2b\lambda}} \left(\frac{y}{b} \text{ch } y\lambda \text{ ch } b\lambda - \text{sh } y\lambda \text{ sh } b\lambda + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\text{sh } y\lambda}{b\lambda} \text{ch } b\lambda \right) + \frac{2y}{I\lambda^2} \right] (1 - \cos \lambda l) \cos \lambda x d\lambda \right\}. \quad (2.8.3)$$

Отсюда находим не учитываемое элементарной теорией нормальное напряжение σ_x на оси балки

$$\sigma_x(x, 0) = -\frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b\lambda \text{ ch } b\lambda - \text{sh } b\lambda}{2b\lambda + \text{sh } 2b\lambda} (1 - \cos \lambda l) \cos \lambda x d\lambda \quad (2.8.4)$$

и напряжения на ее продольных сторонах

$$\sigma_x(x, \pm b) = \pm \frac{b}{I} \mu(x) - \frac{Q}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{2b\lambda - \text{sh } 2b\lambda}{2b\lambda + \text{sh } 2b\lambda} \pm \frac{2b\lambda + \text{sh } 2b\lambda}{2b\lambda - \text{sh } 2b\lambda} \right) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{2b}{I\lambda^2} \right] (1 - \cos \lambda l) \cos \lambda x d\lambda.$$

На стороне $y = -b$ это напряжение определяется сходящимся интегралом

$$\sigma_x(x, -b) = -\frac{2Q}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{2b\lambda \text{ sh } 2b\lambda}{\text{sh}^2 2b\lambda - 4b^2\lambda^2} - \frac{b}{2I\lambda^2} \right) \times \\ \times (1 - \cos \lambda l) \cos \lambda x d\lambda - \frac{b}{I} \mu(x), \quad (2.8.5)$$

тогда как на нагруженной сосредоточенными силами стороне полосу $y = b$ сходимости, естественно, теряется. Получаемое выражение легко приводится к виду

$$\sigma_x(x, b) = \frac{b}{I} \mu(x) + \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - \cos \lambda l) \cos \lambda x d\lambda + \\ + \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{8b^2\lambda^2}{\text{sh}^2 2b\lambda - 4b^2\lambda^2} - \frac{3}{2b^2\lambda^2} \right) (1 - \cos \lambda l) \cos \lambda x d\lambda. \quad (2.8.6)$$

Замечая, что

$$\cos \lambda x \cos \lambda l = \frac{1}{2} [\cos \lambda (l + x) + \cos \lambda (l - x)], \quad (2.8.7)$$

и вспоминая представление дельта-функции с помощью интеграла Фурье

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x \, d\lambda,$$

приходим к выражению

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, b) = & \frac{b}{l} \mu(x) + Q \delta(x) - \frac{1}{2} Q \delta(l+x) - \frac{1}{2} Q \delta(l-x) + \\ & + \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{8b^2\lambda^2}{\operatorname{sh}^2 2b\lambda - 4b^2\lambda^2} - \frac{3}{2b^2\lambda^2} \right) \left[\cos \lambda x - \frac{1}{2} \cos \lambda (l+x) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \cos \lambda (l-x) \right] d\lambda. \quad (2.8.8) \end{aligned}$$

Выражение

$$\begin{aligned} \delta(x - \xi) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{8b^2\lambda^2}{\operatorname{sh}^2 2b\lambda - 4b^2\lambda^2} - \frac{3}{2b^2\lambda^2} \right) \cos \lambda (x - \xi) \, d\lambda = \\ = \delta(x - \xi) + \psi(x - \xi) \end{aligned}$$

следует назвать функцией влияния от единичной силы в точке (ξ, b) . Корректирующее вычисляемое по элементарной теории значение $\sigma_x(x, b)$ слагаемые формулы (2.8.8) определяют действие сил Q в точке $(0, b)$ и $-Q/2$ точках $(-l, b)$, (l, b) .

Знание функций влияния позволяет записать выражения корректирующих элементарную теорию слагаемых при действии распределенной нагрузки. Например, для нагружения

$$q(x) = \begin{cases} q_0, & |x| < a, \\ 0, & a < |x| < l, \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a q(\xi) \delta(x - \xi) \, d\xi = q(x), \quad \int_{-a}^a q(\xi) \cos \lambda (x - \xi) \, d\xi = \\ = 2q_0 \frac{\sin \lambda a}{\lambda} \cos \lambda x, \end{aligned}$$

и нормальное напряжение $\sigma_x(x, b)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, b) = & \frac{b}{l} \mu(x) + \frac{2q_0}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{8b^2\lambda^2}{\operatorname{sh}^2 2b\lambda - 4b^2\lambda^2} - \frac{3}{2b^2\lambda^2} \right) \frac{\sin \lambda a}{\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda - \\ & - q_0 a [\delta(x+l) + \delta(x-l) + \psi(x+l) + \psi(x-l)]. \end{aligned}$$

Здесь $\mu(x)$ — изгибающий момент в опертой по краям балке при рассматриваемом нагружении.

Графики по x нормальных σ_x , σ_y и касательных τ_{xy} напряжений, создаваемых сосредоточенной силой при $y = \pm b/2, 0, \pm b$, приведены в работе Зеевальда *). Естественно, что возмущения напряжений, вычисляемых по элементарной теории, простираются на расстояния, сравнимые с толщиной балки $2b$. Отличие даже напряжения $\sigma_x(x, b)$ от вычисляемого по элементарной теории практически исчезает уже при $x = 3b$ **).

Уравнение упругой линии составляется по формуле (2.4.12)

$$v(x, 0) = -\frac{Q}{2\pi b E} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \lambda l}{\lambda^2 \left(1 - \frac{\text{sh } 2b\lambda}{2b\lambda}\right)} \times \\ \times [(1 + \nu) b\lambda \text{ sh } b\lambda + 2 \text{ ch } b\lambda] \cos \lambda x d\lambda. \quad (2.8.9)$$

Введя в рассмотрение элементарное решение (2.6.3):

$$v(x, 0) = \frac{Ql^3}{6EI} \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{|x|^3}{l^3}\right) + \frac{Ql}{2E} \left(1 - \frac{|x|}{l}\right) \frac{3(8+5\nu)}{20b}, \quad (2.8.10)$$

и вычитая его представление интегралом Фурье из (2.8.9), найдем выражение поправки $v_*(x, 0)$ к элементарной теории в виде

$$v_*(x, 0) = -\frac{Q}{2\pi b E} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\text{sh } 2b\lambda}{2b\lambda}} [(1 + \nu) b\lambda \text{ sh } b\lambda + 2 \text{ ch } b\lambda] + \right. \\ \left. + \frac{3}{\lambda^2 b^2} + \frac{3}{10} (8 + 5\nu) \right\} \frac{1 - \cos \lambda l}{\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda + v_0^0. \quad (2.8.11)$$

Постоянную v_0^0 следует определить условием $v_*(l, 0) = 0$. Введенные в (2.8.11) слагаемые уничтожаются с двумя первыми членами разложения в ряд выражения

$$\frac{1}{1 - \frac{\text{sh } 2b\lambda}{2b\lambda}} [(1 + \nu) b\lambda \text{ sh } b\lambda + 2 \text{ ch } b\lambda].$$

Это гарантирует сходимость интеграла (2.8.11) при малых λ .

Из сопоставления формул (2.8.2) и (2.8.7) легко заключить, что слагаемыми в интеграле (2.8.11), имеющими множитель $\cos \lambda x \cos \lambda l$, учтено действие сил $-Q/2$ в точках $x = \pm l$;

*) F. Seewald, Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt, Abhandlungen aus dem aerodynamischen Institut Aachen, Heft 7, 1927.

**) Графики Зеевальда воспроизведены в «Теории упругости» С. П. Тимошенко.

отбрасывая этот множитель и заменив x на $x - \xi$, придем к выражению

$$v_*(x - \xi, 0) = -\frac{Q}{2\pi b E} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\operatorname{sh} 2b\lambda}{2b\lambda}} [(1 + \nu) b\lambda \operatorname{sh} b\lambda + 2 \operatorname{ch} b\lambda] + \right. \\ \left. + \frac{3}{\lambda^2 b^2} + \frac{3}{10} (8 + 5\nu) \right\} \frac{1}{\lambda^2} \cos \lambda (x - \xi) d\lambda, \quad (2.8.12)$$

определяющему поправку к вычисляемому по элементарной теории прогибу от сосредоточенной в точке (ξ, b) силы Q .

2.9. Брус с круговой осью, нагруженный по торцам (Головин, 1881). Рассматривается круговой брус (арка), ограниченный концентрическими окружностями радиусов r_0, r_1 ($r_0 < r_1$) и отрезками прямых $\theta = 0, \theta = \theta_0$ на левом и правом торце. Поверхностные силы на продольных сторонах отсутствуют:

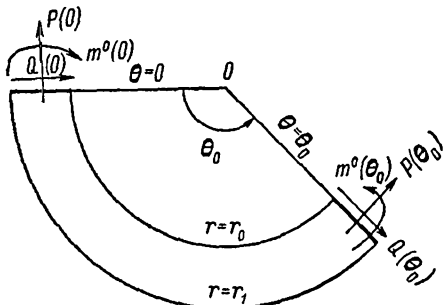


Рис. 39.

$$\begin{aligned} r = r_0: \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0; \\ r = r_1: \quad \sigma_r = 0, \\ \tau_{r\theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

а на правом торце они статически эквивалентны продольной $P(\theta_0)$ и поперечной $Q(\theta_0)$ силам и изгибающему

моменту $m^0(\theta_0)$ относительно центра окружностей O :

$$\theta = \theta_0: \quad \int_{r_0}^{r_1} \sigma_\theta dr = P(\theta_0), \quad \int_{r_0}^{r_1} \tau_{r\theta} dr = Q(\theta_0), \quad \int_{r_0}^{r_1} r \sigma_\theta dr = m^0(\theta_0). \quad (2.9.2)$$

Из уравнений равновесия бруса в целом следует, что система поверхностных сил, которые должны быть распределены по левому торцу, статически эквивалентна силам $P(0)$, и $Q(0)$ и моменту $m^0(0)$, определяемым формулами

$$\left. \begin{aligned} \theta = 0: \quad P(0) &= P(\theta_0) \cos \theta_0 + Q(\theta_0) \sin \theta_0, \\ Q(0) &= -P(\theta_0) \sin \theta_0 + Q(\theta_0) \cos \theta_0, \\ m^0(0) &= m^0(\theta_0) = m^0. \end{aligned} \right\} \quad (2.9.3)$$

Растягивающие и поперечные силы положительны, если они создаются положительными нормальными (σ_θ) и соответственно касательными ($\tau_{r\theta}$) напряжениями; положительный изгибающий

момент создается нормальными напряжениями σ_θ , положительными на верхней стороне бруса (рис. 39).

При действии только изгибающего момента интегральным условиям (2.9.2) можно удовлетворить, предположив напряженное состояние в брус не зависящим от θ . Но общее выражение не зависящей от θ бигармонической функции напряжений, представляемое суммой, не зависящей от θ гармонической функции и произведения r^2 на такую гармоническую функцию, имеет вид

$$U = A + B \ln r + r^2 (A_1 + B_1 \ln r), \quad (2.9.4)$$

причем, конечно, постоянную A можно отбросить. Сославшись на (1.10.2), можно записать краевые условия (2.9.1) в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_1} &= \frac{B}{r_1} + 2A_1 r_1 + B_1 r_1 (2 \ln r_1 + 1) = 0, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} &= \frac{B}{r_0} + 2A_1 r_0 + B_1 r_0 (2 \ln r_0 + 1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.9.5)$$

Условия (2.9.2) на торце будут

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} \sigma_\theta dr &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} dr = \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_1} - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} = 0, \\ \int_{r_0}^{r_1} r \sigma_\theta dr &= r_1 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_1} - r_0 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} - (U_1 - U_0) = m^0. \end{aligned}$$

О первом из них можно не заботиться, поскольку выполнены условия (2.9.5), а второе доставляет третье уравнение

$$B \ln \frac{r_1}{r_0} + A_1 (r_1^2 - r_0^2) + B_1 (r_1^2 \ln r_1 - r_0^2 \ln r_0) = m^0. \quad (2.9.6)$$

Из трех уравнений (2.9.5), (2.9.6) определяются постоянные B , A_1 , B_1 . Получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4m^0}{N} \left(\frac{r_0^2 r_1^2}{r^2} \ln \frac{r_1}{r_0} + r_1^2 \ln \frac{r}{r_1} - r_0^2 \ln \frac{r}{r_0} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{4m^0}{N} \left[- \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2} \ln \frac{r_1}{r_0} + r_1^2 \ln \frac{r}{r_1} - r_0^2 \ln \frac{r}{r_0} + (r_1^2 - r_0^2) \right], \\ \tau_{r\theta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.9.7)$$

где введено обозначение

$$N = (r_1^2 - r_0^2)^2 - 4r_1^2 r_0^2 \left(\ln \frac{r_1}{r_0} \right)^2. \quad (2.9.8)$$

Выражение функции напряжений записывается в виде

$$U = -\frac{2m^0}{N} \left[r_1^2 \left(r^2 \ln \frac{r_1}{r} - r_0^2 \ln \frac{r_1}{r_0} \ln r \right) - \right. \\ \left. - r_0^2 \left(r^2 \ln \frac{r_0}{r} - r_1^2 \ln \frac{r_0}{r_1} \ln r \right) + \frac{1}{2} r^2 (r_1^2 - r_0^2) \right]. \quad (2.9.9)$$

Функция напряжений в задаче о действии продольной силы разыскивается в форме произведения $P(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta) F(r)$, а поперечной силы — в форме $Q(\theta_0) \sin(\theta_0 - \theta) F(r)$. Эти произведения будут бигармоническими функциями, если принять

$$F(r) = \frac{A}{r} + Br^3 + Cr \ln r.$$

Напряжения представляются теперь формулами вида

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \left\{ \begin{aligned} &P(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta) \frac{d}{dr} \frac{F(r)}{r}, \\ &Q(\theta_0) \sin(\theta_0 - \theta) \frac{d}{dr} \frac{F(r)}{r}, \end{aligned} \right\} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} = \left\{ \begin{aligned} &-P(\theta_0) \sin(\theta_0 - \theta) \frac{d}{dr} \frac{F(r)}{r}, \\ &Q(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta) \frac{d}{dr} \frac{F(r)}{r}, \end{aligned} \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \left\{ \begin{aligned} &P(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta) \frac{d^2 F(r)}{dr^2}, \\ &Q(\theta_0) \sin(\theta_0 - \theta) \frac{d^2 F(r)}{dr^2}. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.9.10)$$

Поэтому краевым условиям (2.9.1) можно удовлетворить, потребовав выполнения только двух соотношений

$$\left(\frac{d}{dr} \frac{F(r)}{r} \right)_{r=r_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} \frac{F(r)}{r} \right)_{r=r_1} = 0. \quad (2.9.11)$$

Тогда

$$\int_{r_0}^{r_1} r \frac{d^2 F}{dr^2} dr = \left(r \frac{dF}{dr} - F \right) \Big|_{r_0}^{r_1} = \left[r^2 \frac{d}{dr} \frac{F(r)}{r} \right] \Big|_{r_0}^{r_1},$$

и при выполнении условий (2.9.11) изгибающий момент m^0 оказывается тождественно равным нулю.

Обратившись к оставшимся условиям (2.9.2), имеем

$$\theta = \theta_0: \quad P(\theta_0) = P(\theta_0) \int_{r_0}^{r_1} \frac{d^2 F}{dr^2} dr = P(\theta_0) \frac{dF}{dr} \Big|_{r_0}^{r_1},$$

$$\theta = \theta_0: \quad Q(\theta_0) = Q(\theta_0) \int_{r_0}^{r_1} \frac{d}{dr} \frac{F}{r} dr = Q(\theta_0) \frac{F}{r} \Big|_{r_0}^{r_1} = Q(\theta_0) \frac{dF}{dr} \Big|_{r_0}^{r_1},$$

причем последнее равенство — следствие краевых условий (2.9.11). Итак, недостающее третье уравнение приводимо в обеих задачах к одинаковому виду

$$\frac{1}{r} F(r) \Big|_{r_0}^{r_1} = 1. \quad (2.9.12)$$

Из трех уравнений (2.9.11), (2.9.12) определяются постоянные A , B , C , и функция U , одновременно решающая обе задачи (о продольной и поперечной силах), представляется в виде

$$U = \frac{1}{2N_1} [P(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta) + Q(\theta_0) \sin(\theta_0 - \theta)] \times \\ \times \left(2r \ln r + \frac{r_0^2 r_1^2}{r_0^2 + r_1^2} \frac{1}{r} - \frac{r^3}{r_0^2 + r_1^2} \right), \quad (2.9.13) \\ N_1 = \ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2 + r_0^2},$$

а напряжения оказываются равными *)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{N_1} [P(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta) + Q(\theta_0) \sin(\theta_0 - \theta)] \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^2 r_1^2}{r_0^2 + r_1^2} \frac{1}{r^3} - \frac{r}{r_0^2 + r_1^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{N_1} [P(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta) + Q(\theta_0) \sin(\theta_0 - \theta)] \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{r} + \frac{r_0^2 r_1^2}{r_0^2 + r_1^2} \frac{1}{r^3} - \frac{3r}{r_0^2 + r_1^2} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{N_1} [-P(\theta_0) \sin(\theta_0 - \theta) + Q(\theta_0) \cos(\theta_0 - \theta)] \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^2 r_1^2}{r_0^2 + r_1^2} \frac{1}{r^3} - \frac{r}{r_0^2 + r_1^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.9.14)$$

В полярных координатах вектор перемещения по (1.7.7) представляется выражением

$$u_r + iu_\theta = \frac{1}{E} \left[(S + iT) e^{-i\theta} - (1 + \nu) \left(\frac{\partial U}{\partial r} + i \frac{\partial U}{r \partial \theta} \right) \right] + \\ + (u_0 + iv_0) e^{-i\theta} + i\omega_0 r, \quad (2.9.15)$$

где $S + iT$ определяется, как указано в п. 1.7.

*) Сравнение напряженных состояний в задачах Головина с принимаемыми в элементарной теории кривого бруса подробно проведено в курсе С. П. Тимошенко.

Очевидное вычисление по этим формулам дает: в первой задаче

$$\left. \begin{aligned} Eu_r &= -\frac{4m^0}{N} r \left[(1-\nu) \left(r_1^2 \ln \frac{r_1}{r} - r_0^2 \ln \frac{r_0}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + r_1^2 - r_0^2 + (1+\nu) \frac{r_0^2}{r^2} \ln \frac{r_1}{r_0} \right], \\ Eu_\theta &= \frac{8m^0}{N} r \theta (r_1^2 - r_0^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.9.16)$$

и во второй задаче

$$\begin{aligned} E(u_r + iu_\theta) &= \frac{2}{N_1} \left[(P - iQ) e^{i(\theta_0 - \theta)} (\ln r + i\theta) - (P + iQ) e^{-i(\theta_0 - \theta)} \frac{r^2}{r_0^2 + r_1^2} \right] - \\ &\quad - \frac{1+\nu}{2N_1} \left[(P - iQ) e^{i(\theta_0 - \theta)} \left(2 \ln r + 1 - \frac{2r^2}{r_0^2 + r_1^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (P + iQ) e^{-i(\theta_0 - \theta)} \left(1 - \frac{r_0^2}{r_0^2 + r_1^2} \frac{1}{r^2} - \frac{r^2}{r_0^2 + r_1^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.9.17)$$

причем $P = P(\theta_0)$, $Q = Q(\theta_0)$ и не выписаны слагаемые, соответствующие перемещению фигуры в ее плоскости как твердого тела.

Конечно, приведенные решения являются строгими в рамках принципа Сен-Венана. Напряженное состояние отличается от найденного локальными возмущениями в области, примыкающей к торцам.

2.10. Нагружение кругового бруса по поверхности. Предложенный в пп. 2.3—2.8 прием рассмотрения задачи о балке с прямолинейной осью можно применить и к случаю кругового бруса. Действительно, записав уравнение Лапласа в полярных координатах в форме «обыкновенного» уравнения типа Эйлера:

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \partial_\theta^2 \frac{1}{r^2} F = 0, \quad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta},$$

можно представить его решение в виде

$$F = \cos(\ln r \partial_\theta) \hat{f}_1(\theta) + \frac{\sin(\ln r \partial_\theta)}{\partial_\theta} \hat{f}_2(\theta),$$

трактую, подобно (2.3.4), эту запись как представление ряда

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(2k)!} (\ln r)^{2k} \partial_\theta^{2k} \hat{f}_1(\theta) + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\ln r)^{2k+1} \partial_\theta^{2k} \hat{f}_2(\theta) \right].$$

Бигармоническая функция представляется суммой гармонической и произведения гармонической функции на r^2 . Поэтому,

введя вместо r новую независимую переменную t :

$$e^t = \frac{r}{r_0} \quad \left(0 \leq t \leq t_1 = \ln \frac{r_1}{r_0}\right), \quad (2.10.1)$$

будем далее пользоваться представлением функции напряжений в виде

$$U = \cos t \partial_\theta f_1(\theta) + \frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} f_2(\theta) + e^{2t} \left[\cos t \partial_\theta f_3(\theta) + \frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} f_4(\theta) \right]. \quad (2.10.2)$$

Далее для сокращения записей рассматривается только нормальное нагружение бруса по поверхности $r = r_1$, так что

$$t = 0: \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0; \quad t = t_1: \quad \sigma_r = f(\theta), \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.10.3)$$

Этим определяются функции $f_i(\theta)$ в представлении (2.10.2). Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{e^{-2t}}{r_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \partial_\theta^2 \right) U, \quad \sigma_\theta = \\ &= \frac{e^{-2t}}{r_0^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) U, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{e^{-2t}}{r_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - 1 \right) \partial_\theta U. \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

Краевые условия на поверхности $t = 0$ выполняются, если принять

$$U = (1 - e^{2t}) \left(\cos t \partial_\theta f_1 + \frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} f_2 \right) + 2e^{2t} \frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} f_1(\theta). \quad (2.10.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} r_0^2 \sigma_r &= \left[(3 - e^{-2t}) \partial_\theta \sin t \partial_\theta + 4 \frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} - (1 - e^{-2t}) \partial_\theta^2 \cos t \partial_\theta \right] f_1(\theta) + \\ &\quad + \left[(e^{-2t} - 1) (\cos t \partial_\theta + \partial_\theta \sin t \partial_\theta) - 2 \frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} \right] f_2(\theta), \\ r_0^2 \tau_{r\theta} &= \left[(e^{-2t} - 1) (\partial_\theta \sin t \partial_\theta + \cos t \partial_\theta) - 2 \frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} \right] \partial_\theta f_1(\theta) + \\ &\quad + \left[(e^{-2t} + 1) \frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} - (e^{-2t} - 1) \cos t \partial_\theta \right] \partial_\theta f_2(\theta), \\ r_0^2 \sigma_\theta &= \left[(e^{-2t} + 1) \partial_\theta \sin t \partial_\theta + 4 \left(\frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} + \cos t \partial_\theta \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-2t}) \partial_\theta^2 \cos t \partial_\theta \right] f_1(\theta) - \\ &\quad - \left[(e^{-2t} - 1) (\cos t \partial_\theta + \partial_\theta \sin t \partial_\theta) + 2 \left(\frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} + 2 \cos t \partial_\theta \right) \right] f_2(\theta), \\ r_0^2 \nabla^2 U &= 4 \left(\partial_\theta \sin t \partial_\theta + 2 \frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} + \cos t \partial_\theta \right) f_1(\theta) - \\ &\quad - 4 \left(\frac{\sin t \partial_\theta}{\partial_\theta} + \cos t \partial_\theta \right) f_2(\theta). \end{aligned} \quad (2.10.6)$$

Потребовав выполнения краевых условий на поверхности $t = t_1$ ($r = r_1$), найдем $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, после чего подстановка в выражение функции напряжений приводит к равенству

$$U = [(1 - e^{2t})(1 - e^{-2t_1}) \partial_\theta^2 \cos(t_1 - t) \partial_\theta + \\ + 2(1 + e^{-2(t_1 - t)}) \sin t \partial_\theta \sin t_1 \partial_\theta - (e^{2t} - e^{-2t_1}) \partial_\theta \sin(t_1 - t) \partial_\theta + \\ + (1 - e^{-2(t_1 - t)}) \partial_\theta \sin(t_1 + t) \partial_\theta] \frac{r_0^2 f(\theta)}{(1 + \partial_\theta^2) \Delta}, \\ \Delta = 4e^{-2t_1} \sin^2 t_1 \partial_\theta - (e^{-2t_1} - 1)^2 \partial_\theta^2$$

или, в другом представлении,

$$U = \frac{e^{t+t_1}}{\sin^2 t_1 \partial_\theta - \partial_\theta^2 \operatorname{sh}^2 t_1} \left[\operatorname{ch}(t_1 - t) \sin t \partial_\theta \sin t_1 \partial_\theta - \right. \\ \left. - \partial_\theta^2 \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t_1 \cos(t_1 - t) \partial_\theta - \frac{1}{2} \partial_\theta \operatorname{sh}(t_1 + t) \sin(t_1 - t) \partial_\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \partial_\theta \operatorname{sh}(t_1 - t) \sin(t_1 + t) \partial_\theta \right] r_0^2 F(\theta). \quad (2.10.7)$$

Здесь $F(\theta)$ определяется соотношением

$$\frac{f(\theta)}{1 + \partial_\theta^2} = F(\theta), \quad F(\theta) = \\ = \int_0^\theta f(\xi) \sin(\theta - \xi) d\xi + C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta, \quad (2.10.8)$$

и легко проверяется выполнение равенств

$$t = 0: \quad U = \frac{\partial U}{\partial t} = 0; \quad t = t_1: \quad U = \frac{\partial U}{\partial t} = r_0 e^{2t_1} \frac{f(\theta)}{1 + \partial_\theta^2},$$

подтверждающих, в соответствии с (2.10.4), выполнение всех краевых условий.

При отсутствии нагружения боковых поверхностей $f(\theta) = 0$; тогда по (2.10.8)

$$\partial_\theta^{2n} F(\theta) = i^{2n} (C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta)$$

и по (2.10.7) решение представится в виде

$$U = U|_{\theta \rightarrow t} = \frac{e^{t+t_1}}{t_1 \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t_1} [t \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t \operatorname{ch}(t_1 - t)] (C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta) \quad (2.10.9)$$

— это лишь иная форма записи формулы (2.9.13), определяющей функцию напряжений в случае бруса, нагруженного по торцам.

При линейно зависящем от θ нагружении

$$f(\theta) = f_0 + f_1\theta, \quad F(\theta) = f_0 + f_1\theta,$$

так как слагаемые $F(\theta)$, пропорциональные $\cos \theta$, $\sin \theta$, определяют лишь далее не учитываемое решение вида (2.10.9). Решение задачи получим, сохранив в разложении U в степенной ряд по ∂_θ^2 только свободный член

$$U = r_0^2 \frac{e^{t+t_1}}{t_1^2 - \operatorname{sh}^2 t_1} \left[t t_1 \operatorname{ch}(t_1 - t) - \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t_1 - \frac{1}{2} (t_1 - t) \operatorname{sh}(t_1 + t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (t_1 + t) \operatorname{sh}(t_1 - t) \right] (f_0 + f_1\theta). \quad (2.10.10)$$

Никакого затруднения не представляет запись решения и при нагружении по закону

$$f(\theta) = f_n \cos n\theta + g_n \sin n\theta, \quad F(\theta) = \frac{f_n \cos n\theta + g_n \sin n\theta}{1 - n^2} \quad (n \neq \pm 1).$$

Достаточно заменить в выражении U , как было разъяснено в п. 2.7, оператор ∂_θ на $\pm ni$; тогда

$$U = U|_{\partial_\theta = \pm ni} = r_0^2 \frac{e^{t+t_1}}{n^2 \operatorname{sh}^2 t_1 - \operatorname{sh}^2 nt_1} \left[\operatorname{ch}(t_1 - t) \operatorname{sh} nt \operatorname{sh} nt_1 - \right. \\ \left. - n^2 \operatorname{ch} n(t_1 - t) \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t_1 - \frac{1}{2} n \operatorname{sh}(t_1 + t) \operatorname{sh} n(t_1 - t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} n \operatorname{sh}(t_1 - t) \operatorname{sh} n(t_1 + t) \right] \frac{f_n \cos n\theta + g_n \sin n\theta}{n^2 - 1}. \quad (2.10.11)$$

2.11. Косинусоидальное нагружение. Исключенный выше «резонансный» случай $n = 1$ требует специального рассмотрения. Имеем

$$f(\theta) = f_0 \cos \theta, \quad F(\theta) = \frac{1}{2} f_0 \theta \sin \theta.$$

Теперь

$$\partial_\theta^2 F = -\frac{1}{2} (\theta \sin \theta - 2 \cos \theta) f_0, \quad \partial_\theta^4 F = \frac{1}{2} (\theta \sin \theta - 4 \cos \theta) f_0,$$

и вообще

$$\partial_\theta^{2k} F = (-1)^k \frac{1}{2} (\theta \sin \theta - 2k \cos \theta) f_0.$$

Поэтому, обозначая через $\Phi(t, \partial_\theta^2)$ множитель-оператор при $F(\theta)$ в формуле (2.10.7) и представив его в виде

$$\Phi(t, \partial_\theta^2) = \Phi_0(t) + \Phi_1(t) \partial_\theta^2 + \Phi_2(t) \partial_\theta^4 + \dots, \quad (2.11.1)$$

имеем

$$U = \Phi(t, \partial_\theta^2) F(\theta) = \frac{1}{2} f_0 [\Phi_0(t) - \Phi_1(t) + \Phi_2(t) - \dots] \theta \sin \theta + \\ + \frac{1}{2} f_0 [2\Phi_1(t) - 4\Phi_2(t) + 6\Phi_3(t) - \dots] \cos \theta,$$

и это соотношение, сославшись на (2.11.1), можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} f_0 \left[\Phi(t, \partial_\theta^2) \theta \sin \theta + \frac{1}{\partial_\theta} \frac{\partial \Phi(t, \partial_\theta^2)}{\partial \partial_\theta} \cos \theta \right]_{\partial_\theta \rightarrow t}. \quad (2.11.2)$$

Результат вычисления по этой формуле представляется суммой трех слагаемых:

$$\begin{aligned} U_1 &= r_0^2 f_0 \frac{e^{t+t_1}}{2(t_1 \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t_1)} [t \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t \operatorname{ch}(t_1 - t)] \theta \sin \theta, \\ U_2 &= -r_0^2 f_0 \frac{e^{t+t_1}}{4 \operatorname{sh} t_1 (t_1 \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t_1)} \left[t t_1 \operatorname{ch} 2t_1 - \frac{1}{2} t_1 \operatorname{sh} 2t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} t \operatorname{sh} 2t_1 - \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t_1 \operatorname{ch}(t_1 - t) - 2(t_1 - t) \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh}(t_1 - t) \right] \cos \theta, \\ U_3 &= r_0^2 f_0 \frac{t_1^2 \operatorname{ch} 2t_1 - \operatorname{sh}^2 t_1}{2 \operatorname{sh} t_1 (t_1 \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t_1)^2} e^{t+t_1} [t \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t \operatorname{ch}(t_1 - t)] \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

$$(2.11.4)$$

причем U_3 определяет лишь нагружение по торцам бруса; его далее можно не учитывать [ср. (2.10.9)].

Слагаемое U_1 удовлетворяет всем краевым условиям, что легко проверить по (2.10.4):

$$\begin{aligned} \sigma_r^1 &= f_0 \frac{e^{t_1-t}}{t_1 \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t_1} \left\{ [t \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t \operatorname{ch}(t_1 - t)] \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\operatorname{ch} t_1 - \operatorname{ch}(2t - t_1)] \theta \sin \theta \right\}, \\ \tau_{r\theta}^1 &= -f_0 \frac{e^{t_1-t}}{t_1 \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t_1} [\operatorname{ch} t_1 - \operatorname{ch}(2t - t_1)] \frac{1}{2} (\sin \theta + \theta \cos \theta). \end{aligned}$$

Однако оно не представляет решения задачи, так как U_1 не является бигармонической функцией. Функция U_2 также не бигармоническая, а вычисляемые по ней напряжения $\sigma_r^{(2)}$, $\tau_{r\theta}^{(2)}$ равны

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_r^{(2)} \\ \tau_{r\theta}^{(2)} \end{aligned} \right\} &= -f_0 \frac{e^{t_1-t}}{2 \operatorname{sh} t_1 (t_1 \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t_1)} [t_1 \operatorname{sh}(t_1 + t) \operatorname{sh}(t_1 - t) - \\ &\quad - (t_1 - t) \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh}(t_1 - 2t) + 2 \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(t_1 - t)] \begin{cases} \cos \theta, \\ \sin \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение представляется суммой

$$U = U_1 + U_2, \quad (2.11.5)$$

и нетрудно непосредственным вычислением проверить, что U — бигармоническая функция.

2.12. Однородные решения. Уточнение базирующихся на применении принципа Сен-Венана решений задач о прямоугольной полосе и круговом бруске может быть достигнуто наложением на них «однородных решений» — решений, оставляющих продольные края полосы $y = \pm b$ (боковые поверхности $r = r_0$, $r = r_1$ бруса) свободными от нагружения. В задаче о круговом цилиндре (п. 7.8 гл. V) они были использованы с целью уточнить выполнение краевых условий на торцах. Здесь подобное построение проводится в применении к прямоугольной полосе, его можно повторить и в случае кругового бруса.

Задаваясь функциями напряжений вида (2.4.3):

$$\left. \begin{aligned} \text{А } U(x, y) &= \cos y \partial f_0'(x) + \frac{1}{2} y \frac{\sin y \partial}{\partial} [f_0''(x) + \partial^2 f_0(x)], \\ \text{Б } U(x, y) &= \frac{\sin y \partial}{\partial} f_0'(x) + \\ &+ \frac{1}{2 \partial^2} \left(\frac{\sin y \partial}{\partial} - y \cos y \partial \right) [f_0'''(x) + \partial^2 f_0'(x)] \end{aligned} \right\} \quad (2.12.1)$$

и требуя обращения в нуль напряжений σ_y , τ_{xy} на краях полосы $y = \pm b$, приходим к системам уравнений

$$\left. \begin{aligned} \text{А } \quad & \frac{1}{2} b \partial \sin b \partial (f_0'' + \partial^2 f_0) + \cos b \partial \partial^2 f_0 = 0, \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin b \partial}{b \partial} + \cos b \partial \right) (f_0'' + \partial^2 f_0) + \frac{\sin b \partial}{b \partial} \partial^2 f_0 = 0, \\ \text{Б } \quad & \frac{1}{2} \left(\frac{\sin b \partial}{\partial} - b \cos b \partial \right) (f_0''' + \partial^2 f_0') + \partial \sin b \partial f_0' = 0, \\ & \frac{1}{2} b \sin b \partial (f_0''' + \partial^2 f_0') + \partial \cos b \partial f_0' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12.2)$$

Далее рассматривается экспоненциальное задание функций f_0 , f_0' , f_0'' , f_0''' , так что дифференцирование их по x эквивалентно умножению на постоянный множитель

$$\frac{d}{dx} e^{kx} = \partial e^{kx} = k e^{kx}, \quad \frac{d^n}{dx^n} e^{kx} = \partial^n e^{kx} = k^n e^{kx}.$$

Теперь в системах уравнений (2.12.2) надо заменить ∂ на k и принять функции

$$f_0, f_0'' + k^2 f_0; \quad f_0', f_0''' + k^2 f_0' \quad (2.12.3)$$

пропорциональными e^{kx} . Нетривиальные решения этих систем существуют при значениях параметра $bk = \gamma$, обращающих в нуль их определители. Это приводит к рассмотрению трансцендентных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \text{А } \quad & \Delta_A(2\gamma) = 2\gamma + \sin 2\gamma = 0; \\ \text{Б } \quad & \Delta_B(2\gamma) = 2\gamma - \sin 2\gamma = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12.4)$$

и позволяет представить выражения (2.12.3) в виде

$$\begin{aligned} f_0 &= -b^2 \frac{\sin \gamma}{\gamma} e^{\gamma \frac{x}{b}}, & f_0'' + k^2 f_0 &= 2 \cos \gamma e^{\gamma \frac{x}{b}}, \\ f_0' &= -b \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} - \cos \gamma \right) e^{\gamma \frac{x}{b}}, & f_0''' + k^2 f_0' &= 2 \frac{\gamma}{b} \sin \gamma e^{\gamma \frac{x}{b}}. \end{aligned}$$

Приходим к следующим выражениям функций напряжений, оставляющих продольные края полосы $y = \pm b$ свободными от нагружения:

$$\left. \begin{aligned} \text{А } U(x, y) &= \left(-\frac{\sin \gamma}{\gamma} \cos \gamma \eta + \eta \cos \gamma \frac{\sin \gamma \eta}{\gamma} \right) b^2 e^{\gamma \xi}, \\ \text{Б } U(x, y) &= \left(\cos \gamma \frac{\sin \gamma \eta}{\gamma} - \eta \frac{\sin \gamma}{\gamma} \cos \gamma \eta \right) b^2 e^{\gamma \xi}, \end{aligned} \right\} \quad (2.12.5)$$

причем $b\eta = y$, $b\xi = x$. Конечно, теперь легко записать формулы для напряжений. При этом системы напряжений в любом поперечном сечении стержня $\xi = \text{const}$ будут статически эквивалентны нулю. Достаточно проверить, что в задаче А обращаются в нуль продольная сила

$$\int_{-b}^b \sigma_x dy = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} d\eta = \frac{1}{b} \frac{\partial U}{\partial \eta} \bigg|_{-1}^1 = \frac{b}{\gamma} e^{\gamma \xi} \Delta_A(2\gamma) = 0,$$

а в задаче Б — поперечная сила и изгибающий момент

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \tau_{xy} dy &= -\frac{1}{b} \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} d\eta = -\frac{1}{b} \frac{\partial U}{\partial \xi} \bigg|_{-1}^1 = 0, \\ \int_{-b}^b y \sigma_x dy &= \int_{-1}^1 \eta \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} d\eta = \left(\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \right) \bigg|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Все корни уравнений (2.12.4), исключая тривиальные (нулевые), оказываются комплексными; они располагаются в четырех квадрантах комплексной плоскости γ симметрично относительно начала координат: если γ — корень, то корнями являются также числа $-\gamma$, $\pm i\gamma$. Функции напряжений, определяемые формулами (2.12.5), — комплексные; но по ним, конечно, легко составить вещественные функции напряжений. Этим путем приходим к представлению однородных решений — напряженных состояний, оставляющих продольные стороны полосы свободными от нагружения и статически эквивалентных нулю в любом ее поперечном сечении.

В приведенной табл. 13 указаны удвоенные значения первых пяти корней уравнений (2.12.4), расположенных в первом квад-

Т а б л и ц а 13

Корни уравнения $\Delta_A(x) = x + \sin x = 0$	Корни уравнения $\Delta_B(x) = x - \sin x = 0$
$\alpha_1 = 4,21239$ $\beta_1 = 2,25072$	$\alpha_1 = 7,45761$ $\beta_1 = 2,76867$
$\alpha_2 = 10,74253$ $\beta_2 = 3,10314$	$\alpha_2 = 13,89995$ $\beta_2 = 3,35220$
$\alpha_3 = 17,07336$ $\beta_3 = 3,55108$	$\alpha_3 = 20,23871$ $\beta_3 = 3,71676$
$\alpha_4 = 23,39835$ $\beta_4 = 3,85880$	$\alpha_4 = 26,55454$ $\beta_4 = 3,98314$
$\alpha_5 = 29,70811$ $\beta_5 = 4,09337$	$\alpha_5 = 32,85974$ $\beta_5 = 4,19325$
$x_k = \alpha_k + i\beta_k = 2\gamma_k$	

ранте плоскости γ . Вещественные части этих корней быстро возрастают вместе с номером корня; поэтому напряжения, пропорциональные, что нетрудно сообразить, $e^{1/2\alpha_k^2}$, будут весьма быстро убывать по мере удаления от краев полосы — надо брать корни второго квадранта при построении решений, относящихся к краю $x = 0$, и первого — к краю $x = l$. Этим подтверждается приемлемость принципа Сен-Венана для узкой и длинной полосы.

Было предложено несколько приемов использования однородных решений для выполнения краевых условий на поперечных сторонах полосы. Ни один из них не дает строгого решения этой задачи — точного выполнения краевых условий общего вида по два на каждом из краев (левом и правом). Наиболее простой прием выполнения краевых условий «в среднем» описан в п. 7.9 гл. V. Выполнение краевых условий в ряде наперед выбираемых точек поперечной стороны затруднительно вследствие знакопеременности однородных решений, тем более частой, чем выше номер соответствующего взятому решению корня.

§ 3. Упругая плоскость и полуплоскость

3.1. Сосредоточенная сила и сосредоточенный момент в упругой плоскости. Сосредоточенная сила, проекции которой на оси координат обозначаются X , Y , предполагается приложенной в начале координат. Разыскивается создаваемое ею напряженное

состояние в неограниченной плоскости, так что здесь речь идет о построении в плоской задаче аналога тензора Кельвина — Сомильяна (п. 3.5 гл. IV). Быстрее всего ведет к цели использование комплексного переменного — формул (1.14.7), (1.14.5).

Очевидно, что главный вектор напряжений на любом замкнутом контуре C , содержащем точку $z = 0$, должен уравновешивать приложенную силу. Это соображение приводит к первому условию задачи

$$\Delta_C (P + iQ) + X + iY = 0, \quad (3.1.1)$$

где символом $\Delta_C f$ здесь и далее обозначается изменение функции f при обходе замкнутого контура, оставляющем обходимую область слева. Очевидно, что $\Delta_C f = 0$, когда функция f однозначна; в рассматриваемой задаче требование однозначности налагается на вектор перемещения

$$\Delta_C (u + iv) = 0. \quad (3.1.2)$$

Этих условий, как увидим ниже, достаточно. При их выполнении гарантируется однозначность напряжений и обращение в нуль главного момента m^0 распределенных по C напряжений.

По (1.14.7) имеем

$$\Delta_C (P + iQ) = -i \Delta_C [\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})]. \quad (3.1.3)$$

Нетрудно сообразить, что эта величина будет иметь постоянное и не зависящее от выбора контура C , содержащего внутри себя начало координат, значение для функций φ и ψ вида

$$\varphi(z) = (\alpha + i\beta) \ln z, \quad \psi(z) = (\alpha' + i\beta') \ln z, \quad (3.1.4)$$

где $(\alpha + i\beta)$, $(\alpha' + i\beta')$ — постоянные.

Действительно, тогда

$$\Delta_C \varphi(z) = 2\pi i (\alpha + i\beta), \quad \Delta_C z \bar{\varphi}'(\bar{z}) = 0, \quad \Delta_C \bar{\psi}(\bar{z}) = -2\pi i (\alpha' - i\beta') \quad (3.1.5)$$

и по (3.1.1), (3.1.2), (1.14.5) приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} -i [2\pi i (\alpha + i\beta) - 2\pi i (\alpha' - i\beta')] + X + iY &= 0, \\ 2\pi i (3 - 4\nu) (\alpha + i\beta) + 2\pi i (\alpha' - i\beta') &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.6)$$

Из нее находим

$$\alpha + i\beta = -\frac{X + iY}{8\pi(1-\nu)}, \quad \alpha' - i\beta' = (3 - 4\nu) \frac{X + iY}{8\pi(1-\nu)}, \quad (3.1.7)$$

так что

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{8\pi(1-\nu)} \ln z, \quad \psi(z) = (3 - 4\nu) \frac{X - iY}{8\pi(1-\nu)} \ln z. \quad (3.1.8)$$

Напряжения, выражаемые по формулам (1.14.9) через функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, конечно, однозначны; они определяются формулами

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= -\frac{X \cos \theta + Y \sin \theta}{2\pi(1-\nu)r}, \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \\ &= \frac{1}{\pi r} (X \cos \theta + Y \sin \theta) + i \frac{1-2\nu}{2\pi(1-\nu)r} (X \sin \theta - Y \cos \theta). \quad (3.1.9)\end{aligned}$$

С точностью до не имеющего значения линейного по z слагаемого имеем также

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{16\pi(1-\nu)} [- (X + iY) \bar{z} \ln z - (X - iY) z \ln \bar{z} + \\ &+ (3 - 4\nu)(X - iY) z \ln z + (3 - 4\nu)(X + iY) \bar{z} \ln \bar{z}], \quad (3.1.10)\end{aligned}$$

и легко проверяется однозначность также и выражения (1.13.6):

$$\Delta_C \left[U - \left(z \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) \right] = \Delta_C m^0 = 0. \quad (3.1.11)$$

Вектор перемещения определяется равенством

$$2\mu(u + iv) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[-(3 - 4\nu)(X + iY) \ln r + \frac{1}{2}(X - iY) e^{2i\theta} \right]. \quad (3.1.12)$$

Аналогично рассматривается действие сосредоточенного момента. Сохраняется условие (3.1.2), а уравнение статики (3.1.1) заменяется уравнением

$$\begin{aligned}M^0 + m^0 &= M^0 + \\ &+ \Delta_C \frac{1}{2} [\chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) - z\chi'(z) - \bar{z}\bar{\chi}'(\bar{z}) - z\bar{z}\varphi'(z) - z\bar{z}\bar{\varphi}'(\bar{z})] = 0. \quad (3.1.13)\end{aligned}$$

Здесь M^0 — сосредоточенный в начале координат $z = 0$ упругой плоскости момент, а m^0 — определяемый по (1.14.7) главный момент напряжений по любому замкнутому контуру C , содержащему точку $z = 0$.

Условию (3.1.13) можно удовлетворить, приняв

$$\chi(z) = (\alpha'' + i\beta'') \ln z, \quad \psi(z) = \chi'(z) = \frac{\alpha'' + i\beta''}{z}, \quad \varphi(z) = 0.$$

При этом выполняется и условие (3.1.2), поскольку $u + iv$ оказывается однозначной функцией координат. Получаем

$$M^0 + \frac{1}{2} 2\pi i (\alpha'' + i\beta'' - \alpha'' + i\beta'') = 0,$$

так что α'' остается неопределенным, а $\beta'' = \frac{1}{2\pi} M^0$. Получаем

$$\chi = \frac{iM^0}{2\pi} \ln z, \quad \psi(z) = \frac{iM^0}{2\pi z}, \quad \Psi(z) = -\frac{iM^0}{2\pi z^2}. \quad (3.1.14)$$

3.2. Задача Фламана (1892). Рассматривается действие сосредоточенной силы, нормальной к границе $y = 0$ упругой полуплоскости $y > 0$. Эта задача является аналогом частной задачи Буссинека (п. 2.2. гл. V) для полупространства.

Ось Oy направлена внутрь полуплоскости, а точка приложения сонаправленной с осью Oy силы K_2 принимается за начало координат системы Oxy . За начало обхода границы $y = 0$ принимается бесконечно удаленная точка $x = -\infty$ на ней, так что обходимая область $y > 0$ остается слева. Тогда краевые условия в соответствии с формулами (1.8.4), (1.8.6) могут быть записаны в виде

$$y = 0: \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad U = m^M = \begin{cases} 0, & x < 0. \\ -xK_2, & x > 0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Бигармоническую функцию напряжений естественно разыскивать в виде

$$U = f_1(x, y) + yf_2(x, y), \quad (3.2.2)$$

где f_1, f_2 — функции, гармонические в полуплоскости $y > 0$ [см. также (1.11.1)]. По первому условию (3.2.1) имеем теперь

$$y = 0: \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -f_2. \quad (3.2.3)$$

Но следствием равенства граничных значений двух гармонических в области функций является их равенство во всей области; отсюда следует, что

$$y \geq 0: \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -f_2, \quad U(x, y) = f_1(x, y) - y \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y}. \quad (3.2.4)$$

Здесь получено общее представление функции напряжений в полуплоскости $y > 0$ при отсутствии нагружения, касательного к границе ($y = 0: \tau_{xy} = 0$).

Переходя к построению функции напряжений вида (3.2.4), рассмотрим гармоническую функцию

$$1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 1 - \frac{\theta}{\pi} = \operatorname{Re} \left(1 - \frac{1}{\pi i} \ln z \right) = \operatorname{Re} \Phi_0(z).$$

На границе $y = 0$ области $y > 0$ она принимает значения

$$y = 0: \quad 1 - \frac{\theta}{\pi} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

и теперь нетрудно проверить, что гармоническая функция

$$-K_2 \operatorname{Re} z \Phi_0(z) = -K_2 \left[x \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right) - y \frac{\ln r}{\pi} \right] = f_1(x, y) \quad (3.2.5)$$

удовлетворяет краевому условию

$$f_1(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -K_2 x, & x > 0, \end{cases}$$

что и требуется согласно (3.2.1). По (3.2.4) находим

$$U = f_1(x, y) - y \frac{\partial f_1}{\partial y} = -K_2 x \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) - \frac{K_2}{\pi} y.$$

Не имеющие значения слагаемые, линейные относительно координат x, y , можно отбросить и представить решение в виде

$$U = \frac{1}{\pi} K_2 x \theta = \frac{1}{\pi} K_2 r \theta \cos \theta. \quad (3.2.6)$$

Напряжения легко вычисляются по формулам (1.10.2). Отличным от нуля оказывается только

$$\sigma_r = -\frac{2K_2}{\pi} \frac{\sin \theta}{r} = -\frac{2K_2}{\pi} \frac{\cos \psi}{r} \quad \left(\psi = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.2.7)$$

где ψ — угол, отсчитываемый от оси Oy (от направления силы) к оси Ox . Итак, на площадках, перпендикулярных вектору r , имеются лишь сжимающие нормальные напряжения, тогда как напряжения на площадках вдоль r , в частности на границе, отсутствуют. Напряжение в точке приложения силы бесконечно; это объясняется тем, что сосредоточенная сила мыслится как предельный случай силы, распределенной по малой площадке.

Линиями одинаковых нормальных напряжений являются кривые

$$\sigma_r = -\frac{2K_2}{\pi r} \cos \psi = \sigma_r^0 = \text{const},$$

$$r = d \cos \psi \quad \left(d = -\frac{2K_2}{\pi \sigma_r^0}\right). \quad (3.2.8)$$

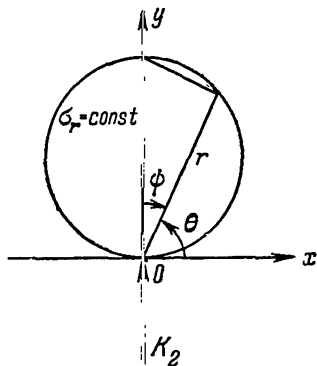


Рис. 40.

Это окружности диаметра d , касающиеся границы в точке приложения силы (рис. 40). Известно (п. 2.2 гл. I), что максимальное касательное напряжение равно полуразности главных нормальных напряжений, так что в плоском напряженном состоянии ($\sigma_z = 0$)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_r.$$

Поэтому линии $\sigma_r = \text{const}$ одновременно являются и линиями $\tau_{\max} = \text{const}$. Оптический метод изучения напряжений позволяет

непосредственно наблюдать и фотографировать линии $\tau_{\max} = \text{const}$ в плоских прозрачных напряженных моделях. Эти линии вблизи точек приложения сосредоточенных сил, нормальных к границе, действительно представляют круги.

Компоненты тензора напряжений в декартовых координатах даются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2K_2}{\pi} \frac{yx^2}{r^4}, & \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2K_2}{\pi} \frac{y^3}{r^4}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2K_2}{\pi} \frac{xy^2}{r^4}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

Вектор перемещения, вычисляемый по функции напряжений (3.2.6), для плоского напряженного состояния по формулам (1.7.7), (1.7.2), представляется его проекциями

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_2}{\pi E} \left[(1-\nu) \theta + \frac{1}{2} (1+\nu) \sin 2\theta \right] + u_0 - \omega_0 y, \\ v &= -\frac{K_2}{\pi E} [2 \ln r + (1+\nu) \cos^2 \theta] + v_0 + \omega_0 x. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

В задаче о плоской деформации эти формулы записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_2}{2\mu\pi} \left[(1-2\nu) \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right] + u_0 - \omega_0 y, \\ v &= -\frac{K_2}{2\mu\pi} [2(1-\nu) \ln r + \cos^2 \theta] + v_0 + \omega_0 x. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.11)$$

В частности, на оси x имеем $r = |x|$ и, отбрасывая постоянное слагаемое, а также перемещение поворота, имеем

$$v(x, 0) = K_2 \beta \ln \frac{1}{|x|}, \quad (3.2.12)$$

причем

$$\beta = \frac{2}{\pi E}$$

в задаче о плоском напряженном состоянии и

$$\beta = \frac{1-\nu}{\pi\mu}$$

в случае плоской деформации.

3.3. Общий случай нормального нагружения. Решение п. 3.2 легко обобщается на случай нормального нагружения границы упругой полуплоскости по любому закону

$$y=0: \quad \sigma_y = -q(x), \quad \tau_{xy} = 0. \quad (3.3.1)$$

Действительно, напряженное состояние, создаваемое единичной силой, сосредоточенной не в начале координат, а в точке $x \Rightarrow \xi$, определяется по (3.2.6) функцией напряжений

$$U = \frac{x-\xi}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-\xi}.$$

Поэтому, суммируя действия элементарных нагрузений $q(\xi)d\xi$ по участку $[x_0, x_1]$ границы, придем к выражению функции напряжений в виде

$$U = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} (x - \xi) \operatorname{arctg} \frac{y}{x - \xi} q(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} (x - \xi) \theta_\xi q(\xi) d\xi. \quad (3.3.2)$$

Пусть, в частности, $q(\xi) = q_0 = \text{const}$; поместив начало координат в середине участка нагружения, имеем

$$U = \frac{q_0}{\pi} \int_{-a}^a (x - \xi) \theta_\xi d\xi.$$

Через r назовем вектор-радиус точки наблюдения $M(x, y)$ с началом в точке «источка» $(\xi, 0)$; r_0, r_1 — вектор-радиусы M при $\xi = \mp a$ — их начала расположены в концах участка нагружения. Углы векторов r_0, r, r_1 с осью Ox обозначаются $\theta_0, \theta_\xi, \theta_1$. Тогда (рис. 41)

$$x - \xi = r \cos \theta_\xi, \quad y = r \sin \theta_\xi,$$

$$x - a = r_1 \cos \theta_1,$$

$$x + a = r_0 \cos \theta_0$$

и, далее,

$$x - \xi = y \operatorname{ctg} \theta_\xi,$$

$$d\xi = -y d \operatorname{ctg} \theta_\xi,$$

$$U = -\frac{q_0 y^2}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \theta_\xi d \operatorname{ctg}^2 \theta_\xi.$$

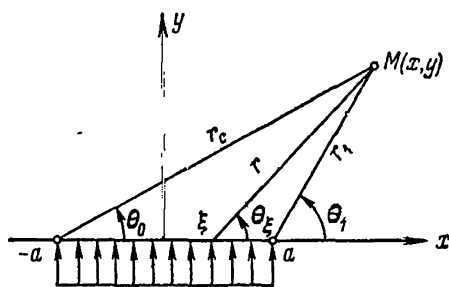


Рис. 41.

Интегрируя по частям, найдем

$$U = -\frac{q_0 y^2}{2\pi} [\theta_1 (\operatorname{ctg}^2 \theta_1 + 1) - \theta_0 (\operatorname{ctg}^2 \theta_0 + 1) - (\operatorname{ctg} \theta_1 - \operatorname{ctg} \theta_0)],$$

и это выражение преобразуется к виду

$$U = -\frac{q_0}{2\pi} (r_1^2 \theta_1 - r_0^2 \theta_0) + \frac{q_0}{\pi} ay, \quad (3.3.3)$$

причем, конечно, линейное по y слагаемое может быть откинуто. Напряженное состояние может быть определено суммой состояний, вычисляемых с помощью формул (1.10.2) в системах полярных координат с центрами в концах участка нагружения.

Называя через (e_r^0, e_θ^0) , (e_r^1, e_θ^1) системы единичных векторов, определяющих эти координатные системы, имеем

$$\hat{T} = -\frac{q_0}{\pi} [(e_r^1 e_r^1 + e_\theta^1 e_\theta^1) \theta_1 - (e_r^0 e_r^0 + e_\theta^0 e_\theta^0) \theta_0] + \\ + \frac{q_0}{2\pi} [(e_r^1 e_\theta^1 + e_\theta^1 e_r^1) - (e_r^0 e_\theta^0 + e_\theta^0 e_r^0)].$$

Связь между векторами этих систем дается очевидными равенствами

$$e_r^1 = e_r^0 \cos \alpha + e_\theta^0 \sin \alpha, \quad e_\theta^1 = -e_r^0 \sin \alpha + e_\theta^0 \cos \alpha, \quad \alpha = \theta_1 - \theta_0.$$

Отсюда получаем

$$e_r^1 e_r^1 + e_\theta^1 e_\theta^1 = e_r^0 e_r^0 + e_\theta^0 e_\theta^0, \\ e_r^1 e_\theta^1 + e_\theta^1 e_r^1 = (e_\theta^0 e_\theta^0 - e_r^0 e_r^0) \sin 2\alpha + (e_r^0 e_\theta^0 + e_\theta^0 e_r^0) \cos 2\alpha,$$

и выражение тензора напряжений в системе (e_r^0, e_θ^0) представляется в виде

$$\hat{T} = -\frac{q_0}{\pi} \left[\frac{1}{2} (2\alpha + \sin 2\alpha) e_r^0 e_r^0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) e_\theta^0 e_\theta^0 + (e_r^0 e_\theta^0 + e_\theta^0 e_r^0) \sin^2 \alpha \right].$$

Главные напряжения определяются по уравнению (2.1.5) гл. I

$$\begin{vmatrix} -\frac{q_0}{2\pi} (2\alpha + \sin 2\alpha) - \sigma & -\frac{q_0}{\pi} \sin^2 \alpha \\ -\frac{q_0}{\pi} \sin^2 \alpha & -\frac{q_0}{2\pi} (2\alpha - \sin 2\alpha) - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

и оказываются равными

$$\sigma_1 = -\frac{q_0}{\pi} (\alpha + \sin \alpha), \quad \sigma_2 = -\frac{q_0}{\pi} (\alpha - \sin \alpha),$$

а главные оси направлены под углами $\frac{1}{2}\alpha$ и $\frac{1}{2}(\pi + \alpha)$ к оси Ox .

На оси x — границе полуплоскости — $\alpha = 0$ вне и $\alpha = \pi$ внутри участка нагружения; этим подтверждается отсутствие касательных напряжений $\tau_{r,\theta_0} = \tau_{xy}$ на всей границе; нормальные напряжения σ_x , σ_y на границе равны друг другу; они обращаются в нуль вне и равны $-q_0$ внутри участка нагружения.

3.4. Нагружение силой, направленной вдоль границы. В этом случае краевые условия записываются по (1.8.4), (1.8.6) в виде

$$y=0: \quad U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{-\infty}^x p_0(x) dx = - \int_{-\infty}^x \tau_{xy} dx = P(x), \quad (3.4.1)$$

и, обратившись к (3.2.2), найдем, что гармоническая функция f_1 равна нулю на границе, а значит, и в области $y > 0$. Гармоническая функция f_2 определяется решением задачи Дирихле для полуплоскости

$$y = 0: \quad f_2(x, 0) = P(x),$$

имеющим, как известно, вид

$$f_2(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}. \quad (3.4.2)$$

В случае сосредоточенной в начале координат силы K_1 имеем

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ K_1, & x > 0, \end{cases}$$

и по (3.4.2)

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= \frac{K_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2} = \frac{K_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial \theta_{\xi}}{\partial \xi} d\xi = \\ &= \frac{K_1}{\pi} (\pi - \theta) = \frac{K_1}{\pi} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right), \end{aligned}$$

так как $\theta_{\xi}|_{\xi \rightarrow \infty} = \pi$, $\theta_{\xi}|_{\xi \rightarrow 0} = \theta$. По (3.2.2), отбрасывая линейное по y слагаемое, получаем

$$U(x, y) = -\frac{K_1}{\pi} r \theta \sin \theta. \quad (3.4.3)$$

Отлично от нуля, как и в задаче Фламана, только напряжение

$$\sigma_r = -\frac{2K_1}{\pi r} \cos \theta. \quad (3.4.4)$$

Поскольку угол θ отсчитывается от направления силы (оси Ox), оба случая — нормального и касательного нагружений сосредоточенной силой — приводят к одинаково формулируемому результату. В общем случае сосредоточенной силы, направленной под углом γ к оси Ox :

$$K = K_1 i_1 + K_2 i_2 = K (i_1 \cos \gamma + i_2 \sin \gamma),$$

имеем, сославшись на формулы (3.4.4), (3.2.7),

$$\sigma_r = -\frac{2K}{\pi r} (\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma) = -\frac{2K}{\pi r} \cos (\theta - \gamma) = -\frac{2K}{\pi r} \cos \psi, \quad (3.4.5)$$

где ψ — угол, отсчитываемый от направления силы. Эта формула включает только что упомянутые как частные случаи.

При равномерном распределении поверхностных сил по участку $-a \leq x \leq a$ границы $y = 0$

$$P(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq -a, \\ q(x+a), & -a \leq x \leq a, \\ 2qa, & a \leq x < \infty, \end{cases}$$

и по (3.4.2)

$$f_2(x, y) = \frac{qy}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\xi + a}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi + \frac{2qa}{\pi} y \int_a^\infty \frac{d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Выражение функции напряжений после несложного вычисления приводится к виду

$$U(x, y) = \frac{qy}{\pi} \left[(x-a)\theta_1 - (x+a)\theta_0 - y \ln \frac{r_0}{r_1} \right], \quad (3.4.6)$$

причем использованы обозначения п. 3.3 и отброшено линейное по y слагаемое.

3.5. Плоская контактная задача. Рассматривается задача о напряженном состоянии в упругой полуплоскости, создаваемом прижатом к ее границе по участку $(-a, a)$ жестким гладким штампом.

Принимается, что касательные напряжения отсутствуют на всей границе, а нормальные — вне участка нагружения; на участке нагружения задается перемещение

$$v = v(x, 0) = f(x), \quad -a < x < a, \quad (3.5.1)$$

причем $f(x)$ определяется формой контактирующей с плоскостью поверхности штампа. Конечно, закон распределения нормальных напряжений на этом участке

$$\sigma_y = -q(x)$$

представляет основную неизвестную задачи. Известной является прижимающая штамп сила

$$Q = \int_{-a}^a q(x) dx. \quad (3.5.2)$$

Сославшись на (3.2.12), можно представить перемещение интегралом

$$v(x, 0) = \beta \int_{-a}^a q(\xi) \ln \frac{1}{|x - \xi|} d\xi = f(x), \quad (3.5.3)$$

и задача сводится к разысканию из этого интегрального уравнения первого рода неизвестной функции $q(\xi)$, подчиненной условию (3.5.2)*).

В рассмотрение вводится логарифмический потенциал простого слоя, распределенного по отрезку $(-a, a)$ с неизвестной плотностью $q(x)$:

$$\omega(x, y) = \int_{-a}^a q(\xi) \ln \frac{1}{r} d\xi, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}. \quad (3.5.4)$$

Это, как известно, гармоническая в плоскости Oxy функция, всюду непрерывная; ее нормальная производная испытывает разрыв при переходе с «нижней» стороны слоя на его «верхнюю» сторону; ее предельные значения на слое определяются равенствами

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow \pm 0} = \begin{cases} \mp \pi q(x), & |x| < a, \\ 0 & |x| > a, \end{cases} \quad (3.5.5)$$

причем $q(x)$ предполагается непрерывной в точке x .

Поведение логарифмического потенциала простого слоя при $r \rightarrow \infty$ определяется соотношением

$$\omega_{\infty}(x, y) = \ln \frac{1}{r_0} \int_{-a}^a q(\xi) d\xi = Q \ln \frac{1}{r_0}, \quad r_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (3.5.6)$$

непосредственно следующим из определения (3.5.4) и условия (3.5.2). Обратно, всякая гармоническая функция, обладающая перечисленными свойствами (непрерывность, характер разрыва нормальной производной, поведение на бесконечности), является логарифмическим потенциалом простого слоя; она представима интегралом (3.5.4).

Сославшись на (3.5.4) и (3.5.3), имеем

$$\omega(x, 0) = \frac{1}{\beta} f(x). \quad (3.5.7)$$

Задача сведена к разысканию в плоскости Oxy гармонической функции, принимающей на отрезке $(-a, a)$ оси Ox заданные значения (3.5.7) и удовлетворяющей условию (3.5.6) на бесконечности. Имея решение этой задачи, можно найти закон распределения давления на участке контакта, используя соотношение (3.5.5).

Функцию $\omega(x, y)$ легко связать с введенной в п. 3.2 гармонической функцией $f_1(x, y)$, через которую по (3.2.4) выражается

*) Решение интегрального уравнения (3.5.3) можно также получить сведением его к краевой задаче Римана (см. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, 1963).

функция напряжений. Действительно, по (3.2.4), (3.3.2) и (3.5.4) имеем

$$\nabla^2 U = -2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = -\frac{2}{\pi} \int_{-a}^a q(\xi) \frac{y}{r^2} d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a q(\xi) \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r} d\xi = \frac{2}{\pi} \frac{\partial \omega}{\partial y},$$

так что

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{1}{\pi} \omega. \quad (3.5.8)$$

Это позволяет выразить напряжения через потенциал $\omega(x, y)$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 f_1}{\partial y^3} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - y \frac{\partial^3 f_1}{\partial y^3} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = y \frac{\partial^3 f_1}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{\pi} y \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.9)$$

Через эту же функцию и связанную с ней зависимостями Коши — Римана функцию

$$\Phi = -\int_{-a}^a q(\xi) \theta_\xi d\xi, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \left(\theta_\xi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-\xi} \right) \quad (3.5.10)$$

выражаются также и перемещения в обобщенном плоском напряженном состоянии

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{\pi E} \left[(1-\nu) \Phi + (1+\nu) y \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + u_0 - \nu_0 y, \\ v &= \frac{1}{\pi E} \left[2\omega - (1+\nu) y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] + v_0 + \nu_0 x. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.11)$$

с соответствующими заменами упругих постоянных в случае плоской деформации.

Из формул (3.5.9) следует, что при действии только нормальных к границе поверхностных сил нормальные напряжения σ_x , σ_y на границе равны друг другу; на это уже указывалось в п. 3.3 для случая равномерного нагружения участка границы.

3.6. Построение потенциала ω . Внутренность единичного круга $\xi = \rho e^{i\varphi}$ конформно отображается на разрезанную по участку $|x| < a$ плоскость Oxy . Это преобразование имеет вид

$$z = x + iy = \frac{a}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right), \quad x = \frac{a}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad y = \frac{a}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi. \quad (3.6.1)$$

Круги $\rho = \rho_0 < 1$ плоскости ξ преобразуются в эллипсы с полуосями $\frac{a}{2} \left(\rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \right)$, $\frac{a}{2} \left| \rho_0 - \frac{1}{\rho_0} \right|$ на плоскости z с фокусами в

точках $\pm a$; для окружности $\rho_0 = 1$ эллипс вырождается в отрезок $(-a, a)$ плоскости z , причем нижней его стороне ($y \rightarrow -0$), обходимой в направлении от $+a$ до $-a$, соответствует верхняя полуокружность $\rho_0 = 1$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), а верхней ($y \rightarrow +0$) — нижняя полуокружность ($\pi \leq \varphi \leq 2\pi$). Бесконечно удаленная точка $(x, y \rightarrow \infty)$ плоскости z переходит на плоскости ξ в начало координат ($\rho = 0$).

Искомый потенциал $\omega(x, y)$ преобразуется в функцию $\omega_*(\rho, \varphi)$, также гармоническую, поскольку преобразование (3.6.1) конформно. На «эллипсе» $\rho_0 = 1$

$$x = a \cos \varphi, \quad y = 0,$$

и краевое условие (3.5.7) для функции ω_* записывается в виде

$$\omega_*(1, \varphi) = \frac{1}{\beta} f(a \cos \varphi). \quad (3.6.2)$$

Замечая, далее, что при $(x, y) \rightarrow \infty$

$$x^2 + y^2 \rightarrow \frac{a^2}{4\rho^2}, \quad \ln \frac{1}{r_0} \rightarrow \ln \frac{2\rho}{a},$$

можно преобразовать условие на бесконечности (3.5.6) к виду

$$\omega_*(0, \varphi) - Q \ln \frac{2\rho}{a} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (3.6.3)$$

Поэтому, введя в рассмотрение вместо $\omega_*(\rho, \varphi)$ также гармоническую функцию

$$\Omega(\rho, \varphi) = \omega_*(\rho, \varphi) - Q \ln \frac{2\rho}{a}, \quad (3.6.4)$$

приходим к задаче о разыскании этой функции по условиям

$$\Omega(1, \varphi) = \frac{1}{\beta} f(a \cos \varphi) - Q \ln \frac{2}{a}, \quad \Omega(0, \varphi) = 0. \quad (3.6.5)$$

Ее решение представляется известным интегралом Пуассона

$$\Omega(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\rho^2)f(a \cos \psi)}{1+\rho^2-2\rho \cos(\psi-\varphi)} d\psi - Q \ln \frac{2}{a}, \quad (3.6.6)$$

причем следствием второго условия (3.6.5) являются требования

$$Q = \frac{1}{2\pi\beta \ln \frac{2}{a}} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) d\psi = \frac{1}{\pi\beta \ln \frac{2}{a}} \int_{-a}^a \frac{f(\xi)}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (3.6.7)$$

Вспоминая еще представление ядра Пуассона тригонометрическим рядом

$$\frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos k(\psi - \varphi)$$

и замечая, что $f(a \cos \varphi)$ четна по φ (одинакова на верхнем и нижнем берегах разреза), имеем

$$\Omega(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \rho^k \cos k\varphi, \quad \omega_*(\rho, \varphi) = Q \ln \frac{2\rho}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \alpha_k \cos k\varphi. \quad (3.6.8)$$

Здесь α_k — коэффициенты Фурье:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi\beta} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos k\psi d\psi. \quad (3.6.9)$$

Остается составить выражение закона распределения $q(x)$ поверхностных сил на поверхности контакта. Имеем

$$\frac{\partial \omega_*}{\partial \rho} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{a}{2} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \cos \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) \sin \varphi \right]$$

и, сославшись на (3.5.5), (3.6.8), найдем

$$\left. \frac{\partial \omega_*}{\partial \rho} \right|_{\rho \rightarrow 1} = a \left. \frac{\partial \omega}{\partial y} \right|_{y \rightarrow \pm 0} \sin \varphi = \mp a\pi q(a \cos \varphi) \sin \varphi,$$

откуда, вспомнив, что $\sin \varphi \leq 0$ при $y \rightarrow \pm 0$, придем к формальному представлению $q(x)$ в виде

$$q(x) = q(a \cos \varphi) = \frac{1}{a\pi |\sin \varphi|} \left(Q + \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \right|_{\rho \rightarrow 1} \right) = \frac{Q + \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k \cos k\varphi}{\pi a |\sin \varphi|}. \quad (3.6.10)$$

Ряд в правой части представляет предельное значение при $|\zeta| = 1$ вещественной части аналитической в круге $|\zeta| < 1$ функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k \rho^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi),$$

причем предельное значение ее мнимой части равно

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k \rho^k \sin k\varphi = -\frac{1}{\beta} \frac{df(a \cos \varphi)}{d\varphi},$$

что следует из определения (3.6.9) коэффициентов α_k . Из сказанного, сославшись на известные формулы обращения Гильберта*), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k \rho^k \cos k\varphi = -\frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} \frac{df(a \cos \psi)}{d\psi} \operatorname{ctg} \frac{\psi - \varphi}{2} d\psi,$$

так что другим представлением $q(x)$ может служить

$$q(x) = \frac{1}{\pi\alpha |\sin \varphi|} \left[Q - \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^{2\pi} \frac{df(a \cos \psi)}{d\psi} \operatorname{ctg} \frac{\psi - \varphi}{2} d\psi \right]. \quad (3.6.11)$$

Разбивая промежуток интегрирования на два: $(0, \pi)$ и $(\pi, 2\pi)$ — и заменив во втором переменную интегрирования ψ на $2\pi - \psi$, преобразуем входящий в это выражение интеграл к виду

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{df(a \cos \psi)}{d\psi} \left(\operatorname{ctg} \frac{\psi - \varphi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi + \psi}{2} \right) d\psi = \\ = 2 \int_0^{\pi} \frac{df(a \cos \psi)}{d\psi} \frac{\sin \psi}{\cos \varphi - \cos \psi} d\psi, \end{aligned}$$

откуда, возвращаясь к переменным $x = a \cos \varphi$, $\xi = a \cos \psi$, получим

$$q(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[Q - \frac{1}{\pi\beta} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi \right]. \quad (3.6.12)$$

Здесь интеграл в правой части понимается в смысле его главного значения

$$\int_{-a}^a \frac{f'(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{f'(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi + \int_{x+\varepsilon}^a \frac{f'(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi \right],$$

и достаточным условием его существования является выполнение условия Гельдера

$$|f'(x') - f'(x)| < M |x' - x|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

В точках, где это условие не выполнено, $q(x)$ не будет ограничено. Например, в угловой точке $x = 0$ штампа, ограниченного кривой $y = f(|x|)$, производная $y' = f'(|x|) \operatorname{sgn} x$, условие Гельдера не выполнено и давление будет бесконечным.

*) См., например, Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, 1963, стр. 56.

3.7. Плоский штамп. В этом простейшем случае $f(x) = f_0 = \text{const}$ и распределение контактного давления по (3.6.12) определяется формулой (Садовский, 1928)

$$q(x) = \frac{Q}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (3.7.1)$$

Выражение потенциала ω , определяемого формулой (5.5.8), имеет весьма простой вид:

$$\omega = Q \ln \frac{2\rho}{a}. \quad (3.7.2)$$

Перемещение v упругой среды на оси Ox , определяемое по (3.5.11), может быть представлено в виде

$$v = \frac{2Q}{\pi E} \ln \frac{2\rho}{a} + v_0 = \frac{2Q}{\pi E} \left(\ln \frac{2\rho}{a} - \ln \frac{2}{a} \right) + \text{const} = \frac{2Q}{\pi E} \ln \rho + f_0. \quad (3.7.3)$$

Как и в пространственной задаче о плоском штампе (п. 6.3 гл. V), давление бесконечно на краю контактной площадки; в отличие от этой задачи, перемещение плоского штампа может быть определено лишь с точностью до аддитивной постоянной. Это объясняется тем, что вектор перемещения точек упругой среды в пространственной задаче на бесконечности равен нулю, тогда как в плоской задаче он неограниченно возрастает по логарифмическому закону.

3.8. Штамп параболического очертания. Сославшись на (6.1.11) гл. V, примем

$$f(x) = \delta - Ax^2 = \delta - Aa^2 \cos^2 \varphi = \delta - \frac{1}{2} Aa^2 - \frac{1}{2} Aa^2 \cos 2\varphi, \quad (3.8.1)$$

так что по (3.6.10)

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{\delta - \frac{1}{2} Aa^2}{\beta \ln \frac{2}{a}}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2\beta} Aa^2, \\ q(x) &= \frac{1}{\pi a |\sin \varphi|} \left(Q - \frac{1}{\beta} Aa^2 \cos 2\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left(Q + \frac{A}{\beta} a^2 - 2 \frac{A}{\beta} x^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.8.2)$$

Наперед неизвестная ширина $2a$ контактной площадки определяется по условию конечности контактного давления на ее краях; получаем

$$Q = \frac{A}{\beta} a^2, \quad a = \sqrt{\frac{Q\beta}{A}} = \sqrt{\frac{2Q}{\pi EA}}, \quad (3.8.3)$$

и выражение контактного давления представляется в виде

$$q(x) = \frac{2Q}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (3.8.4)$$

3.9. Сосредоточенная сила в упругой полуплоскости. В п.3.1 была рассмотрена задача о действии сосредоточенной силы $X + iY$ в упругой плоскости; ее решение в случае плоской деформации выражено через функцию напряжений, определяемую формулой (3.1.10) в предположении, что сила приложена в начале координат $z = 0$. В случае силы, приложенной в точке η_0 оси Oy , достаточно заменить z на $z - i\eta_0$.

Рассмотрим действие двух сил: силы $X + iY$ в точке $i\eta_0$ и зеркально отображенной относительно оси Ox силы $X - iY$ в точке $(-i\eta_0)$. Функция напряжений U_* , описывающая состояние упругой плоскости в этих условиях, очевидно, может быть получена наложением функций вида (3.1.10): ее производная по \bar{z} с точностью до аддитивной постоянной равна

$$4 \frac{\partial U_*}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[-(X + iY) \ln(z - i\eta_0) - (X - iY) \ln(z + i\eta_0) - \right. \\ \left. - (X - iY) \frac{z - i\eta_0}{\bar{z} + i\eta_0} - (X + iY) \frac{z + i\eta_0}{\bar{z} - i\eta_0} + \right. \\ \left. + (3 - 4\nu)(X + iY) \ln(\bar{z} + i\eta_0) + (3 - 4\nu)(X - iY) \ln(\bar{z} - i\eta_0) \right]. \quad (3.9.1)$$

В рассматриваемой здесь задаче разыскивается напряженное состояние в упругой полуплоскости $y > 0$, в точке $i\eta_0$ которой приложена сосредоточенная сила $X + iY$, тогда как граница $y = 0$ свободна от нагружения. Называя через U функцию напряжений этой задачи, полагаем

$$U = U_* + U_{**}. \quad (3.9.2)$$

Тогда краевые условия, определяющие U_{**} , следует записать в виде

$$\text{при } y = 0, \quad z = \bar{z} = x: \quad \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U_*}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial U_{**}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.9.3)$$

и в развернутом виде

$$4 \frac{\partial U_{**}}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=z=x} = - \frac{1}{\pi(1-\nu)} \left\{ X \left[(1-2\nu) \ln \sqrt{x^2 + \eta_0^2} - \frac{x^2 - \eta_0^2}{2(x^2 + \eta_0^2)} \right] - \right. \\ \left. - iY \left[(1-\nu) \ln \frac{x - i\eta_0}{x + i\eta_0} + i \frac{x\eta_0}{x^2 + \eta_0^2} \right] \right\}.$$

Введя в рассмотрение угол θ_0 :

$$\cos \theta_0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \eta_0^2}}, \quad \sin \theta_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{x^2 + \eta_0^2}}, \quad \theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{\eta_0}{x} \quad (0 \leq \theta_0 \leq \pi),$$

можно переписать это соотношение также в виде ($r_0 = \sqrt{x^2 + \eta_0^2}$)

$$\left(\frac{\partial U_{**}}{\partial x} + i \frac{\partial U_{**}}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = - \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left\{ X \left[(1-2\nu) \ln r_0 - \frac{1}{2} \cos 2\theta_0 \right] + \right. \\ \left. + Y \left[-2(1-\nu) \theta_0 + \eta_0 \frac{\cos \theta_0}{r_0} \right] \right\}. \quad (3.9.4)$$

Величина в правой части вещественна, производная по y искомой функции напряжений на границе оказалась равной нулю; это можно было предвидеть, поскольку касательные напряжения τ_{xy} на оси Ox при нагружении плоскости силами $X \pm iY$ в точках $\pm i\eta_0$, вследствие симметрии, отсутствуют. Функция $U_{..}$ соответствует напряженному состоянию, создаваемому нормальным к границе нагружением, и ее можно разыскивать в форме (3.2.4):

$$U_{..} = f(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_{..}}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y=0}, \quad (3.9.5)$$

где $f(x, y)$ — функция, гармоническая в верхней полуплоскости, причем $\partial f / \partial x$ определяется задачей Дирихле. Решение ее частично записывается сразу, так как

$$\ln r_0, \quad \theta_0, \quad \frac{\cos \theta_0}{r_0}$$

представляют значения на прямой $y = 0$ гармонических при $y > 0$ функций

$$\ln r = \ln \sqrt{x^2 + (y + \eta_0)^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y + \eta_0}{x}, \quad \frac{\cos \theta}{r} = \frac{x}{x^2 + (y + \eta_0)^2},$$

которые в свою очередь представляют производные по x от гармонических функций

$$\ln r = \frac{\partial}{\partial x} [x \ln r - (y + \eta_0) \theta - x], \quad \theta = \frac{\partial}{\partial x} [x \theta + (y + \eta_0) \ln r],$$

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \ln r.$$

Вместе с тем

$$\cos 2\theta_0 = \frac{x^2 - \eta_0^2}{x^2 + \eta_0^2} = 1 - \frac{2\eta_0^2}{x^2 + \eta_0^2} = \frac{\partial}{\partial x} (x + 2\eta_0 \theta_0) = \frac{\partial}{\partial x} (x + 2\eta_0 \theta) \Big|_{y=0}.$$

Приходим к следующему представлению гармонической в $y > 0$ функции $f(x, y)$:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left\{ X \left[(1-2\nu) \{x \ln r - (y + \eta_0) \theta - x\} - \frac{1}{2} (x + 2\eta_0 \theta) \right] + \right. \\ \left. + Y \left[-2(1-\nu) \{x \theta + (y + \eta_0) \ln r\} + \eta_0 \ln r \right] \right\},$$

и теперь по (3.9.5), отбрасывая линейные слагаемые, находим

$$U_{..}(x, y) = -\frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left\{ X \left[(1-2\nu) (x \ln r - \eta_0 \theta) - \eta_0 \left(\theta - \frac{xy}{r^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + Y \left[-2(1-\nu) (x \theta + \eta_0 \ln r) + \eta_0 \left(\ln r - \frac{y(y + \eta_0)}{r^2} \right) \right] \right\}. \quad (3.9.6)$$

Решение задачи представляется в виде суммы функции напряжений U_1 , создаваемой действием горизонтальной силы, и U_2 — вертикальной силы. Получаем

$$2 \frac{\partial U_1}{\partial \bar{z}} = \frac{X}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{1}{4} (3-4\nu) \ln(\bar{z}^2 + \eta_0^2) - \frac{1}{4} \ln(z^2 + \eta_0^2) - \frac{z\bar{z} - \eta_0^2}{2(\bar{z}^2 + \eta_0^2)} - \right. \\ \left. - (1-2\nu) \ln r - (1-2\nu)(x - i\eta_0) \frac{z + i\eta_0}{r^2} - \right. \\ \left. - \eta_0 \frac{2y + \eta_0}{r^2} + 2\eta_0(z + i\eta_0) \frac{xy}{r^4} \right], \quad (3.9.7)$$

$$2 \frac{\partial U_2}{\partial \bar{z}} = \frac{Y}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{i}{4} (3-4\nu) \ln \frac{\bar{z} + i\eta_0}{\bar{z} - i\eta_0} + \frac{i}{4} \ln \frac{z + i\eta_0}{z - i\eta_0} + \eta_0 \frac{x}{\bar{z}^2 + \eta_0^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\nu)\theta + 2(1-\nu)i \frac{x - i\eta_0}{r^2} (z + i\eta_0) - \right. \\ \left. - \frac{\eta_0 \bar{z}}{r^2} - 2\eta_0(z + i\eta_0) \frac{y(y + \eta_0)}{r^4} \right]. \quad (3.9.8)$$

Эти бигармонические в верхней полуплоскости функции имеют требуемую особенность в точке $z = i\eta_0$ приложения силы $X + iY$ и принимают постоянное значение на границе $y=0$, что и требуется. Вычисление напряжений проводится по формулам (1.13.2).

§ 4. Упругий клин

4.1. Сосредоточенная сила в вершине клина. Рассматриваемая клинообразная бесконечная область ограничена двумя полупрямыми $y = \pm x \operatorname{tg} \alpha$ под углом 2α ; ось Ox направлена внутрь этой области, а начало координат (вершина клина) принято за начало полярной системы координат (r, θ) , так что $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$. Проекция силы, приложенной в вершине клина, на оси Ox , Oy обозначаются X , Y ; грани клина предполагаются ненагруженными:

$$\theta = \pm \alpha: \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (4.1.1)$$

Можно удовлетворить этим условиям, предположив, что они выполняются не только на границах, но и во всей области:

$$|\theta| \leq \alpha: \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (4.1.2)$$

Напряжение σ_r при этих условиях будет гармонической в области функцией, так как

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = \nabla^2 \sigma_r = \nabla^2 \nabla^2 U = 0. \quad (4.1.3)$$

Требуется также выполнить при всяком r уравнений статики

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r \cos \theta r d\theta + X = 0, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r \sin \theta r d\theta + Y = 0, \quad (4.1.4)$$

выражающих условия равновесия части клина, отсеченной дугой радиуса r . Этим соотношениям можно удовлетворить при любом r , предположив σ_r обратно пропорциональным r ; поскольку σ_r — гармоническая функция, следует принять

$$\sigma_r = A \frac{\cos \theta}{r} + B \frac{\sin \theta}{r}. \quad (4.1.5)$$

Отличающихся от нее других гармонических функций, удовлетворяющих условиям (4.1.4), не существует. Определив по этим условиям постоянные A и B , найдем

$$\sigma_r = -\frac{2}{r} \left(\frac{X \cos \theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{Y \sin \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right). \quad (4.1.6)$$

Напряжение σ_r всюду (при $r \neq 0$) конечно (корни знаменателей, исключая нулевые, все комплексны) и стремится к нулю на бесконечности ($r \rightarrow \infty$). Функция напряжений представляется в виде

$$U = r\theta \left(-\frac{X \sin \theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{Y \cos \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) = \theta \left(-\frac{yX}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{xY}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right). \quad (4.1.7)$$

По ней определяется вектор перемещения (для плоского напряженного состояния):

$$\left. \begin{aligned} Eu &= -\frac{X}{2\alpha + \sin 2\alpha} \left[2 \ln r + (1 + \nu) \frac{y^2}{r^2} \right] + \\ &\quad + \frac{Y}{2\alpha - \sin 2\alpha} \left[(1 - \nu) \theta + (1 + \nu) \frac{xy}{r^2} \right] + u_0 - \omega_0 y, \\ Ev &= \frac{X}{2\alpha + \sin 2\alpha} \left[(1 + \nu) \frac{xy}{r^2} - (1 - \nu) \theta \right] - \\ &\quad - \frac{Y}{2\alpha - \sin 2\alpha} \left[2 \ln r + (1 + \nu) \frac{x^2}{r^2} \right] + v_0 + \omega_0 x. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.8)$$

При $\alpha = \pi/2$ возвращаемся к случаю полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой; $\alpha = \pi$ дает решение задачи о напряженном состоянии в плоскости, разрезанной по отрицательной оси Ox , когда сила приложена в вершине разреза.

С целью сравнения с элементарной теорией изгиба балки примем в выражениях компонент тензора напряжений (при $X = 0$)

$$r = \frac{x}{\cos \theta}, \quad I = \frac{2}{3} x^3 \operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{2}{3} h^3,$$

где I — момент инерции поперечного сечения $x = \text{const}$, $2h \cdot 1$ — его площадь. Придем к формулам

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2Y}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{r^4} = -\frac{4Y \operatorname{tg}^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{xy}{3I} \cos^4 \theta, \\ \sigma_y &= -\frac{2Y}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{y^3}{r^4} = -\frac{4Y \operatorname{tg}^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{y^3}{3Ix} \cos^4 \theta, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2Y}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{xy^2}{r^4} = -\frac{4Y \operatorname{tg}^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{y^2}{3I} \cos^4 \theta\end{aligned}$$

и при достаточно малых α , полагая

$$2\alpha - \sin 2\alpha \approx \frac{4}{3} \alpha^3, \quad \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \right)^3 \cos^4 \theta \approx 1,$$

получим

$$\sigma_x \approx -\frac{Yxy}{I}, \quad \tau_{xy} \approx -\frac{Yy^2}{I} = -\frac{3}{2} \frac{Yy^2}{h^3}.$$

Выражения нормальных напряжений в этом приближении совпадают с даваемыми элементарной теорией, тогда как

$$(\tau_{xy})_{y=\pm h} = -3 \frac{Y}{2h} = -3 (\tau_{xy})_{\text{ср}}$$

вдвое больше определяемых этой теорией максимальных напряжений.

4.2. Интегральное преобразование Меллина в задаче о клине. Для сокращения записей далее рассматривается лишь нагружение клина нормальными к граням поверхностными силами, причем по отдельности исследуются случаи симметричного и кососимметричного нагружений (задачи А и Б):

$$\left. \begin{array}{ll} \text{А} & \theta = \pm \alpha: \quad \sigma_\theta = q_1(r), \quad \tau_{r\theta} = 0, \\ \text{Б} & \theta = \pm \alpha: \quad \sigma_\theta = \pm q_2(r), \quad \tau_{r\theta} = 0. \end{array} \right\} \quad (4.2.1)$$

Бигармонические функции напряжений, удовлетворяющие условию отсутствия касательных напряжений на гранях клина, представляются в виде

$$\left. \begin{array}{l} \text{А} \quad U_1(\rho, \theta) = C_1 \rho^{-s} [(s+2) \sin(s+2)\alpha \cos s\theta - s \sin s\alpha \cos(s+2)\theta], \\ \text{Б} \quad U_2(\rho, \theta) = C_2 \rho^{-s} [(s+2) \cos(s+2)\alpha \sin s\theta - s \cos s\alpha \sin(s+2)\theta], \end{array} \right\} \quad (4.2.2)$$

где $\rho = r/r_0$, r_0 — некоторый линейный размер. Нормальные напряжения σ_θ определяются по формулам

$$\text{А и Б} \quad r_0^2 \rho^2 \sigma_\theta^{(k)} = s(s+1) U_k(\rho_0, \theta) \quad (k=1, 2). \quad (4.2.3)$$

Напомним, что трансформантой Меллина функции $f(x)$, заданной на интервале $(0, \infty)$, называется интеграл

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx, \quad (4.2.4)$$

где s — некоторое комплексное число. В предположении, что $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном промежутке, принадлежащем интервалу $(0, \infty)$, имеет место формальное представление

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{f}(s) x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(s) x^{-s} ds, \quad (4.2.5)$$

где L — параллельная мнимой оси плоскости s прямая. Не входя в подробности, отметим, что если интеграл

$$\int_0^{\infty} |f(x)| x^{s-1} dx \quad (4.2.6)$$

сходится, то прямая L проводится в полосе левее прямой $\operatorname{Re} s = s_*$, но справа от ближайшей к s_* особой точки s_* трансформанты $\bar{f}(s)$; значение интеграла (4.2.5) не зависит от выбора c в этом интервале $(s_*, s_*)^*$.

Теперь, сославшись на представления (4.2.2), зададим в соответствии с (4.2.5) функции напряжений в виде

$$\text{А и Б} \quad U_k(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{U}_k(s, \theta) \rho^{-s} ds, \quad (4.2.7)$$

где $U_k(s, \theta)$ — их трансформанты Меллина:

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad \bar{U}_1(s, \theta) &= C_1(s) [(s+2) \sin(s+2) \alpha \cos s\theta - s \sin s\alpha \cos(s+2) \theta], \\ \text{Б} \quad \bar{U}_2(s, \theta) &= C_2(s) [(s+2) \cos(s+2) \alpha \sin s\theta - s \cos s\alpha \sin(s+2) \theta]. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.8)$$

Трансформанты Меллина функций $r^2 \sigma_{\theta}^{(k)}$ по (4.2.3) равны $s(s+1) \bar{U}_k$, так что

$$\text{А и Б} \quad r^2 \sigma_{\theta}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s(s+1) \bar{U}_k(s, \theta) \rho^{-s} ds. \quad (4.2.9)$$

*) О преобразовании Меллина см., например, И. Снеддон, Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.

Вместе с тем по (4.2.1) и (4.2.5)

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad r^2 \sigma_{\theta}^{(1)}|_{\theta=\pm\alpha} &= r_0^2 \rho^2 q_1(\rho) = \frac{r_0^2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{q}_1(s) \rho^{-s} ds, \\ \text{Б} \quad r^2 \sigma_{\theta}^{(2)}|_{\theta=\pm\alpha} &= \pm r_0^2 \rho^2 q_2(\rho) = \pm \frac{r_0^2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{q}_2(s) \rho^{-s} ds, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.10)$$

где $\bar{q}_k(s)$ — трансформанты функций $\rho^2 q_k(\rho)$, равные по (4.2.4)

$$\text{А и Б} \quad \bar{q}_k(s) = \int_0^{\infty} \rho^{s+1} q_k(\rho) d\rho \quad (k=1, 2). \quad (4.2.11)$$

Теперь по (4.2.1) имеем

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad C_1(s) &= r_0^2 \frac{\bar{q}_1(s)}{s(s+1) G_1(s, \alpha)}, \\ G_1(s, \alpha) &= (s+1) \sin 2\alpha + \sin 2(s+1)\alpha, \\ \text{Б} \quad C_2(s) &= r_0^2 \frac{\bar{q}_2(s)}{s(s+1) G_2(s, \alpha)}, \\ G_2(s, \alpha) &= -(s+1) \sin 2\alpha + \sin 2(s+1)\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.12)$$

так что выражения функций напряжений, удовлетворяющие краевым условиям, записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad U_1(\rho, \theta) &= \\ &= \frac{r_0^2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\bar{q}_1(s)}{s(s+1)} \frac{(s+2) \sin(s+2)\alpha \cos s\theta - s \sin s\alpha \cos(s+2)\theta}{(s+1) \sin 2\alpha + \sin 2(s+1)\alpha} \rho^{-s} ds, \\ \text{Б} \quad U_2(\rho, \theta) &= \\ &= \frac{r_0^2}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\bar{q}_2(s)}{s(s+1)} \frac{(s+2) \cos(s+2)\alpha \sin s\theta - s \cos s\alpha \sin(s+2)\theta}{-(s+1) \sin 2\alpha + \sin 2(s+1)\alpha} \rho^{-s} ds. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.13)$$

Предполагается, что $U_k(\rho, \theta)$ растут при $\rho \rightarrow \infty$ не быстрее, чем ρ^* ; тогда интеграл (4.2.6) будет сходящимся при $s_* < -1$, а прямая L проводится в полосе $(\operatorname{Re} s_1, -1)$, где s_1 — корень функции $G_k(s, \alpha)$, расположенный слева от -1 , с наибольшей среди этих корней вещественной частью.

Вычисление интегралов (4.2.13) производится по отдельности при $\rho < 1$ и $\rho > 1$. В первом случае дополним слева прямую L

*) Это условие соблюдено, например, в задаче о действии сосредоточенной силы в вершине клина; см. (4.1.7).

полукругом радиуса $|s| = R$; в предположении применимости известной леммы Жордана *) интеграл по полукругу при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю и вычисляемые интегралы равны произведениям $2\pi i$ на сумму вычетов по всем полюсам подынтегральных функций, расположенным слева от L . Из этого же рассуждения при $\rho > 1$ следует равенство интегралов произведению суммы вычетов по всем полюсам, расположенным справа от L на $(-2\pi i)$ (обходимая область теперь остается справа).

Особый интерес представляют слагаемые $U_k^{-1}(\rho, \theta)$, $U_k^0(\rho, \theta)$ этих сумм, соответствующие полюсам $s = -1$ и $s = 0$ справа от L . Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad f_1(s, \alpha) &= \frac{1}{G_1(s, \alpha)} [(s+2) \sin(s+2)\alpha \cos s\theta - s \sin s\alpha \cos(s+2)\theta], \\ \text{Б} \quad f_2(s, \alpha) &= \frac{1}{G_2(s, \alpha)} [(s+2) \cos(s+2)\alpha \sin s\theta - s \cos s\alpha \sin(s+2)\theta], \end{aligned} \right\} \quad (4.2.14)$$

по правилу Лопиталья имеем

$$\left. \begin{aligned} \text{А} \quad f_1(s, \alpha)|_{s \rightarrow -1} &= 2 \frac{(\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) \cos \theta + \theta \sin \theta \sin \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha}, \\ \text{Б} \quad f_2(s, \alpha)|_{s \rightarrow -1} &= 2 \frac{(\alpha \sin \alpha - \cos \alpha) \sin \theta + \theta \cos \theta \cos \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.15)$$

Вспомнив (4.2.11), получаем равенства

$$\text{А и Б} \quad -2r_0 \bar{q}_1(-1) \sin \alpha = X, \quad 2r_0 \bar{q}_2(-1) \cos \alpha = Y, \quad (4.2.16)$$

где X , Y — проекции на оси Ox , Oy главного вектора поверхностных сил на гранях клина. Теперь, отбросив несущественные линейные по $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ слагаемые, получаем

$$\text{А и Б} \quad U_1^{-1}(\rho, \theta) = -y\theta \frac{X}{2\alpha + \sin 2\alpha}, \quad U_2^{-1}(\rho, \theta) = x\theta \frac{Y}{2\alpha - \sin 2\alpha} \quad (4.2.17)$$

в полном соответствии с формулами (4.1.7). Из этих соотношений следует, что при отсутствии в суммах $U_k(\rho, \theta)$ слагаемых, растущих при $\rho \rightarrow \infty$ быстрее, чем ρ , напряженное состояние в клине при $\rho \rightarrow \infty$ такое же, как при нагружении его в вершине силой (X, Y) .

Аналогично имеем

$$\text{А и Б} \quad f_1(0, \alpha) = 1, \quad f_2(s, \alpha)|_{s \rightarrow 0} = \frac{\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}, \quad (4.2.18)$$

и поэтому $U_1^0(\rho, \theta) = \text{const}$, тогда как при условии, что

$$\left. \begin{aligned} \text{Б} \quad G_2'(0, \alpha) &= -\sin 2\alpha + 2\alpha \cos 2\alpha \neq 0, \quad \text{tg } 2\alpha \neq 2\alpha, \\ 2\alpha \neq 2\alpha_* &= 4,493 \approx 257^\circ, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.19)$$

*) См., например, В. А. Диткин, А. П. Прудников, Операционное исчисление, изд-во «Высшая школа», 1966, стр. 34.

имеем

$$\begin{aligned} \text{Б} \quad U_2^0(\rho, \theta) &= -r_0^2 \bar{q}_2(0) f_2(s, \alpha) \big|_{s \rightarrow 0} = \\ &= -\frac{1}{2} m^0 \frac{\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \quad (\alpha \neq \alpha_*). \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Здесь по (4.2.11)

$$m^0 = 2r_0^2 \int_0^\infty q_2(\rho) \rho \, d\rho \quad (4.2.21)$$

представляет главный момент относительно вершины клина распределенных по его граням поверхностных сил. При $\alpha = \alpha_*$ корень $s = 0$ функции $G_2(s, \alpha)$ будет двукратным, и нет нужды приводить результат громоздкого вычисления в этом специальном случае.

Как будет показано в п. 4.3, решение $U_2^0(\rho, \theta)$ может быть непосредственно получено из рассмотрения задачи о нагружении клина сосредоточенным в его вершине моментом m^0 . Из сказанного здесь следует, что оно представляет главный член выражения $U_2(\rho, \theta)$ на бесконечности ($\rho \rightarrow \infty$) при отсутствии в полосе $(-1, 0)$ корней функции $G_2(s, \alpha)$. Доказывается, что это имеет место при $\alpha < \alpha_*$, тогда как при $\alpha > \alpha_*$ функция $G_2(s, \alpha)$ приобретает еще один простой вещественный отрицательный корень*)

$$\text{Б} \quad -\frac{1}{2} < s = \lambda(\alpha) < 0. \quad (4.2.22)$$

Соответствующее ему слагаемое $U_2^{(\lambda)}(\rho, \theta)$ функции напряжений

$$\begin{aligned} \text{Б} \quad U_2^{(\lambda)}(\rho, \theta) &= \\ &= \frac{\bar{q}_2^*(\lambda)}{\lambda(\lambda+1)} \frac{(2+\lambda) \cos(\lambda+2)\alpha \sin \lambda\theta - \lambda \cos \lambda\alpha \sin(\lambda+2)\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2(\lambda+1)\alpha} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda+1} \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

представляет главный член разложения функции напряжений. Его выражение зависит от распределения поверхностных сил $q_2(\rho)$ на гранях клина и не может быть определено только через изгибающий момент m^0 . Через $\bar{q}_2^*(\lambda)$ в формуле (4.2.23) обозначен интеграл

$$\bar{q}_2^*(\lambda) = r_0^2 \int_0^\infty \rho^{\lambda+1} q_2(\rho) \, d\rho.$$

4.3. Сосредоточенный момент в вершине клина. Краевые условия (4.1.1)

$$\theta = \pm \alpha; \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (4.3.1)$$

*) См. ниже п. 4.9.

дополняются уравнениями равновесия части клина, отсеченной дугой произвольного радиуса

$$\left. \begin{aligned} X &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = 0, \\ Y &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0, \\ \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\theta} r^2 d\theta &= -m^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2)$$

Эти условия позволяют искать решение задачи, предполагающее отсутствие нормального напряжения σ_θ во всей области:

$$|\theta| \leq \alpha: \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = 0. \quad (4.3.3)$$

Функция напряжений, нечетная по θ , линейна по r ; но нечетной бигармонической функцией, пропорциональной r , исключая тривиальную $r \sin \theta$, является $C\theta r \cos \theta$, дающая по (4.1.7) решение задачи об изгибе клина сосредоточенной в его вершине силой. Поэтому в задаче об изгибе моментом функцию напряжений следует принять зависящей только от θ ; такой функцией, удовлетворяющей краевым условиям (4.3.1), является

$$U = \frac{1}{2} C (\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha). \quad (4.3.4)$$

Выразив через нее напряжения σ_r , $\tau_{r\theta}$, легко проверить, что первые два уравнения статики (4.3.2) удовлетворятся тождественно, тогда как третье приводит к соотношению

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\theta} r^2 d\theta = C (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) = -m^0,$$

и из него в предположении [см. (4.2.19)], что $\alpha \neq \alpha_*$, приходим к решению (Карозерс, 1912; Инглис, 1922)

$$U = -\frac{1}{2} m^0 \frac{\sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \quad (\alpha \neq \alpha_*) \quad (4.3.5)$$

с соответствующими ему напряжениями

$$\sigma_r = \frac{2m^0}{r^2} \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{m^0}{r^2} \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha}. \quad (4.3.6)$$

Результат представляется парадоксальным — решение задачи отсутствует при некотором единственном значении угла раствора клина $2\alpha = 2\alpha_*$.

Объяснение парадокса требует уточнения понятия об изгибающем моменте. Естественнее принять такое определение: грани клина предполагаются нагруженными в области его вершины кососимметричной нормальной нагрузкой

$$\theta = \pm \alpha; \quad \sigma_\theta = \pm q_2(r) \quad (0 \leq r \leq r_0); \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (0 < r < \infty),$$

причем такой, что ее главный вектор равен нулю, а главный момент относительно вершины клина задан:

$$\int_0^{r_0} q_2(r) dr = 0, \quad 2 \int_0^{r_0} q_2(r) r dr = m^0. \quad (4.3.7)$$

Если эти равенства сохраняются при $r_0 \rightarrow 0$, $q_2(r) \rightarrow \infty$, то говорят, что в вершине клина приложен изгибающий момент m^0 . Конечно, это определение можно распространить и на другие загрузки клина в области его вершины.

Функция напряжений для задачи о кососимметричном нормальном нагружении клина $U_2(\rho, \theta)$ дается выражением (4.2.13), причем главный член ее представления (4.2.20) на бесконечности при $\alpha < \alpha_*$ в точности дает решение (4.3.5). Вместе с тем при $\alpha > \alpha_*$ главный член функции $U_2(\rho, \theta)$ на бесконечности, определяемый по (4.2.23), и соответствующие ему напряжения зависят от закона распределения поверхностных сил на участке $(0, r_0)$, а не только от их момента. Слагаемое вида (4.3.5) входит в состав $U_2(\rho, \theta)$ и при $\alpha > \alpha_*$, но оно не является главным — соответствующие ему напряжения при $\rho \rightarrow \infty$ имеют порядок r^{-2} , тогда как порядок напряжений, определяемых по главному члену, будет $r^{-2+|\alpha|}$.

В постановке задачи этого пункта использовались интегральные уравнения статики (4.3.2); этим из рассмотрения были исключены напряженные состояния, представляемые членами ряда для $U_2(\rho, \theta)$, отличными от (4.3.5). Их присутствие следует связать с наличием в угловой точке статически эквивалентных нулю (с исчезающими главным вектором и главным моментом) особенностей. Пренебрежение этими членами, когда они создаются нагружением по малому участку границы, характерно для решений, в которых принцип Сен-Венана используется в его классической формулировке. Оно законно, если соответствующие им напряжения затухают при удалении от участка распределения поверхностных сил быстрее, чем состояния, определяемые действием момента этих сил.

Возвращаясь к задаче этого пункта, теперь следует признать, что решение (4.3.5) Карозерса — Инглиса применимо при $\alpha < \alpha_*$, тогда как при $\alpha > \alpha_*$ (и при $\alpha = \alpha_*$) сама постановка задачи о нагружении клина сосредоточенным в вершине моментом лишена смысла. Ее решение при $\alpha > \alpha_*$ зависит от закона

нагружения участков $(0, r_0)$ граней клина и не сводимо к действию момента.

4.4. Нагружение боковых граней. Вычисления с помощью формул (4.2.13) можно продолжать двумя путями — применением теоремы о вычетах и непосредственным вычислением входящих в них интегралов.

Первый способ требует знания корней функций (4.2.12), найденных решением уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \text{А} \quad \Delta_A(z) = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} + \frac{\sin z}{z} = 0, \\ \text{Б} \quad \Delta_B(z) = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{\sin z}{z} \end{array} \right\} \quad (z = 2(s+1)\alpha). \quad (4.4.1)$$

Корни z_k расположены симметрично в четырех квадрантах плоскости z :

$$z_k = \pm a_k \pm ib_k, \quad s_k + 1 = \frac{1}{2\alpha} (\pm a_k \pm ib_k). \quad (4.4.2)$$

В воспроизводимых здесь табличках приведены для нескольких значений α значения этих корней. Их асимптотические значения (при больших k) даются формулами

$$\left. \begin{array}{l} \text{А} \quad a_k \approx \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad b_k \approx \ln\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} a_k\right), \\ \text{Б} \quad a_k \approx \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad b_k \approx \ln\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} a_k\right). \end{array} \right\} \quad (4.4.3)$$

Общее представление формул (4.2.13) может быть записано в виде

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(s, \theta) \rho^{-s} ds, \quad (4.4.4)$$

причем $c = -1 - \varepsilon$, где ε достаточно мало. Применение теоремы о вычетах приводит к различным аналитическим представлениям решения $f(r, \theta)$ при $\rho < 1$ и $\rho > 1$. При $\rho < 1$, иначе говоря, в области, примыкающей к вершине клина, вычисление ведется по полюсам, расположенным слева от прямой $s = -1$:

$$s_k^- = -\left[1 + \frac{1}{2\alpha} (a_k \pm ib_k)\right], \quad (4.4.5)$$

тогда как продолжение решения в область $\rho > 1$, характеризующее поведение напряжений на бесконечности, строится по полюсам справа от этой прямой:

$$s_k^+ = -1 + \frac{1}{2\alpha} (a_k \pm ib_k). \quad (4.4.6)$$

Таблица 14

А. Корни $z_k = a_k + ib_k$ уравнения $\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} + \frac{\sin z}{z} = 0$

k	α							
	$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$	
	a_k	b_k	a_k	b_k	a_k	b_k	a_k	b_k
1	4,234	2,137	4,393	1,758	4,442	0,8501	2,645	0
2	10,72	2,996	10, 75	2,641	10,82	1,863	7,694	0,8702
3	17,08	3,445	17, 10	3,095	17,14	2,331	14,02	1,585
4	23,40	3,753	23, 42	3,404	23,45	2,646	20,32	1,976
5	29,71	3,951	29, 72	3,640	29,75	2,884	26,62	2,2553

Б. Корни $z_k = a_k + ib_k$ уравнения $\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{\sin z}{z} = 0$

k	α							
	$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$	
	a_k	b_k	a_k	b_k	a_k	b_k	a_k	b_k
1	0,7854	0	1,571	0	2,356	0	3,927	0
2	7,511	2,660	7,553	2,300	7,641	1,497	5,114	0
3	13,91	3,246	13,93	2,894	13,98	2,125	10,86	1,302
4	20,24	3,611	20,26	3,262	20,30	2,501	17,17	1,801
5	26,56	3,878	26,57	3,529	26,60	2,772	23,47	2,124

Примечание. Первому корню $a_1 = 2\alpha$, $b_1 = 0$ таблицы Б соответствует корень $s=0$ функции $G_2(s, \alpha)$. Корень $s = -1$, $z=0$ утерян при переходе к уравнениям в формуле (4.4.1).

Функции напряжений при $\rho < 1$ поэтому представляются рядами вида

$$f(r, \theta) = \sum_k \rho^{1 + \frac{a_k}{2\alpha}} \left[A_k(\theta) \rho^{i \frac{b_k}{2\alpha}} + \bar{A}_k(\theta) \rho^{-\frac{ib_k}{2\alpha}} \right], \quad (4.4.7)$$

и напряжения в вершине клина будут стремящимися к нулю или бесконечности в зависимости от знака неравенства

$$\frac{a_k}{2\alpha} - 1 \geq 0, \quad a_k \geq 2\alpha. \quad (4.4.8)$$

Исследование корней показывает, что при симметричном нагружении (уравнение $\Delta_A(z) = 0$) имеет место неравенство

с верхним знаком при $0 < 2\alpha < \pi$, тогда как при $\pi < 2\alpha < 2\pi$ имеется вещественный корень, меньший 2α . В кососимметричном случае (уравнение $\Delta_E(z) = 0$) перемена знака неравенства происходит при значении $2\alpha = 2\alpha_*$, определяемом по (4.2.19), — напряжения в вершине клина стремятся к нулю при $2\alpha < 2\alpha_*$ и к бесконечности при $2\alpha > 2\alpha_*$.

Например, в случае симметричного нагружения при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ имеем $a_1 = 4,303 > \frac{\pi}{2}$, тогда как при $\alpha = \frac{5\pi}{8}$ $a_1 = 2,645 < 1,25\pi$ — в первом примере напряжения в вершине клина отсутствуют, во втором — бесконечны. В случае кососимметричного нагружения при этих значениях α имеем соответственно $a_2 = 7,553 > \frac{\pi}{2}$, $a_2 = 5,114 > 1,25\pi$ — напряжения отсутствуют, тогда как при $\alpha_* < \alpha$ имеется корень $a_2 < 2\alpha$.

Поведение функций напряжений при $\rho > 1$ в соответствии с (4.4.6) представляется рядом вида

$$f(r, \theta) = \sum_k \rho^{1 - \frac{a_k}{2\alpha}} \left[B_k(\theta) \rho^{i \frac{b_k}{2\alpha}} + \bar{B}_k(\theta) \rho^{-i \frac{b_k}{2\alpha}} \right], \quad (4.4.9)$$

причем в числе этих корней имеется $z = a = 0$, а при кососимметричном нагружении и корень $a_1 = 2\alpha$; напряжения на бесконечности имеют порядок $\rho^{-\left(1 + \frac{a_k}{2\alpha}\right)}$. Главный член этих рядов при симметричном, равно как и при кососимметричном, нагружении обусловлен корнем $z = a$ ($s = -1$) — это решение (4.2.17), определяемое главным вектором поверхностных сил. При симметричном нагружении напряжения, находимые по следующим слагаемым ряда (4.4.9), затухают при $\rho \rightarrow \infty$ значительно быстрее, чем ρ^{-1} . При кососимметричном распределении поверхностных сил и равенстве нулю их главного вектора напряжения, обусловленные действием главного момента (корень a_1), имеют порядок ρ^{-2} , но при $\alpha > \alpha_*$ не этот член ряда является главным; на это уже указывалось в п. 4.2 [см. формулу (4.2.23)].

Дальнейшее рассмотрение проводится для случая симметричного нагружения равномерно распределенным по участкам $0 < r < r_0$, $\theta = \pm \alpha$ давлением p , так что по (4.2.11)

$$\left. \begin{aligned} q_1(\rho) &= -p_0 \delta_0(1 - \rho), \quad \delta_0(1 - \rho) = \begin{cases} 1, & 0 < \rho < 1, \\ 0, & \rho > 1, \end{cases} \\ \bar{q}_1(s) &= -p_0 \int_0^1 \rho^{s+1} ds = -\frac{p_0}{s+2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.10)$$

Возвращаясь к формуле (4.2.13А), получим следующее выражение нормального напряжения σ_r :

$$\sigma_r = -\frac{p_0}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \frac{(s+4) \sin s\alpha \cos(s+2)\theta - (s+2) \sin(s+2)\alpha \cos s\theta}{[(s+1) \sin 2\alpha + \sin 2(s+1)\alpha] (s+2)} \rho^{-2-s}. \quad (4.4.11)$$

Оно значительно упрощается при $\theta = \pm \alpha$: действительно, преобразовав числитель к виду

$$\begin{aligned} (s+4) \sin s\alpha \cos(s+2)\alpha - (s+2) \sin(s+2)\alpha \cos s\alpha = \\ = (s+1) \sin 2\alpha - 2(s+2) \sin 2\alpha + \sin 2(s+1)\alpha \end{aligned}$$

и сославшись на (4.4.10), получим

$$\sigma_r|_{\theta=\pm\alpha} = -p_0\delta_0(1-\rho) + \frac{p_0 \sin 2\alpha}{i\pi} \int_{-z-i\infty}^{-z+i\infty} \frac{\rho^{-\frac{z}{2\alpha}-1} dz}{z \sin 2\alpha + 2\alpha \sin z}, \quad (4.4.12)$$

причем путь интегрирования — прямая, параллельная мнимой оси плоскости $z = 2(s+1)\alpha$, проведенная слева от нее и сколь угодно к ней близко ($\varepsilon \rightarrow +0$).

При $\rho < 1$ интеграл равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов по полюсам

$$z_k = -a_k + ib_k, \quad \bar{z}_k = -a_k - ib_k \quad (a_k > 0)$$

в левой полуплоскости; поэтому

$$\sigma_r|_{\theta=\pm\alpha} = -p_0 + 2p_0 \sin 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\frac{a_k}{2\alpha}-1} \left[\frac{e^{\frac{ib_k}{2\alpha} \ln \rho}}{\sin 2\alpha + 2\alpha \cos z_k} + \frac{e^{-\frac{ib_k}{2\alpha} \ln \rho}}{\sin 2\alpha + 2\alpha \cos \bar{z}_k} \right]. \quad (4.4.13)$$

При $\rho > 1$ в число полюсов подынтегральной функции в правой полуплоскости z

$$z_k = a_k + ib_k, \quad \bar{z}_k = a_k - ib_k$$

включается полюс в нуле; сумма вычетов умножается на $-2\pi i$. Получаем

$$\begin{aligned} \rho > 1: \quad \sigma_r|_{\theta=\pm\alpha} = -\frac{2p_0 r_0}{r} \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + 2\alpha} - \\ - 2p_0 \sin 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-\left(\frac{a_k}{2\alpha}+1\right)} \left[\frac{e^{-i\frac{b_k}{2\alpha} \ln \rho}}{\sin 2\alpha + 2\alpha \cos z_k} + \frac{e^{i\frac{b_k}{2\alpha} \ln \rho}}{\sin 2\alpha + 2\alpha \cos \bar{z}_k} \right]. \quad (4.4.14) \end{aligned}$$

Ряды хорошо сходятся, так как числа a_k быстро возрастают с ростом номера k .

Интеграл в формуле (4.4.12) можно представить в вещественной форме, разбивая его на интегралы по мнимой оси от $-\infty$ до 0, по полуокружности радиуса $\varepsilon \rightarrow +0$ слева от начала координат и по мнимой оси от 0 до ∞ . Тогда

$$\sigma_r|_{\theta=\pm\alpha} = -p_0\delta_0(1-\rho) - \frac{r_0 p_0 \sin 2\alpha}{r} \left[\frac{1}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(u \ln \rho) du}{u \sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha u} \right]. \quad (4.4.15)$$

Интеграл вычисляется численно; возникающие при этом затруднения связаны с сильными колебаниями функции $\sin(u \ln \rho)$ при ρ , близких к нулю и очень больших.

§ 5. Краевые задачи плоской теории упругости

5.1. Классификация областей. Часть плоскости, занятая материалом, обозначается L , остальная — буквой R . Мы ограничиваемся рассмотрением случаев: а) односвязной конечной области, б) бесконечной области, снабженной отверстием, в) двусвязной кольцеобразной области. Границей области в первом случае служит несамопересекающийся замкнутый гладкий (не имеющий угловых точек) контур Γ ; во втором — к границе кроме такого же контура, ограничивающего L изнутри, причисляется бесконечно удаленная точка $z = \infty$; в третьем — граница Γ распадается на два контура — наружный Γ_0 и внутренний Γ_1 . При положительном направлении обхода по границе область L должна оставаться слева *); иными словами, обход конечной односвязной области совершается против часовой стрелки, контура отверстия — по часовой стрелке, двусвязной области — против часовой стрелки по Γ_0 и по часовой стрелке по Γ_1 . В соответствии с этим интеграл по контуру области в каждом из этих случаев представляется в виде:

$$\text{а) } \oint_{\Gamma}, \quad \text{б) } \oint_{\Gamma}, \quad \text{в) } \oint_{\Gamma} = \oint_{\Gamma_0} + \oint_{\Gamma_1}. \quad (5.1.1)$$

Рассматриваются две наиболее простых краевых задачи: определение напряженного состояния в L или по заданному на Γ вектору перемещения (первая), или по распределению поверхностных сил (вторая краевая задача). Решение их основывается на очевидной предпосылке, что напряжения в L и на Γ однозначны, равно как и перемещения при отсутствии дисторсий. Исключая точки приложения силовых особенностей, задающие их функции непрерывны и, как решения уравнений эллиптиче-

*) Предполагается, что поворот на 90° , совмещающий ось Ox с осью Oy , происходит против часовой стрелки.

ского типа, дифференцируемы любое число раз в открытой области L . Этим налагаются определенные требования на функции Мусхелишвили $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — они должны быть таковы, чтобы определяемые по ним напряжения и перемещения удовлетворяли перечисленным требованиям. В частности, в конечной и односвязной области функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ голоморфны. В двух других случаях оказывается возможным отделение в них вполне определенных условиями задачи логарифмических (неоднозначных) слагаемых от голоморфных в L частей $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$; решение сводится к разысканию этих частей.

5.2. Краевые задачи для односвязной конечной области. Пусть

$$z = \omega(\zeta) \quad (5.2.1)$$

— функция, осуществляющая конформное отображение единичного круга $|\zeta| < 1$ в область L ; через $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ обозначается значение ζ на окружности $|\zeta| = 1$, обозначаемой γ . Не нарушая общности, можно принять, что $\omega(0) = 0$ — центру круга соответствует начало координат $z = 0$ в области L . Существенно предположение

$$\omega'(\zeta) \neq 0, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (5.2.2)$$

обеспечивающее (при $|\zeta| < 1$) однозначную разрешимость в L равенства (5.2.1) относительно ζ . Выполнение условия (5.2.2) на γ обеспечивается отсутствием угловых точек на Γ — границе области L . Итак,

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n \quad (c_1 = \omega'(0) \neq 0), \quad (5.2.3)$$

причем можно считать c_1 вещественным числом. Обращая ряд (5.2.3), приходим к представлению $\zeta = \zeta(z)$ в форме степенного ряда, сходящегося в L .

Функции Н. И. Мусхелишвили $\varphi(z)$, $\psi(z)$, голоморфные в L , представляются в γ голоморфными функциями

$$\varphi(\omega(\zeta)) = \varphi_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n, \quad \psi(\omega(\zeta)) = \psi_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n \zeta^n. \quad (5.2.4)$$

Этим устанавливается представимость функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ сходящимися в L рядами по степеням z :

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^n. \quad (5.2.5)$$

Комплексное число, определяющее единичный вектор внешней к L нормали к Γ , обозначается

$$n = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha = \frac{dy}{ds} - i \frac{dx}{ds} = -i \frac{dz}{ds} = -i \omega'(\sigma) \frac{d\sigma}{ds}.$$

Вместе с тем на Γ

$$ds = |dz| = |\omega'(\sigma)| |d\sigma| = \sqrt{\omega'(\sigma) \bar{\omega}'(\bar{\sigma})} |d\sigma|,$$

и на γ

$$d\sigma = i\sigma d\theta, \quad |d\sigma| = d\theta, \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}. \quad (5.2.6)$$

Поэтому

$$n = -i \frac{dz}{ds} = \sigma \sqrt{\frac{\omega'(\sigma)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}}, \quad \bar{n} = i \frac{d\bar{z}}{ds} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)}}. \quad (5.2.7)$$

Функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ при преобразовании (5.2.1) приводятся к виду

$$\Phi(z) = \varphi'(z) = \frac{\varphi'_1(\xi)}{\omega'(\xi)}, \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \frac{\psi'_1(\xi)}{\omega'(\xi)}. \quad (5.2.8)$$

Вектор поверхностной силы F на Γ

$$F = F_x + iF_y = (F_n + iF_t)n, \quad F_n + iF_t = \bar{n}(F_x + iF_y), \quad (5.2.9)$$

где F_n , F_t — проекции F на нормаль и касательную к Γ , представим по (1.13.4) и (1.14.4) в виде

$$\left. \begin{aligned} F_x + iF_y &= \{[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})]n - [z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z})]\bar{n}\}_{\Gamma}, \\ F_n + iF_t &= \{\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - [z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z})]\bar{n}\}_{\Gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.10)$$

В частности, когда Γ — окружность, возвращаемся к формулам (1.14.9).

Главный вектор поверхностных сил на дуге l контура Γ дается формулой (1.14.7):

$$\begin{aligned} -Q + iP &= [\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})]_{\Gamma} = \\ &= \varphi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \bar{\varphi}'_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \bar{\psi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right), \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

причем левая ее часть определена до аддитивной постоянной. Другая запись условия на Γ во второй краевой задаче дается формулой (5.2.10):

$$\begin{aligned} F_n + iF_t &= \{\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - \bar{n}^2 [z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z})]\}_{\Gamma} = \\ &= \left\{ \frac{\varphi'_1(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \frac{\bar{\varphi}'_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)} - \frac{1}{\sigma^2 \omega'(\sigma)} \left[\frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \bar{\varphi}''_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \omega(\sigma) \frac{\bar{\omega}''\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\bar{\omega}'^2\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \bar{\varphi}'_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \bar{\psi}'_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Далее вводятся обозначения

$$\Phi(z) = \Phi_1(\xi) = \frac{\Phi'_1(\xi)}{\omega'(\xi)}, \quad \Psi(z) = \Psi_1(\xi) = \frac{\Psi'_1(\xi)}{\omega'(\xi)}. \quad (5.2.13)$$

По (5.2.2) эти функции голоморфны в γ . Очевидно, что

$$\Phi'(z) = \frac{\Phi'_1(\xi)}{\omega'(\xi)} = \frac{\Phi''_1(\xi)}{\omega'^2(\xi)} - \frac{\Phi'_1(\xi)}{\omega'^3(\xi)} \omega''(\xi), \quad (5.2.14)$$

и это позволяет переписать (5.2.12) в виде

$$F_n + iF_t = \Phi_1(\sigma) + \bar{\Phi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma^2 \omega'(\sigma)} \left[\omega(\sigma) \bar{\Phi}'_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \bar{\Psi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right]. \quad (5.2.15)$$

Условия на Γ первой краевой задачи записываются в виде

$$\begin{aligned} & [(3-4\nu)\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})]_{\Gamma} = \\ & = \left[(3-4\nu)\varphi_1(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \bar{\Phi}'_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \bar{\Psi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] = 2\mu(u + iv)_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

По (5.2.11)

$$2\mu(u + iv)_{\Gamma} + i(P + iQ)_{\Gamma} = 4(1 - \nu)\varphi(z)|_{\Gamma}, \quad (5.2.17)$$

так что, зная по решению первой (или второй) краевой задачи $\varphi(z)|_{\Gamma}$, сразу же по заданному на контуре вектору $u + iv$ (или $P + iQ$) находим $(P + iQ)_{\Gamma}$ (или $(u + iv)_{\Gamma}$).

По определению голоморфные в области функции однозначны в ней. Поэтому сама представимость решений краевых задач в односвязной конечной области через функции Мусхелишвили обуславливает однозначность напряжений и перемещений. Из формул (5.2.11) и (5.2.16) легко заключать, что следствием однозначности этих функций $[\varphi(z), \psi(z), \chi(z)]$ является обращение в нуль главного вектора и главного момента системы поверхностных сил на Γ (и на любом замкнутом контуре в L). Обратно, условие статической эквивалентности нулю этой системы сил гарантирует однозначность этих функций и, значит, существование решения.

5.3. Степень определенности функций Н. И. Мусхелишвили. Задание суммы нормальных напряжений определяет по (1.14.4) вещественную часть функции $\Phi(z)$; этим ее мнимая часть определяется с точностью до аддитивной постоянной C , а сама функция — до мнимой постоянной iC , а $\varphi(z)$ — до линейного по z слагаемого

$$iCz + \alpha + i\beta.$$

Вторая формула (1.14.4) определяет теперь $\Psi(z)$ полностью, а $\psi(z)$ по $\Psi(z)$ с точностью до постоянного слагаемого

$$\alpha' + i\beta'.$$

Итак, при заменах

$$\varphi(z) \text{ на } \varphi(z) + iCz + \alpha + i\beta, \quad \psi(z) \text{ на } \psi(z) + \alpha' + i\beta' \quad (5.3.1)$$

напряжения сохраняют свои значения, а вектор перемещения по (5.2.16) приобретает слагаемое

$$\frac{1}{2\mu} [4(1-\nu)Ciz + (3-4\nu)(\alpha + i\beta) - (\alpha' - i\beta')], \quad (5.3.2)$$

имеющее структуру перемещения твердой фигуры в ее плоскости. Итак, при решении второй краевой задачи можно, распорядившись выбором $C, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$, принять

$$\varphi(0) = 0, \quad \operatorname{Im} \varphi'(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad (5.3.3)$$

и этим функции $\varphi(z), \psi(z)$ определяются полностью.

Структура выражения (5.3.2) показывает, что при решении первой краевой задачи одна из функций $\varphi(z), \psi(z)$ может быть подчинена условию

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(0) = 0. \quad (5.3.4)$$

5.4. Бесконечная область с отверстием. Конформное преобразование внешности единичного круга (область $|\xi| > 1$) на область L — бесконечную плоскость, ограниченную изнутри замкнутым гладким контуром Γ , задается функцией

$$z = \omega(\xi) = c_0\xi + \frac{c_1}{\xi} + \frac{c_2}{\xi^2} + \dots, \quad (5.4.1)$$

причем бесконечно удаленная точка плоскости ξ отображается в бесконечно удаленную точку на плоскости z . Предполагается выполненным условие

$$\omega'(\xi) \neq 0, \quad |\xi| \geq 1, \quad (5.4.2)$$

гарантирующее однозначную разрешимость уравнения (5.4.1) относительно ξ ; c_0 можно считать вещественным.

Сославшись на (3.1.8), введем в рассмотрение функции

$$\varphi_0(z) = -\frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \ln z, \quad \psi_0(z) = (3-4\nu) \frac{X-iY}{8\pi(1-\nu)} \ln z, \quad (5.4.3)$$

которыми определяется напряженное состояние в бесконечной плоскости, когда в ее начале координат $z = 0$ (в точке, не принадлежащей рассматриваемой здесь области L) приложена сила $X + iY$. Очевидно, что этой силе будет равен главный вектор внешних сил на любом замкнутом контуре, содержащим внутри

точку $z = 0$, в частности, на контуре отверстия Γ . Напомним еще, что вычисляемый по функциям $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ вектор перемещения однозначен.

Итак, введя в рассмотрение однозначные в L функции $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ и полагая

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_*(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_*(z), \quad (5.4.4)$$

следует записать условие на Γ второй краевой задачи, сославшись на формулу (5.2.11), в виде

$$i[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})]_{\Gamma} = P_* + iQ_*, \quad (5.4.5)$$

где $P_* + iQ_*$ — главный вектор распределенных по дуге l контура поверхностных (внешних) сил. Изменение знака обусловлено тем, что в упомянутой формуле через $P + iQ$ обозначался главный вектор распределенных по дуге l напряжений, создаваемых упругой средой, расположенной со стороны вектора внешней к контуру Γ нормали n , тогда как внешняя к области L нормаль n_* направлена противоположно n .

Другой формой записи условия (5.4.5) служит

$$\begin{aligned} & \varphi_*(z) + z\bar{\varphi}'_*(\bar{z}) + \bar{\psi}_*(\bar{z}) = \\ & = Q_* - iP_* + \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ (X + iY) [\ln z - (3-4\nu)\ln \bar{z}] + (X - iY) \frac{z}{\bar{z}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Задача сведена к определению однозначных в L функций $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$; она требует задания условий на бесконечности. Из структуры формул Колосова — Мусхелишвили (1.14.4) следует, что напряжения, вычисляемые по $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, на бесконечности равны нулю, так что здесь речь идет о функциях $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$. Нетрудно заключить из тех же формул, что сохранение в представлениях этих функций положительных степеней z до z^n включительно привело бы к напряжениям, возрастающим на бесконечности, как $|z|^{n-1}$. Поэтому представлениям вида

$$\left. \begin{aligned} \varphi_*(z) &= a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)z + \frac{1}{2}(a_2 + ib_2)z^2 + \varphi_{**}(z) \\ \psi_*(z) &= a'_0 + ib'_0 + (a'_1 + ib'_1)z + \frac{1}{2}(a'_2 + ib'_2)z^2 + \psi_{**}(z), \end{aligned} \right\} \quad (5.4.7)$$

где $\varphi_{**}(z)$, $\psi_{**}(z)$ голоморфны и обращаются в нуль на бесконечности:

$$\varphi_{**}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k + i\beta_k}{z^k}, \quad \psi_{**}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha'_k + i\beta'_k}{z^k}, \quad (5.4.8)$$

соответствуют на бесконечности линейно зависящие от x, y напряжения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) &= 2a_1 + (a_2 + ib_2)z + (a_2 - ib_2)\bar{z}, \\ \frac{1}{2}(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + 2i\tau_{xy}^\infty) &= (a_2 + ib_2)\bar{z} + a'_1 + ib'_1 + (a'_2 + ib'_2)z \end{aligned} \right\} \quad (5.4.9)$$

и вектор перемещения

$$\begin{aligned} 2\mu(u^\infty + iv^\infty) &= 2(1 - 2\nu)a_1z - (a'_1 - ib'_1)\bar{z} - (a_2 - ib_2)z\bar{z} + \\ &+ \frac{1}{2}(3 - 4\nu)(a_2 + ib_2)z^2 - \frac{1}{2}(a'_2 - ib'_2)\bar{z}^2 + \\ &+ [4(1 - \nu)ib_1z + (3 - 4\nu)(a_0 + ib_0) - (a'_0 - ib'_0)]. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Следуя сказанному в п. 5.3, полагаем здесь

$$a_0 + ib_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad a'_0 + ib'_0 = 0, \quad (5.4.11)$$

что не влияет на напряжения и исключает из (5.4.10) плоское перемещение твердой фигуры.

Приведенным выражениям соответствует линейное по x, y напряженное состояние на бесконечности; в последующих записях ограничимся предположением, что оно однородно на бесконечности; тогда

$$a_2 + ib_2 = 0, \quad a'_2 + ib'_2 = 0,$$

а остающиеся коэффициенты a_1, a'_1, b'_1 могут быть выражены через главные напряжения на бесконечности $\sigma_1^\infty, \sigma_2^\infty$ и угол первой главной оси тензора \hat{T}^∞ с осью Ox . Имеем по (5.4.9)

$$\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty = 4a_1, \quad \sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty = (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + 2i\tau_{xy}^\infty)e^{2i\alpha} = 2(a'_1 + ib'_1)e^{2i\alpha} \quad (5.4.12)$$

и, вернувшись к (5.4.7), получаем

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{4}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty)z + \Phi_{**}(z), \quad \Psi_*(z) = \frac{1}{2}(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)e^{-2i\alpha}z + \Psi_{**}(z). \quad (5.4.13)$$

Отметим еще, что постоянную b_1 можно по (1.14.10) выразить через поворот на бесконечности:

$$b_1 = \frac{\mu}{2(1 - \nu)}\epsilon^\infty. \quad (5.4.14)$$

Функции $\Phi(z), \Psi(z)$ однозначны в L , их выражения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{4}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) + \frac{i\mu\epsilon^\infty}{2(1 - \nu)} - \frac{X + iY}{8\pi(1 - \nu)}\frac{1}{z} + \Phi_{**}(z), \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2}(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)e^{-2i\alpha} + (3 - 4\nu)\frac{X - iY}{8\pi(1 - \nu)}\frac{1}{z} + \Psi_{**}(z), \end{aligned} \right\} \quad (5.4.15)$$

причем разложения $\Phi_{..}(z), \Psi_{..}(z)$ начинаются со слагаемых z^{-2} .

Отметим, что мнимая часть коэффициента при z^{-2} в выражении $\Psi_{..}(z)$ определяется согласно (3.1.14) заданием главного момента внешних сил на Γ . Условие на Γ в форме, аналогичной (5.2.10), записывается через функции Φ, Ψ в виде

$$F_x + iF_y = \{[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})] n_* - [z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z})] \bar{n}_*\}_{\Gamma}, \quad (5.4.16)$$

причем n_* — вектор нормали, внешней к L (внутрь отверстия), а $F_x + iF_y$ — распределенные по Γ поверхностные силы. В частном случае свободного от нагружения контура отверстия и однородного напряженного состояния на бесконечности краевые условия в форме (5.4.6) или (5.4.16) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{..}(z) + z\bar{\Phi}'_{..}(\bar{z}) + \bar{\Psi}_{..}(\bar{z}) = \\ = - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty)z + \frac{1}{2}(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)\bar{z}e^{2ia} \right], \\ \Phi_{..}(z) + \bar{\Phi}_{..}(\bar{z}) + \frac{d\bar{z}}{dz} [z\bar{\Phi}'_{..}(\bar{z}) + \bar{\Psi}_{..}(z)] = \\ = - \frac{1}{2} \left[(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) + (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) \frac{d\bar{z}}{dz} e^{2ia} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.17)$$

Решению так поставленной краевой задачи, связанной с определением концентрации напряжений в окрестности отверстия, посвящена очень большая литература. См. пп. 8.1—8.3 этой главы.

Выражение вектора перемещения записывается в виде

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) = & [(3 - 4\nu)\Phi_{..}(z) - z\bar{\Phi}'_{..}(\bar{z}) - \bar{\Psi}_{..}(\bar{z})] + 2\mu iz e^\infty + \\ & + \frac{1}{2} [(1 - 2\nu)(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty)z - (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)\bar{z}e^{2ia}] - \\ & - \frac{3 - 4\nu}{8\pi(1 - \nu)}(X + iY) \ln z\bar{z} + \frac{X - iY}{8\pi(1 - \nu)} \frac{z}{\bar{z}}, \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

и этим равенством представляется на Γ условие первой краевой задачи. Задания на Γ только вектора перемещения недостаточно, требуется задать также и главный вектор поверхностных сил на Γ . Требование исчезновения перемещений на бесконечности, которое могло быть поставлено в пространственной задаче при отсутствии на бесконечности напряжений (см., например, п. 3.5 гл. IV), выполнимо лишь при $X + iY = 0$.

Заметим еще, что, введя с помощью формул, аналогичных (5.2.8), (5.2.13), функции $\varphi_1(\zeta), \psi_1(\zeta), \Phi_1(\zeta), \Psi_1(\zeta)$, придем к рассмотрению краевых задач на окружности отверстия γ ; они сведутся к разысканию голоморфных на бесконечности функций $\varphi_{1..}(\zeta), \psi_{1..}(\zeta)$; при переходе к переменной ζ возможна замена $\ln z$ на $\ln \zeta$, так как второе слагаемое в равенстве

$$\ln z = \ln \zeta + \ln \left(c_0 + \frac{c_1}{\zeta^2} + \frac{c_2}{\zeta^3} + \dots \right)$$

может быть отнесено к голоморфной на бесконечности части функций $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$.

5.5. Двусвязная область. Дисторсия. В случае двусвязной области, ограниченной изнутри контуром Γ_1 , а извне Γ_0 , каждую из функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ можно представить в форме суммы

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \quad \psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z),$$

где $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ голоморфны в конечной области, ограниченной извне контуром Γ_0 , а $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ представляются выражениями

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= -\frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \ln z + \varphi_{2*}(z), \\ \psi_2(z) &= \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)} (X-iY) \ln z + \psi_{2*}(z), \end{aligned}$$

в которых $\varphi_{2*}(z)$, $\psi_{2*}(z)$ голоморфны вне Γ_1 ; $X+iY$ — главный вектор поверхностных сил на Γ_1 . Таким образом, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ представимы в виде

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \ln z + \varphi_*(z), \quad \psi(z) = \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)} (X-iY) \ln z + \psi_*(z), \quad (5.5.1)$$

причем разложения $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ содержат положительные и отрицательные степени z :

$$\varphi_*(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k) z^k, \quad \psi_*(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha'_k + i\beta'_k) z^k. \quad (5.5.2)$$

Краевые условия задаются на Γ_0 , Γ_1 ; нет нужды после сказанного в пп. 5.4, 5.2 повторять формы их записей.

При разыскании напряженного состояния в двусвязной области, подвергнутой дисторсии, при отсутствии нагружения функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ должны быть определены условиями

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Gamma_* [\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\psi}(\bar{z})] &= 0, \\ 2\mu \Delta \Gamma_* (u + iv) = \Delta \Gamma_* [(3-4\nu)\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z})] &= \\ &= 2\mu [(c_1 + ic_2) + ib_3 z]. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.3)$$

Первое выражает обращение в нуль главного вектора напряжений на любом замкнутом контуре Γ_* , не сводимом в L непрерывным преобразованием в точку. Второе определяет разрыв вектора перемещения, задаваемый постоянными c_1 , c_2 , b_3 поступательной и вращательной дисторсий (п. 2.4 гл. II).

Можно удовлетворить этим условиям, приняв

$$\varphi(z) = Az \ln z + (\gamma + i\delta) \ln z + \varphi_*(z), \quad \psi(z) = (\gamma' + i\delta') \ln z + \psi_*(z), \quad (5.5.4)$$

причем $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ однозначны в L и, следовательно, представимы в форме (5.5.2). Действительно, тогда

$$\Delta_{\Gamma_*} \varphi(z) = 2\pi i [zA + (\gamma + i\delta)], \quad \Delta_{\Gamma_*} z\bar{\varphi}'(\bar{z}) = -2\pi i z\bar{A}, \\ \Delta_{\Gamma_*} \bar{\psi}(\bar{z}) = -2\pi i (\gamma' - i\delta')$$

и условия (5.5.3) приводят к уравнениям

$$z(A - \bar{A}) + (\gamma + i\delta) - (\gamma' - i\delta') = 0;$$

$$2\pi i [(3 - 4\nu)(zA + \gamma + i\delta) + z\bar{A} + \gamma' - i\delta'] = 2\mu(c + ic_2 + ib_3z).$$

Из них следует

$$A = \bar{A}, \quad \operatorname{Im} A = 0; \quad \gamma + i\delta = \gamma' - i\delta';$$

$$4\pi(1 - \nu)A = \mu b_3, \quad 4\pi(1 - \nu)(\gamma + i\delta) = -\mu i(c_1 + ic_2),$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{\mu b_3}{4\pi(1 - \nu)} z \ln z - \frac{\mu i(c_1 + ic_2)}{4\pi(1 - \nu)} \ln z + \varphi_*(z), \\ \psi(z) &= \frac{\mu i(c_1 - ic_2)}{4\pi(1 - \nu)} \ln z + \psi_*(z). \end{aligned} \right\} \quad (5.5.5)$$

Функции $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ определяются по краевым условиям отсутствия поверхностных сил на Γ_0 , Γ_1 .

5.6. Представление функций напряжений в двусвязной области (Мичелл). В общем случае — наличие дисторсии и нагружений по контурам Γ_0 , Γ_1 — функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ в двусвязной области представляются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{\mu b_3}{4\pi(1 - \nu)} z \ln z - \\ &\quad - \frac{1}{8\pi(1 - \nu)} [(X + iY) + 2i\mu(c_1 + ic_2)] \ln z + \varphi_*(z), \\ \psi(z) &= \frac{1}{8\pi(1 - \nu)} [(3 - 4\nu)(X - iY) + 2i\mu(c_1 - ic_2)] \ln z + \psi_*(z), \end{aligned} \right\} \quad (5.6.1)$$

причем $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ даются представлениями (5.5.2); по (1.14.3) имеем

$$\chi(z) = \frac{1}{8\pi(1 - \nu)} [(3 - 4\nu)(X - iY) + 2i\mu(c_1 - ic_2)] z \ln z + \\ + (\alpha'_{-1} + i\beta'_{-1}) \ln z + \chi_*(z), \quad (5.6.2)$$

где $\chi_*(z)$ голоморфна в L и определена с точностью до аддитивной постоянной $\alpha + i\beta$. Образовав теперь по (1.14.2) функцию напряжений Эри, придем к ее представлению

$$U = \frac{\theta}{2\pi} (xY - yX - 2\pi\beta'_{-1}) + \left[\frac{\mu b_3}{4\pi(1 - \nu)} r^2 + \frac{\mu(c_2x - c_1y)}{2\pi(1 - \nu)} + \alpha'_{-1} \right] \ln r + \\ + \frac{1 - 2\nu}{4\pi(1 - \nu)} (xX + yY) \ln r + U_*(r, \theta), \quad (5.6.3)$$

где $U_*(r, \theta)$ определяется однозначными частями функций $\varphi(z)$, $\chi(z)$:

$$\begin{aligned} U_*(r, \theta) = & \alpha + \alpha_0 x + \beta_0 y + \alpha_1 r^2 + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k (\alpha_{k+1} \cos k\theta - \beta_{k+1} \sin k\theta) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} [\alpha_{-(k+1)} \cos (k+2)\theta + \beta_{-(k+1)} \sin (k+2)\theta] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} (\alpha'_{k-1} \cos k\theta - \beta'_{k-1} \sin k\theta) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kr^k} (\alpha'_{-(k+1)} \cos k\theta + \beta'_{-(k+1)} \sin k\theta). \quad (5.6.4) \end{aligned}$$

По (5.6.3), (3.1.14)

$$\Delta_{\Gamma_*} U = xY - yX - 2\pi\beta'_{-1} = -M^0 + xY - yX, \quad \beta'_{-1} = \frac{M^0}{2\pi}, \quad (5.6.5)$$

где M^0 — главный момент относительно начала координат внешних поверхностных сил на контуре Γ_1 , ограничивающем область L изнутри.

Линейные по x , y слагаемые функции напряжений, не влияющие на напряжения и вносящие в выражение вектора перемещения постоянное слагаемое, определяются членами

$$\alpha + (\alpha_0 + \alpha'_0)x + (\beta_0 - \beta'_0)y. \quad (5.6.6)$$

Отбросив их, получим в измененных обозначениях форму Мицелла функции напряжений Эри

$$\begin{aligned} U = & \frac{\theta}{2\pi} (xY - yX - M^0) + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} (xX + yY) \ln r + \\ & + \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{2} b_3 r^2 + c_2 x - c_1 y \right) \ln r + \alpha_1 r^2 + \alpha'_{-1} \ln r + \\ & + r^3 (C_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} r^n [(a_n + C_n r^2) \cos n\theta + \\ & + (b_n + S_n r^2) \sin n\theta] + \frac{1}{r} (a'_1 \cos \theta + b'_1 \sin \theta) + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} [(a'_n + C'_n r^2) \cos n\theta + (b'_n + S'_n r^2) \sin n\theta]. \quad (5.6.7) \end{aligned}$$

5.7. Тепловые напряжения. Плоская деформация. Предполагается независимость температуры $\theta(x, y)$ от координаты x_3 . Тогда, рассматривая случай плоской деформации ($\epsilon_3 = 0$) и обратившись к закону Гука в форме (1.14.2) гл. IV, имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + 2\mu\alpha\theta &= 0, \\ \sigma_z &= \nu (\sigma_x + \sigma_y) - 2\mu (1+\nu) \theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.1)$$

Поэтому

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (1+\nu) (\sigma_1 - 2\mu\alpha\theta), \quad \sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y \quad (5.7.2)$$

и выражения отличных от нуля компонент тензора деформации представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} 2\mu\epsilon_x &= \sigma_x - \nu\sigma_1 + 2\mu (1+\nu) \alpha\theta, \\ 2\mu\epsilon_y &= \sigma_y - \nu\sigma_1 + 2\mu (1+\nu) \alpha\theta, \quad \mu\gamma_{xy} = \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (5.7.3)$$

и, конечно, сохраняются статические соотношения (1.2.2), выражающие напряжения через функцию напряжений Эри, а следовательно, и формулы Колосова (1.13.2). Однако сама функция напряжений уже не является в общем случае бигармонической, поэтому не имеет места ее представление в форме Гурса; в соотношения Колосова — Мусхелишвили п. 1.14 должно быть внесено дополнительное слагаемое.

Обратившись теперь к зависимостям Бельтрами (1.14.13) гл. IV и учитывая (5.7.2), имеем

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} &= -2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \theta, \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y^2} &= -2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \theta, \quad \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x \partial y} = 0, \\ \nu \nabla^2 \sigma_1 - 2\mu\alpha (1+\nu) \nabla^2 \theta &= -2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.4)$$

Последнее равенство при замене σ_1 на $\nabla^2 U$ записывается в виде

$$\nabla^2 \nabla^2 U = -2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \theta, \quad (5.7.5)$$

и нетрудно проверить, что при этом выполняются и остающиеся зависимости (5.7.4). По (5.7.5) имеем

$$\nabla^2 U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = -2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \theta + s(x, y), \quad \nabla^2 s = 0,$$

причем в правую часть аддитивно входит гармоническая функция s . В соответствии с п. 1.14 она обозначается

$$s = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z) = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})].$$

Итак,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2} [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] - \frac{1}{2} \mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \theta(z, \bar{z}). \quad (5.7.6)$$

Приходим к такому представлению функции напряжений:

$$U = \frac{1}{2} [\bar{z}\Phi(z) + z\bar{\Phi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})] - \frac{1}{2}\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \int^z d\zeta \int^{\bar{z}} \theta(\zeta, \bar{\xi}) d\bar{\xi}, \quad (5.7.7)$$

причем неопределенному интегралу справа можно приписать какое-либо одно из возможных определений. Формулы Колосова — Мусхелишвили (1.14.4) теперь приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})] - 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \theta, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] - 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \int^z \frac{\partial\theta(z, \bar{\xi})}{\partial z} d\bar{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.8)$$

Первую формулу (5.7.3) можно представить теперь в виде

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= -\sigma_y + (1-\nu)\sigma_1 + 2\mu(1+\nu)\alpha\theta = \\ &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2(1-\nu)[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \theta] + 2\mu\alpha(1+\nu)\alpha\theta = \\ &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2(1-\nu)[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})]. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуется вторая; итак,

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2(1-\nu)[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})], \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2(1-\nu)[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})]. \end{aligned}$$

Вместе с тем, сославшись на правила дифференцирования (1.12.3), имеем

$$\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z}) = \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})] = -i \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z})],$$

и можно принять

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u &= -\frac{\partial U}{\partial x} + 2(1-\nu)[\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})], \\ 2\mu v &= -\frac{\partial U}{\partial y} - 2i(1-\nu)[\varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z})] \end{aligned} \right\} \quad (5.7.9)$$

и, далее,

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) &= -2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + 4(1-\nu)\varphi(z) = \\ &= (3 - 4\nu)\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(\bar{z}) + \mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \int^z \theta(\zeta, \bar{z}) d\zeta. \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

Нетрудно проверить, что выполнено также и третье соотношение (5.7.3); по (5.7.9) имеем

$$2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ = -2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})] - i \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z})] \right\},$$

причем величина в скобках — тождественный нуль, что и требуется. Конечно, формула (5.7.10) определяет вектор перемещения с точностью до плоского перемещения твердой фигуры.

5.8. Плоское напряженное состояние. По определению (1.4.1) этого состояния

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (5.8.1)$$

и задача осложняется зависимостью напряжений, перемещений и температуры от x_3 . Как и ранее, лапласиан по двум переменным обозначается ∇^2 , по трем

$$\nabla_3^2 = \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Выражения напряжений (1.2.2) через функцию напряжений, конечно, сохраняются, но последняя теперь зависит и от x_3 . При учете этого зависимости Бельтрами (1.14.13) гл. IV с температурными слагаемыми записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_3^2 \partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \nabla^2 U}{\partial x^2} &= -2\mu\alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla_3^2 \theta \right), \\ \nabla^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_3^2 \partial x^2} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \nabla^2 U}{\partial y^2} &= -2\mu\alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla_3^2 \theta \right), \\ \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \nabla^2 U}{\partial x_3^2} &= -2\mu\alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla_3^2 \theta \right) = \\ &= -2\mu\alpha \left(\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \theta \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-\nabla_3^2 U + \frac{\nabla^2 U}{1+\nu} + 2\mu\alpha \theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_3} [\nabla^2 U + 2\mu\alpha (1+\nu) \theta] &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x_3} [\nabla^2 U + 2\mu\alpha (1+\nu) \theta] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8.2)$$

Складывая две первых и используя третью, приходим к не содержащему производных по x_3 соотношению

$$\nabla^2 \nabla^2 U + 2\mu\alpha(1+\nu)\nabla^2 \theta = 0, \quad (5.8.3)$$

позволяющему представить $\nabla^2 U$ в виде

$$\nabla^2 U = -2\mu\alpha(1+\nu)\theta + s(x, y), \quad \nabla^2 s = 0, \quad s = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})], \quad (5.8.4)$$

причем выполняются пятая и шестая зависимости (5.8.2), а третья может быть приведена к виду

$$\nabla_3^2 \theta = 0 \quad (5.8.5)$$

— плоское напряженное состояние осуществимо в условиях стационарного поля температуры.

Теперь остающиеся (первая, вторая, четвертая) зависимости Бельтрами приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\nabla_3^2 U - \frac{s(x, y)}{1+\nu} \right) &= 0, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\nabla_3^2 U - \frac{s(x, y)}{1+\nu} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\nabla_3^2 U - \frac{s(x, y)}{1+\nu} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8.6)$$

Это позволяет считать U решением пространственного уравнения Пуассона

$$\nabla_3^2 U(x, y; x_3) = \frac{s(x, y)}{1+\nu}. \quad (5.8.7)$$

Перемещения определяются из уравнений обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma + 2\mu\alpha\theta, & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= \sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma + 2\mu\alpha\theta, \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \tau_{xy} & (\sigma &= \sigma_x + \sigma_y). \end{aligned}$$

Из них, повторив преобразование п. 5.7, получим

$$2\mu(u + iv) = -2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{4}{1+\nu} \varphi(z). \quad (5.8.8)$$

Для определения перемещения w исходим из равенств, являющихся очевидным следствием (5.8.1)

$$2\mu \frac{\partial w}{\partial x_3} = -\frac{\nu}{1+\nu} \sigma + 2\mu\alpha\theta, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x_3}$$

и приводимых с помощью (5.8.4), (5.8.7), (5.8.8) к виду

$$2\mu \frac{\partial w}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}, \quad 2\mu \frac{\partial w}{\partial \bar{z} \partial x_3} = \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z} \partial x_3}.$$

Итак,

$$2\mu\omega = \frac{\partial U}{\partial x_3}. \quad (5.8.9)$$

В обобщенном плоском напряженном состоянии, приближенно реализуемом в тонкой пластинке, рассматриваются средние значения напряжений, функции напряжений и перемещений. Сохранив для средних значений принятые выше обозначения, перейдем от уравнения (5.8.4) к соотношению, аналогичному (5.7.7):

$$U = \frac{1}{2} \left[\bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) - \mu\alpha(1+\nu) \int^z d\xi \int^{\bar{z}} \theta(\xi, \bar{\xi}) d\bar{\xi} \right]. \quad (5.8.10)$$

Соответствующие замены в формулах (5.7.8) для напряжений также сведутся к замене

$$\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad \text{на} \quad \alpha(1+\nu). \quad (5.8.11)$$

Вектор перемещения дается теперь равенством

$$2\mu(u + iv) = \frac{3-\nu}{1+\nu} \varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\varphi}(\bar{z}) + \mu\alpha(1+\nu) \int^z \theta(\xi, \bar{z}) d\xi, \quad (5.8.12)$$

отличающимся от (5.7.10), кроме замены (5.8.11), также заменой (1.6.5)

$$\nu \quad \text{на} \quad \frac{\nu}{1+\nu}. \quad (5.8.13)$$

5.9. Стационарное распределение температуры. Температура в стационарном тепловом режиме при плоской деформации (средняя температура в обобщенном плоском напряженном состоянии) задается гармонической функцией координат

$$\nabla^2 \theta = 4 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \bar{z}} = 0. \quad (5.9.1)$$

При этом условии функция напряжений по (5.7.6) и (5.8.4) является бигармонической, а ее лапласиан — гармонической функцией.

Будучи гармонической однозначной функцией, температура предстает в двусвязной области L выражением

$$\begin{aligned} \theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\theta_n \cos n\theta + g_n \sin n\theta) + \theta'_0 \ln r + \frac{1}{r} (\theta'_1 \cos \theta + g'_1 \sin \theta) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} (\theta'_n \cos n\theta + g'_n \sin n\theta). \end{aligned} \quad (5.9.2)$$

Функция комплексного переменного, для которой θ является вещественной частью, обозначаемая $\Theta'(z)$, определяется равенством

$$\Theta'(z) = \theta + ig = \sum_{n=0}^{\infty} (\theta_n - ig_n) z^n + \theta'_0 \ln z + (\theta'_1 + ig'_1) \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\theta'_n + ig'_n}{z^n}, \quad (5.9.3)$$

так что

$$\Theta(z) = \theta'_0 z \ln z + (\theta'_1 + ig'_1) \ln z + \Theta_*(z). \quad (5.9.4)$$

Здесь и далее звездочкой обозначается однозначная (голоморфная) часть функции комплексного переменного*).

В последующих записях имеется в виду плоская деформация. Представив θ в виде

$$\theta = \frac{1}{2} [\Theta'(z) + \bar{\Theta}'(\bar{z})], \quad (5.9.5)$$

приходим по (5.7.7), (5.7.8), (5.7.10) к формулам

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{z}\Phi(z) + z\bar{\Phi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) - \frac{1}{2} \mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} [\bar{z}\Theta(z) + z\bar{\Theta}(\bar{z})] \right\}, \\ \sigma_x + \sigma_y &= 2 \left\{ \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - \frac{1}{2} \mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} [\Theta'(z) + \bar{\Theta}'(\bar{z})] \right\}, \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 \left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) - \frac{1}{2} \mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{z}\Theta''(z) \right], \\ 2\mu(u+iv) &= (3-4\nu)\Phi(z) - z\bar{\Phi}'(\bar{z}) - \bar{\Psi}(\bar{z}) + \frac{1}{2} \mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} [\Theta(z) - z\bar{\Theta}'(\bar{z})]. \end{aligned} \right\} \quad (5.9.6)$$

Сразу же становится очевидной целесообразность рассмотрения функции

$$\varphi_0(z) = \Phi(z) - \frac{1}{2} \mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \Theta(z), \quad (5.9.7)$$

с помощью которой эта система соотношений может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} [\bar{z}\varphi_0(z) + z\bar{\varphi}_0(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z})], \\ \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\Phi_0(z) + \bar{\Phi}_0(\bar{z})], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 [\bar{z}\Phi'_0(z) + \Psi(z)], \end{aligned} \right\} \quad (5.9.8)$$

$$2\mu(u+iv) = (3-4\nu)\varphi_0(z) - z\bar{\varphi}'_0(\bar{z}) - \bar{\Psi}(\bar{z}) + 2\mu\alpha(1+\nu)\Theta(z). \quad (5.9.9)$$

При этих обозначениях выражение главного вектора напряжений на любой дуге l в L -области по (1.14.7) дается формулой

$$-Q + iP = \varphi_0(z) + z\bar{\varphi}'_0(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}), \quad (5.9.10)$$

) Слагаемое $-\theta'_0 z$ включено в $\Theta_(z)$.

и при свободном от нагружения контуре Γ краевое условие на нем однородно

$$[\varphi_0(z) + z\bar{\varphi}'_0(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z})]_{\Gamma} = 0. \quad (5.9.11)$$

Поэтому, если функция $\Theta(z)$ однозначна:

$$\theta'_0 = 0, \quad \theta'_1 = 0, \quad g'_1 = 0, \quad (5.9.12)$$

что во всяком случае гарантировано, когда L — односвязная конечная область и при отсутствии в ней тепловых источников, то решением задачи служит

$$\varphi_0(z) = 0, \quad \psi(z) = 0. \quad (5.9.13)$$

При этом по (5.9.8) отсутствуют напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} :

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (5.9.14)$$

а однозначный вектор перемещения по (5.9.9) оказывается равным

$$u + iv = (1 + \nu)\alpha\Theta(z). \quad (5.9.15)$$

Напряжение σ_z определяется из обобщенного закона Гука условием $\epsilon_z = 0$:

$$\sigma_z = -2\mu(1 + \nu)\alpha\theta = -E\alpha\theta. \quad (5.9.16)$$

Рассмотрим теперь случай свободной от нагружения двусвязной области, когда условия (5.9.12) не соблюдены; тогда нулевое решение (5.9.13) непригодно, так как соответствующий ему вектор перемещения не был бы однозначен. Требование его однозначности и статическое условие обращения в нуль главного вектора напряжений на любом не сводимом непрерывным преобразованием в точку контуре Γ_* в L приводят к рассмотрению в точности тех же соотношений, которые были использованы в п. 5.5 при установлении характера неоднозначности функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, определяемых дисторсиями. Здесь постоянные дисторсии равны по величине и противоположны по знаку постоянным, определяющим характер многозначности функции в правой части (5.9.15). Сославшись на (5.5.3) и (5.9.4), имеем

$$c_1 + ic_2 + ib_3 z = -(1 + \nu)\alpha\Lambda_{\Gamma_*}\Theta(z) = -2\pi i\alpha(1 + \nu)(\theta'_0 z + \theta'_1 + ig'_1), \quad (5.9.17)$$

так что

$$c_1 + ic_2 = 2\pi\alpha(1 + \nu)(g'_1 - i\theta'_1), \quad b_3 = -2\pi\alpha(1 + \nu)\theta'_0. \quad (5.9.18)$$

По (5.5.5) имеем теперь

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(z) &= -\frac{1}{2}\mu\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}[\theta'_0 z \ln z + (\theta'_1 + ig'_1) \ln z] + \varphi_{0*}(z), \\ \psi(z) &= -\frac{1}{2}\mu\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}(\theta'_1 - ig'_1) \ln z + \psi_*(z). \end{aligned} \right\} \quad (5.9.19)$$

Вторая краевая задача при ненагруженном контуре сводится теперь к разысканию голоморфных (значит, однозначных) в L функций по условиям на Γ_0 и Γ_1 :

$$\begin{aligned} \varphi_{0*}(z) + z\bar{\varphi}'_{0*}(\bar{z}) + \bar{\psi}_*(\bar{z}) = \\ = \frac{1}{2}\mu\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[2(\theta'_0 z + \theta'_1 + ig'_1)\ln r + \theta'_0 z + (\theta'_1 - ig'_1)\frac{z}{\bar{z}}\right], \end{aligned} \quad (5.9.20)$$

причем $r = |z|$.

Разыскание температурных напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} требует знания лишь логарифмического слагаемого и слагаемого, пропорционального r^{-1} , в выражении температуры (5.9.2). Задание температуры используется при разыскании вектора перемещения и напряжения σ_z ; по (5.9.9) имеем

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) = (3 - 4\nu)\varphi_{0*}(z) - z\bar{\varphi}'_{0*}(\bar{z}) - \bar{\psi}_*(\bar{z}) + 2\mu\alpha(1 + \nu)\Theta_*(z) + \\ + \frac{1}{2}\mu\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[2(\theta'_0 z + \theta'_1 + ig'_1)\ln r + \theta'_0 z + (\theta'_1 - ig'_1)\frac{z}{\bar{z}}\right], \end{aligned} \quad (5.9.21)$$

и из сравнения с (5.9.20) следует, что на свободном от нагружения контуре

$$\Gamma_1, \Gamma_0: \quad 2\mu(u + iv) = 4(1 - \nu)\varphi_{0*}(z) + 2\mu\alpha(1 + \nu)\Theta_*(z). \quad (5.9.22)$$

Этим обобщается равенство (5.9.15) на случай двусвязной области. В самой области L формула (5.9.21) может быть записана в виде

$$2\mu(u + iv) = 4(1 - \nu)\varphi_{0*}(z) + 2\mu(1 + \nu)\Theta_*(z) - i(P + iQ). \quad (5.9.23)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_{\Gamma_*}(P + iQ) = 0 \quad (5.9.24)$$

— главный вектор напряжений по любому замкнутому контуру в L равен нулю.

Формулировка первой краевой задачи основывается на соотношении (5.9.21). Например, в случае упругого тела, заключенного в абсолютно жесткую и шероховатую обойму, отделенную от тела теплоизолирующей прокладкой,

$$(u + iv)_{\Gamma} = 0. \quad (5.9.25)$$

По (5.9.23) распределение поверхностных реактивных сил, создаваемых обоймой, дается равенством

$$(P + iQ)_{\Gamma} = -i[4(1 - \nu)\varphi_{0*}(z) + 2\mu(1 + \nu)\Theta_*(z)]_{\Gamma}, \quad (5.9.26)$$

причем $\varphi_{0*}(z)$ определяется по решению краевой задачи (5.9.25).

5.10. Теорема Коши, интеграл Коши. Рассмотрим сначала случай L -области внутри простого замкнутого контура; значение z на Γ обозначается t .

Пусть $f(t)$ — значение на Γ функции $f(z)$, аналитической в L и непрерывной вплоть до границы; тогда имеют место теорема Коши

$$\oint_{\Gamma} f(t) dt = 0 \quad (5.10.1)$$

и интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z), & z \in L, \\ 0, & z \in R, \end{cases} \quad (5.10.2)$$

причем R — область, внешняя к L .

Пусть теперь L — бесконечная область вне Γ , L' — двусвязная область, ограниченная Γ изнутри и окружностью C достаточно большого радиуса r извне. Через $f(t)$ обозначается значение на Γ и на C голоморфной в L (значит, в L') функции $f(z)$. Применяя интегральную формулу Коши в L' -области, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt + \oint_C \frac{f(t)}{t-z} dt \right) = \begin{cases} f(z), & z \in L', \\ 0, & z \in R, \end{cases}$$

причем здесь R — область, внешняя к L' , то есть расположенная внутри Γ .

Вместе с тем

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(re^{i\theta}) i d\theta}{1 - \frac{z}{re^{i\theta}}}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} I = f(\infty),$$

так что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z) - f(\infty), & z \in L, \\ -f(\infty), & z \in R. \end{cases} \quad (5.10.3)$$

Пусть теперь $f(z)$ — функция, голоморфная в области L внутри Γ повсюду, кроме полюса $z = a$, а главная часть ее разложения в этом полюсе равна

$$g(z) = \sum_{s=1}^n \frac{A_s}{(z-a)^s} \quad (a \in L). \quad (5.10.4)$$

Вместе с тем $g(z)$ голоморфна в R -области (вне Γ), причем $g(\infty) = 0$, так что, основываясь на (5.10.3), имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g(t)}{t-z} dt = \begin{cases} 0, & z \in L, \\ -g(z), & z \in R, \end{cases}$$

и, учитывая, что функция $f(z) - g(z)$ голоморфна в L , сославшись на (5.10.2), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z) - g(z), & z \in L, \\ -g(z), & z \in R. \end{cases} \quad (5.10.5)$$

Остается рассмотреть случай, когда L — внешняя к Γ область, а $f(z)$ голоморфна в L всюду, кроме бесконечно удаленной точки, в которой она имеет полюс с главной частью

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad (5.10.6)$$

так что $g(z)$ — функция, голоморфная в R .

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{g(t)}{t-z} dt = \begin{cases} 0, & z \in L, \\ -g(z), & z \in R, \end{cases}$$

так что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z) - g(z), & z \in L, \\ -g(z), & z \in R, \end{cases} \quad (5.10.7)$$

так как функция $f(z) - g(z)$ голоморфна в L и равна нулю на бесконечности. Заметим, что обе формулы (5.10.5), (5.10.7) имеют одинаковую структуру:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z) - g(z), & z \in L, \\ -g(z), & z \in R, \end{cases} \quad (5.10.8)$$

причем область L при обходе Γ остается слева.

5.11. Интегралы типа Коши. Формулы Сохоцкого — Племели. Пусть $\varphi(t)$ — заданная на Γ функция; ограничиваясь предположением, что интеграл

$$\oint_{\Gamma} |\varphi(t)| dt \quad (5.11.1)$$

ограничен, можно доказать, что функции

$$\Phi^L(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t) dt}{t-z} \quad (z \in L), \quad \Phi^R(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t) dt}{t-z} \quad (z \in R), \quad (5.11.2)$$

называемые интегралами типа Коши, голоморфны — первая в L -области, вторая в R . Этими равенствами определена во всей плоскости z , исключая Γ , функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}. \quad (5.11.3)$$

Следует отличать значения $\Phi(z)$ на контуре Γ , предельные изнутри и извне:

$$\lim_{L \ni z \rightarrow t_0} \Phi(z) = \Phi^L(t_0), \quad \lim_{R \ni z \rightarrow t_0} \Phi(z) = \Phi^R(t_0), \quad (5.11.4)$$

от ее «прямого значения», определяемого главным значением интеграла типа Коши:

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt. \quad (5.11.5)$$

Связь между этими величинами дается формулами Сохоцкого — Племели *)

$$\left. \begin{aligned} \Phi^L(t_0) &= \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt, \\ \Phi^R(t_0) &= -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt. \end{aligned} \right\} \quad (5.11.6)$$

Их можно записать также в виде

$$\Phi^L(t_0) - \Phi^R(t_0) = \varphi(t_0), \quad \Phi^L(t_0) + \Phi^R(t_0) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt. \quad (5.11.7)$$

Если известно, что функция $\Phi(z)$ на всей плоскости, исключая контур Γ , голоморфна и равна нулю на бесконечности, а на Γ задана разность ее значений $\varphi(t)$ изнутри и извне Γ , то по первой формуле (5.11.7)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt. \quad (5.11.8)$$

Легко доказывается ссылкой на известную теорему Лиувилля (голоморфная во всей плоскости функция может быть только постоянной) единственность этого решения. Если же наперед известно, что $\Phi(z)$ на бесконечности растет не быстрее, чем z^n , а в точке $z = a \in L$ имеет полюс порядка m , то

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + P_n(z) + \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{(z-a)^s}, \quad (5.11.9)$$

где $P_n(z)$ — произвольный полином n -й степени, α_s — некоторые постоянные.

*) Ф. Д. Гахов, см. сноску на стр. 523.

§ 6. Области с круговой границей

6.1. Круглый диск, нагруженный сосредоточенными силами. Сосредоточенные силы — нормальные R_s и касательные T_s — приложены в n точках Q_s с угловыми координатами θ_s по окружности Γ диска радиуса r_0 . Каждая из этих точек принимается за начало местной системы координат $Q_s x_s y_s$, причем оси $Q_s x_s$, $Q_s y_s$ совмещаются с направлениями единичных векторов

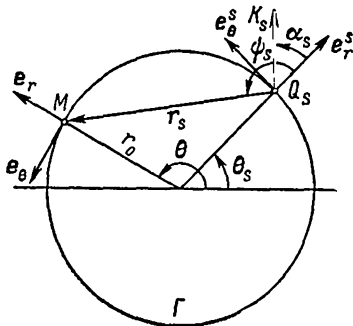


Рис. 42.

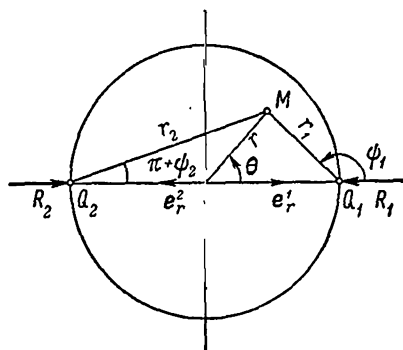


Рис. 43.

e_r^s , e_θ^s полярной системы координат r , θ с началом в центре диска C ; эти же направления e_r^s , e_θ^s приписываются силам R_s , T_s при $R_s > 0$, $T_s > 0$. Через r_s , ψ_s обозначаются полярные координаты точки наблюдения $M(r, \theta)$ с началом в точке истока Q_s и с полярной осью e_r^s . Конечно, предполагается, что система сил R_s , T_s статически эквивалентна нулю:

$$\sum_{s=1}^n (R_s \cos \theta_s - T_s \sin \theta_s) = 0,$$

$$\sum_{s=1}^n (R_s \sin \theta_s + T_s \cos \theta_s) = 0, \quad \sum_{s=1}^n r_0 T_s = 0,$$

или, в другой записи,

$$\sum_{s=1}^n (R_s + iT_s) e^{i\theta_s} = 0, \quad \sum_{s=1}^n T_s = 0. \quad (6.1.1)$$

Пусть

$$R_s = K_s \cos \alpha_s, \quad T_s = K_s \sin \alpha_s,$$

где α_s — угол с направлением e_r^s приложенной в Q_s силы K_s — равнодействующей сил R_s, T_s . Сославшись на формулу (3.4.5), введем в рассмотрение функцию напряжений

$$U_* = -\frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n K_s r_s \psi_s \sin(\psi_s - \alpha_s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n r_s \psi_s (R_s \sin \psi_s - T_s \cos \psi_s), \quad (6.1.2)$$

определяющую напряженное состояние, создаваемое особенно-стями, соответствующими приложению в точках Q_s сосредоточенных сил. Функция напряжений U задачи о диске разыскивается теперь в виде

$$U = U_* + U_{**}, \quad (6.1.3)$$

причем корректирующая функция U_{**} определяется по условиям

$$\sigma_r^{**} = -\sigma_r^*, \quad \tau_{r\theta}^{**} = -\tau_{r\theta}^*, \quad (6.1.4)$$

выражающим, что окружность диска не нагружена в точках, отличных от Q_s .

Напряженное состояние, создаваемое приложением в точке истока силы K_s , сводится лишь к нормальному напряжению σ_{r_s} на площадке, перпендикулярной r_s :

$$\sigma_{r_s} = -\frac{2K_s}{\pi r_s} \cos(\psi_s - \alpha_s) = -\frac{2}{\pi r_s} (R_s \cos \psi_s + T_s \sin \psi_s).$$

Но на окружности Γ (рис. 42)

$$r_s = 2r_0 \sin \frac{\theta - \theta_s}{2}, \quad \psi_s = \frac{1}{2} \pi + \frac{\theta - \theta_s}{2},$$

так что

$$\text{на } \Gamma: \quad \sigma_{r_s} = \frac{1}{\pi r_0 \sin \frac{\theta - \theta_s}{2}} \left(R_s \sin \frac{\theta - \theta_s}{2} - T_s \cos \frac{\theta - \theta_s}{2} \right).$$

Компоненты $\sigma_r^s, \tau_{r\theta}^s$ тензора напряжений в системе полярных координат r, θ теперь определяются известными формулами

$$\text{на } \Gamma: \quad \begin{cases} \sigma_r^s = \sigma_{r_s} \sin^2 \frac{\theta - \theta_s}{2} = \\ \quad = \frac{1}{\pi r_0} \left(R_s \sin^2 \frac{\theta - \theta_s}{2} - T_s \cos \frac{\theta - \theta_s}{2} \sin \frac{\theta - \theta_s}{2} \right), \\ \tau_{r\theta}^s = \sigma_{r_s} \sin \frac{\theta - \theta_s}{2} \cos \frac{\theta - \theta_s}{2} = \\ \quad = \frac{1}{\pi r_0} \left(R_s \sin \frac{\theta - \theta_s}{2} \cos \frac{\theta - \theta_s}{2} - T_s \cos^2 \frac{\theta - \theta_s}{2} \right), \end{cases}$$

так как углы вектора r_s с векторами e_r, e_θ в точке наблюдения M на Γ равны соответственно $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\theta - \theta_s), \frac{1}{2}(\theta - \theta_s)$. Теперь после простейших преобразований и использования уравнений равновесия (6.1.1), имеем

$$\sigma_r^* + i\tau_{r\theta}^* = \frac{1}{2\pi r_0} \sum_{s=1}^n (R_s - iT_s) - \frac{1}{2\pi r_0} \sum_{s=1}^n (R_s + iT_s) e^{i\theta_s} = \frac{1}{2\pi r_0} \sum_{s=1}^n R_s. \quad (6.1.5)$$

Пришли к неожиданно простому результату: корректирующий тензор напряжений определяет осесимметричное напряженное состояние, создаваемое равномерно распределенным по Γ нормальным давлением:

$$\sigma_r^{**} = -\frac{1}{2\pi r_0} \sum_{s=1}^n R_s, \quad \tau_{r\theta}^{**} = 0, \quad U_{**} = -\frac{r^2}{4\pi r_0} \sum_{s=1}^n R_s.$$

По (6.1.3) теперь имеем

$$U = -\frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n r_s \psi_s (R_s \sin \psi_s - T_s \cos \psi_s) - \frac{r^2}{4\pi r_0} \sum_{s=1}^n R_s, \quad (6.1.6)$$

причем на диске

$$\left. \begin{aligned} r_s &= [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_s)]^{1/2}, \quad \sin \psi_s = \frac{r}{r_s} \sin(\theta - \theta_s), \\ \cos \psi_s &= \frac{r \cos(\theta - \theta_s) - r_0}{r_s}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.7)$$

Как пример рассмотрим диск, сжатый двумя сосредоточенными силами, приложенными по концам диаметра (Герц, 1883). Тогда $R_1 = R_2 = -R, T_s = 0$ и по (6.1.6)

$$U = \frac{R}{\pi} \left(r_1 \psi_1 \sin \psi_1 + r_2 \psi_2 \sin \psi_2 + \frac{r^2}{2r_0} \right), \quad (6.1.8)$$

причем, напоминаем, углы ψ_1, ψ_2 отсчитываются от векторов $e_r^1, e_r^2 = -e_r^1$ в точках Q_1, Q_2 , направленных противоположно сжимающим диск силам.

Принимая для простоты, что диск сжимается по концам горизонтального диаметра, имеем по рис. 43

$$\begin{aligned} r_1 \sin \psi_1 &= -r_2 \sin \psi_2 = r \sin \theta = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}) = \frac{r_0}{2i} (\zeta - \bar{\zeta}), \\ z_1 &= r_0 (\zeta - 1), \quad z_2 = -r_0 (\zeta + 1), \end{aligned}$$

и поэтому

$$e^{2i\psi_1} = \frac{\zeta - 1}{\bar{\zeta} - 1}, \quad e^{2i\psi_2} = \frac{\zeta + 1}{\bar{\zeta} + 1},$$

причем ξ — точка в единичном круге. Теперь функция U может быть представлена в виде

$$U(z, \bar{z}) = r_0 U(\xi, \bar{\xi}) = \frac{1}{2} \frac{r_0 R}{\pi} \left[\xi \bar{\xi} + \frac{1}{2} (\xi - \bar{\xi}) \left(\ln \frac{\xi+1}{\xi-1} + \ln \frac{\bar{\xi}-1}{\bar{\xi}+1} \right) \right], \quad (6.1.9)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{R}{\pi} \left(\xi + \ln \frac{\xi-1}{\xi+1} \right), \\ \chi(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{R}{\pi} \xi \ln \frac{\xi+1}{\xi-1}, \\ \psi(\xi) &= \chi'(\xi) = \frac{1}{2} \frac{R}{\pi} \left(\ln \frac{\xi+1}{\xi-1} - \frac{2\xi}{\xi^2-1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.1.10)$$

Вычисление напряжений по формулам Колосова — Мусхелишвили теперь не составит труда:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 2 \frac{R}{\pi r_0} \left(1 + \frac{1}{\xi^2-1} + \frac{1}{\bar{\xi}^2-1} \right), \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 4 \frac{R}{\pi r_0} \frac{1-\xi\bar{\xi}}{(\xi^2-1)^2} \frac{\xi}{\bar{\xi}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.1.11)$$

откуда следует, что на окружности диска (исключая точки Q_1, Q_2 приложения сил) все напряжения равны нулю. На диаметре диска, перпендикулярном линии действия сил, $\xi = 0$, $\bar{\xi} = i\eta$, и из формул (6.1.11) следует

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = (\sigma)_{\theta=0} &= - \frac{R}{\pi r_0} \frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2} (3+\eta^2), \\ \sigma_y = (\sigma_r)_{\xi=0} &= \frac{R}{\pi r_0} \frac{(1-\eta^2)^2}{(1+\eta^2)^2}, \quad \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.12)$$

6.2. Общий случай нагружения круглого диска. Рассматривается общий случай нагружения круглого диска $|z| \leq r_0$ нормальными и касательными поверхностными силами по его окружности

$$|r| = r_0: \quad \sigma_r = f_1(\theta), \quad \tau_{r\theta} = f_2(\theta) \quad (6.2.1)$$

в предположении, что эта система сил уравновешена сосредоточенными в его центре силой $X + iY$ и парой с моментом M^0 .

Уравнения равновесия диска записываются в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [f_1(\theta) \cos \theta - f_2(\theta) \sin \theta] r_0 d\theta + X &= 0, \\ \int_0^{2\pi} [f_1(\theta) \sin \theta + f_2(\theta) \cos \theta] r_0 d\theta + Y &= 0, \quad r_0^2 \int_0^{2\pi} f_2(\theta) d\theta + M^0 = 0 \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} r_0 \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i\theta} d\theta + X + iY = 0, \quad r_0^2 \int_0^{2\pi} [f(\theta) - \bar{f}(\theta)] d\theta + 2iM^0 = 0 \\ [f(\theta) = f_1(\theta) + if_2(\theta)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.2)$$

Для облегчения записей задача рассматривается в единичном круге, что сводится к замене обозначений

$$z = r_0 \xi, \quad \xi = \rho e^{i\theta} = \rho \sigma, \quad \sigma = e^{i\theta}, \quad d\sigma = ie^{i\theta} d\theta = i\sigma d\theta. \quad (6.2.3)$$

При этом уравнения равновесия (6.2.2) приводятся к виду

$$\oint_{\gamma} f(\theta) d\sigma + \frac{i}{r_0} (X + iY) = 0, \quad \oint_{\gamma} [f(\theta) - \bar{f}(\theta)] \frac{d\sigma}{\sigma} - 2 \frac{M^0}{r_0^2} = 0. \quad (6.2.4)$$

Сославшись на (5.6.1), (5.6.5), следует искать функции Мусхелишвили $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= -\frac{X + iY}{8\pi(1-\nu)r_0} \ln \xi + \Phi_*(\xi), \\ \psi(\xi) &= \frac{X - iY}{8\pi(1-\nu)r_0} (3 - 4\nu) \ln \xi + \frac{iM^0}{2\pi r_0^2} \frac{1}{\xi} + \Psi_*(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (6.2.5)$$

где $\Phi_*(\xi)$, $\Psi_*(\xi)$ голоморфны в единичном круге $|\xi| < 1$. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\xi) &= -\frac{X + iY}{8\pi(1-\nu)r_0} \frac{1}{\xi} + \Phi_*(\xi), \\ \Psi(\xi) &= \frac{X - iY}{8\pi(1-\nu)r_0} (3 - 4\nu) \frac{1}{\xi} - \frac{iM^0}{2\pi r_0^2} \frac{1}{\xi^2} + \Psi_*(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (6.2.6)$$

По (5.2.15) краевое условие на окружности γ единичного круга записывается теперь в виде

$$\begin{aligned} \xi = \sigma, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{\sigma}: \quad \Phi_*(\sigma) + \bar{\Phi}_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \bar{\Phi}'_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma^2} \bar{\Psi}'_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ = f(\theta) + \frac{1}{8\pi(1-\nu)r_0} \left[4(1-\nu) \frac{1}{\sigma} (X + iY) + 2\sigma (X - iY) \right] + \frac{iM^0}{2\pi r_0^2}. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Переходя к сопряженным величинам, имеем также

$$\begin{aligned} \bar{\xi} = \frac{1}{\sigma}, \quad \xi = \sigma: \quad \bar{\Phi}_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \Phi_*(\sigma) - \sigma \Phi'_*(\sigma) - \sigma^2 \Psi'_*(\sigma) = \\ = \bar{f}(\theta) + \frac{1}{8\pi(1-\nu)r_0} \left[4(1-\nu) \sigma (X - iY) + \frac{2}{\sigma} (X + iY) \right] - \frac{iM^0}{2\pi r_0^2}. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

6.3. Способ интегралов Коши. Способ интегралов типа Коши в применении к краевым задачам плоской теории упругости был предложен и подробно разработан Н. И. Мусхелишвили. В его труде даны строгое обоснование и многочисленные применения этого способа, поэтому здесь можно ограничиться лишь пояснением техники вычисления.

Умножив обе части соотношения (6.2.7) на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

и интегрируя по контуру γ единичного круга, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{\gamma} \frac{\Phi_*(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \oint_{\gamma} \bar{\Phi}_* \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \right. \\ \left. - \oint_{\gamma} \bar{\Phi}'_* \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta)} - \oint_{\gamma} \bar{\Psi}'_* \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)\sigma^2} \right] = \\ = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{X + iY}{2\pi r_0} \oint_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta)} + \right. \\ \left. + \frac{X - iY}{4\pi(1 - \nu)r_0} \oint_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{iM^0}{2\pi r_0^2} \oint_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \right]. \end{aligned}$$

Теперь, сославшись на интегральные формулы Коши (5.10.2), (5.10.3) и учитывая, что $\bar{\Phi}_* \left(\frac{1}{\zeta} \right)$ — голоморфная при $|\zeta| > 1$ функция, имеем

$$\Phi_*(\zeta) + \bar{\Phi}_*(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{X - iY}{4\pi(1 - \nu)r_0} \zeta + \frac{iM^0}{2\pi r_0^2}. \quad (6.3.1)$$

Аналогичное вычисление в применении к условию (6.2.8) дает

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_*(0) + \Phi_*(\zeta) - \zeta \Phi'_*(\zeta) - \zeta^2 \Psi'_*(\zeta) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{X - iY}{2\pi r_0} \zeta - \frac{iM^0}{2\pi r_0^2}. \quad (6.3.2) \end{aligned}$$

Здесь следует еще убедиться в обратном: определяемые равенствами (6.3.1), (6.3.2) во всей области функции $\Phi_*(\zeta)$, $\Psi_*(\zeta)$ удовлетворяют краевым условиям (6.2.7), (6.2.8), по которым они найдены способом интегралов Коши. Обоснование с помощью теорем теории потенциала (теорема Гарнака) приводится в упомянутом труде Н. И. Мусхелишвили. Другой вывод этих же соотношений приводится в пп. 6.13, 6.14.

По (6.3.1) при $\zeta = 0$ имеем

$$2 \operatorname{Re} \Phi_*(0) = \Phi_*(0) + \bar{\Phi}_*(0) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{\sigma} d\sigma + i \frac{M^0}{2\pi r_0^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta + \frac{i}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f_2(\theta) d\theta + \frac{M^0}{r_0^2} \right),$$

и условие вещественности левой части этого равенства

$$\int_0^{2\pi} f_2(\theta) d\theta + \frac{M^0}{r_0^2} = 0$$

представляет уравнение моментов. Итак, приняв $\operatorname{Im} \Phi_*(0) = 0$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_*(0) = \bar{\Phi}_*(0) &= \frac{1}{4\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{\sigma} d\sigma + \frac{iM^0}{4\pi r_0^2} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta, \\ \Phi_*(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\theta) \left(\frac{1}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\sigma} \right) d\sigma + \frac{iM^0}{4\pi r_0^2} + \frac{X - iY}{4\pi(1 - \nu)r_0} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.3)$$

Остается по (6.3.1), (6.3.2) найти $\Psi_*(\zeta)$; получаем

$$-\zeta^2 \Psi_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) - f(\theta)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \\ + \frac{X - iY}{2\pi r_0} \zeta + \frac{\zeta}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{(\sigma - \zeta)^2} d\sigma - i \frac{M^0}{\pi r_0^2}, \quad (6.3.4)$$

и определяемая этим равенством функция $\Psi_*(\zeta)$ голоморфна в круге $|\zeta| < 1$ при условии, что в разложении в ряд по степеням ζ правой части отсутствует свободный член и член первой степени

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} [\bar{f}(\theta) - f(\theta)] \frac{d\sigma}{\sigma} - i \frac{M^0}{\pi r_0^2} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta)}{\sigma^2} d\sigma + \frac{X - iY}{2\pi r_0} = 0, \quad (6.3.5)$$

— это уравнения равновесия, причем одно из них записано в форме, сопряженной в (6.2.2). По (6.3.4), (6.3.5) находим теперь

$$\Psi_*(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\frac{f(\theta)}{(\sigma - \zeta)^2 \sigma} + \frac{\bar{f}(\theta)}{\sigma^2 (\sigma - \zeta)} \right] d\sigma. \quad (6.3.6)$$

6.4. Нормальное напряжение σ_θ на окружности. Далее предполагается, что система поверхностных сил на γ статически эквивалентна нулю. Тогда

$$X + iY = 0, \quad M^0 = 0; \quad \int_0^{2\pi} f_2(\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta \quad (6.4.1)$$

и по (6.3.3)

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\theta) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta.$$

При предельном переходе $\zeta \rightarrow \sigma_1 = e^{i\psi}$ с помощью формул (5.11.6) Сохоцкого — Племели имеем

$$\Phi(\zeta)|_{\zeta \rightarrow \sigma_1} = \frac{1}{2} f(\psi) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\theta) \frac{d\sigma}{\sigma - \sigma_1} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta, \quad (6.4.2)$$

причем понимаемый в смысле его главного значения интеграл преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\theta) \frac{d\sigma}{\sigma - \sigma_1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{e^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - e^{i\psi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{1 - e^{i(\theta-\psi)}}{2[1 - \cos(\theta-\psi)]} d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta - \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta. \end{aligned}$$

Приходим к соотношению

$$\Phi(\zeta)|_{\zeta \rightarrow \sigma_1} = \frac{1}{2} f(\psi) - \frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta, \quad (6.4.3)$$

так что

$$(\sigma_r + \sigma_\theta)|_{\zeta=1} = 2[\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta})] = 2f_1(\psi) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta,$$

или

$$\sigma_\theta|_{r=r_0} = \sigma_r|_{r=r_0} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta}|_{r=r_0} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta. \quad (6.4.4)$$

При отсутствии касательных напряжений нормальные напряжения на окружности диска друг другу равны.

Известны соотношения ($n = 1, 2, \dots$)

$$\left. \begin{aligned} \sin n\psi &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta, \\ \cos n\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\theta \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta, \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.5)$$

Поэтому, задавая распределение поверхностных касательных сил рядом

$$r = r_0: \quad \tau_{r\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (6.4.6)$$

можно получить еще одно представление формулы (6.4.4):

$$r = r_0: \quad \sigma_{\theta}|_{r=r_0} = \sigma_r|_{r=r_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta). \quad (6.4.7)$$

Слагаемое ряда (6.4.6) для $n = 1$ не может быть задано независимо от соответствующего слагаемого ($n = 1$) тригонометрического ряда для нормального напряжения $(\sigma_r)_{r=r_0}$. Последнее должно иметь вид

$$-a_1 \sin \theta + b_1 \cos \theta,$$

так как в противном случае не удовлетворены условия равновесия поверхностных сил на γ .

6.5. Напряжения в центре диска. При условиях (6.4.1) по формулам Колосова — Мусхелишвили (1.14.9) имеем

$$(\sigma_r + \sigma_{\theta})_{r=0} = 2 [\Phi(0) + \bar{\Phi}(0)], \quad (\sigma_{\theta} - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta})_{r=0} = 2e^{2i\psi}\Psi(0)$$

и по (6.3.3), (6.3.6) получаем

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r + \sigma_{\theta})_{r=0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta, \\ (\sigma_{\theta} - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta})_{r=0} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{2i(\psi-\theta)} f_1(\theta) d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (6.5.1)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta}|_{r=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) \cos 2(\psi - \theta) d\theta, \\ \sigma_r|_{r=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) \cos 2(\psi - \theta) d\theta, \\ \tau_{r\theta}|_{r=0} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\theta) \sin 2(\psi - \theta) d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.5.2)$$

Интересно отметить, что касательные поверхностные силы не создают напряжений в центре диска. Эти напряжения создаются только постоянным слагаемым и второй гармоникой разложения нормальных поверхностных сил в тригонометрический ряд.

6.6. Статически неуравновешенный вращающийся диск. Решение этой задачи приводится в качестве примера на применение общих формул п. 6.3. Предполагается, что точка пересечения O оси вращения однородного диска с его средней плоскостью не совпадает с его геометрическим центром (являющимся также центром тяжести). Отрезок $\overline{OC} = e$ (эксцентриситет) расположен на оси Sx , связанной с диском и вместе с ним вращающейся с постоянной угловой скоростью ω системой осей Sxy . Тогда координаты точки O будут $x = -e$, $y = 0$, а объемная центробежная сила в точке $M(x, y)$ может быть задана вектором

$$\rho K = \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r + i_1 e), \quad r = xi_1 + yi_2. \quad (6.6.1)$$

Главный вектор этих сил и их главный момент относительно центра C равны

$$F = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \int_{\Omega} (r + i_1 e) d\sigma = i_1 e M \omega^2, \\ m^C = i_3 \cdot \int_{\Omega} r \times \rho K d\sigma = -\frac{\gamma \omega^2 e}{g} \int_{\Omega} y d\sigma = 0,$$

причем $M = \frac{\gamma}{g} \pi r_0^2$ — масса диска. Центробежные силы уравновешиваются реакцией оси O — сосредоточенной силой $-F$ в точке $(-e, 0)$. Поэтому напряженное состояние в диске является наложением, во-первых, состояния, создаваемого центробежными силами

$$\rho K_0 = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r, \quad (6.6.2)$$

и, во-вторых, состояния, создаваемого однородным полем сил

$$\rho K_1 = \frac{\gamma}{g} \omega^2 e i_1, \quad (6.6.3)$$

статически уравновешенных реакций в точке O

$$F_2 = -F = -M \omega^2 e i_1. \quad (6.6.4)$$

Решение первой задачи элементарно. Частное решение уравнения статики, удовлетворяющее условию сплошности, дается формулами (3.11.6) гл. V, если в них заменить ν по правилу (1.6.5):

$$\sigma'_r = -\frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \nu) r^2, \quad \sigma'_\theta = -\frac{\gamma \omega^2}{8g} (1 + 3\nu) r^2, \quad \tau'_{r\theta} = 0. \quad (6.6.5)$$

Корректирующая осесимметричная функция напряжений Cr^2 определяется условием обращения в нуль нормального напряжения σ'_r на окружности диска

$$r = r_0: \quad 2C - \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3 + \nu) r_0^2 = 0,$$

и напряженное состояние во вращающемся вокруг своего центра тяжести диске дается формулами

$$\sigma_r^0 = \frac{\gamma\omega^2}{8g} (3 + \nu) (r_0^2 - r^2), \quad \sigma_\theta^0 = \frac{\gamma\omega^2}{8g} [(3 + \nu) r_0^2 - (1 + 3\nu) r^2], \quad \tau_{r\theta}^0 = 0. \quad (6.6.6)$$

Частным решением уравнений теории упругости в однородном силовом поле (6.6.3) может служить

$$\sigma_x^{(1)} = -\frac{\gamma}{g} \omega^2 e x = -\frac{Me\omega^2}{\pi r_0^2} r \cos \theta, \quad \sigma_y^{(1)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0$$

или, в полярных координатах,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= -\frac{Me\omega^2}{\pi r_0^2} r \cos^3 \theta, & \sigma_\theta^{(1)} &= -\frac{Me\omega^2}{\pi r_0^2} r \sin^2 \theta \cos \theta, \\ \tau_{r\theta}^{(1)} &= \frac{Me\omega^2}{\pi r_0^2} r \cos^2 \theta \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.7)$$

Функция напряжений, определяющая напряженное состояние, создаваемое силой F_2 , представляется по (3.1.10) выражением *)

$$U_2(z, \bar{z}) = \frac{Me\omega^2}{16\pi(1-\nu)} \{ (\bar{z} + e) \ln(z + e) + (z + e) \ln(\bar{z} + e) - \\ - (3 - 4\nu) [(z + e) \ln(z + e) + (\bar{z} + e) \ln(\bar{z} + e)] \} \quad (6.6.8)$$

и по (1.13.7)

$$\sigma_r^{(2)} + i\tau_{r\theta}^{(2)} = \frac{Me\omega^2}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1}{z+e} + \frac{1}{\bar{z}+e} + (3-4\nu) \frac{\bar{z}}{z} \frac{1}{\bar{z}+e} \right]. \quad (6.6.9)$$

Наложение состояний (6.6.7), (6.6.9) определяет на окружности γ единичного круга напряжение

$$\xi = \sigma, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{\sigma}: \quad \tilde{\sigma}_r + i\tilde{\tau}_{r\theta} = \frac{M\alpha\omega^2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{\sigma} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{1}{\sigma+\alpha} + \frac{\sigma}{1+\alpha\bar{\sigma}} + (3-4\nu) \frac{1}{\sigma(1+\alpha\bar{\sigma})} \right] \right\}, \quad (6.6.10)$$

причем использованы обозначения (6.2.3) и введен безразмерный параметр эксцентриситета $\alpha = e/r_0$.

Задача сведена к определению функций $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ таких, чтобы определяемое по формуле (1.14.9) напряжение

$$\sigma_r^* + i\tau_{r\theta}^* = \frac{M\alpha\omega^2}{4\pi} \left[\Phi(\xi) + \bar{\Phi}(\bar{\xi}) - \bar{\xi}\bar{\Phi}'(\bar{\xi}) - \frac{\xi}{\xi} \bar{\Psi}(\bar{\xi}) \right] \quad (6.6.11)$$

*) Сохранены обозначения, относящиеся к случаю плоской деформации.

принимало на γ значение (6.6.10), но противоположного знака. Приходим к краевым условиям

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\sigma) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma^2} \bar{\Psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) &= f(\sigma), \\ \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \Phi(\sigma) - \sigma \Phi'(\sigma) - \sigma^2 \Psi(\sigma) &= \bar{f}(\sigma). \end{aligned} \right\} \quad (6.6.12)$$

Здесь

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{1}{\sigma + \alpha} + \frac{\sigma}{1 + \alpha\sigma} + (3 - 4\nu) \frac{1}{\sigma(1 + \alpha\sigma)} \right], \quad (6.6.13)$$

и нетрудно проверить, что система поверхностных сил, представляемая этим выражением, статически эквивалентна нулю. Действительно, по (6.2.4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left\{ \sigma + \frac{2}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{2(1-\nu)} \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{1}{\underline{\sigma + \alpha}} + \frac{\sigma}{1 + \alpha\sigma} + (3 - 4\nu) \frac{1}{\underline{\sigma(1 + \alpha\sigma)}} \right] \right\} d\sigma = 2 - \frac{1}{2(1-\nu)} (1 + 3 - 4\nu) = 0 \end{aligned}$$

— отличны от нуля интегралы от подчеркнутых слагаемых, дающие в сумме нуль. Аналогично проверяется второе равенство (6.2.4).

Остается провести вычисление функций $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$. По (6.3.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left\{ \sigma + \frac{2}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{2(1-\nu)} \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{1}{\underline{\sigma + \alpha}} + \frac{\sigma}{1 + \alpha\sigma} + (3 - 4\nu) \frac{1}{\underline{\sigma(1 + \alpha\sigma)}} \right] \right\} \frac{d\sigma}{\sigma - \xi}. \end{aligned}$$

Отличны от нуля и непосредственно вычисляются по первой интегральной формуле Коши (5.10.2) интегралы, соответствующие подчеркнутым слагаемым. Остальные интегралы обращаются в нуль согласно второй интегральной формуле (5.10.3).

Получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} = \xi - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\xi}{1 + \alpha\xi} + \frac{3 - 4\nu}{2(1-\nu)} \frac{\alpha}{1 + \alpha\xi} = \Phi(\xi) + \bar{\Phi}(0),$$

так что

$$\Phi(\xi) = \xi - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\xi}{1 + \alpha\xi} + \frac{3 - 4\nu}{4(1-\nu)} \alpha \frac{1 - \alpha\xi}{1 + \alpha\xi}. \quad (6.6.14)$$

По (6.3.2) находим теперь

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} d\sigma \frac{f(\sigma) - \bar{f}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma - \zeta} - \zeta \Phi'(\zeta) \right] = \\ = \frac{\alpha}{2(1-\nu)(1+\alpha\zeta)^2} [(3-4\nu)\alpha^2 + 2 + \alpha\zeta] - \zeta. \quad (6.6.15)$$

Вычисление напряжений по функциям Φ и Ψ теперь не составит труда. К этим напряжениям, измененным по (1.6.5), добавляются напряжения (6.6.6) от центробежных сил.

6.7. Первая краевая задача для круга. По (5.2.16) краевое условие на единичной окружности γ имеет вид

$$(3-4\nu)\varphi(\sigma) - \sigma\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 2\mu(u+iv)_{\gamma} = f(\theta), \quad (6.7.1)$$

причем $f(\theta)$ — заданная функция, а $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$ — значения на γ голоморфных в единичном круге $|\zeta| < 1$ функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, причем по (5.3.4) можно принять $\varphi(0) = 0$. Сопряженное с (6.7.1) краевое условие имеет вид

$$(3-4\nu)\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = \bar{f}(\theta). \quad (6.7.2)$$

Из степенных рядов, представляющих $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ в единичном круге:

$$\varphi(\zeta) = \zeta\varphi'(0) + \frac{1}{2}\zeta^2\varphi''(0) + \frac{1}{6}\zeta^3\varphi'''(0) + \dots,$$

$$\psi(\zeta) = \psi(0) + \zeta\psi'(0) + \dots,$$

следует

$$\sigma\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \sigma\bar{\varphi}'(0) + \bar{\varphi}''(0) + \frac{1}{2}\bar{\varphi}'''(0)\frac{1}{\sigma} + \dots,$$

$$\bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \bar{\psi}(0) + \frac{1}{\sigma}\bar{\psi}'(0) + \dots,$$

$$\frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma} = \frac{\varphi'(0)}{\sigma} + \varphi''(0) + \frac{1}{2}\varphi'''(0)\sigma + \dots,$$

$$\psi(\sigma) = \psi(0) + \sigma\psi'(0) + \dots$$

Поэтому применение способа интегралов Коши п. 6.3 и интегральных формул (5.10.2), (5.10.3) приводит к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} (3-4\nu)\varphi(\zeta) - \zeta\bar{\varphi}'(0) - \bar{\varphi}''(0) - \bar{\psi}(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \\ \frac{\varphi'(\zeta) - \varphi'(0)}{\zeta} + \psi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.3)$$

Сравнение свободных членов этих равенств и членов первой степени в первом равенстве приводит к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}''(0) + \bar{\psi}(0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{f}(\theta) d\theta, & \varphi''(0) + \psi(0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) d\theta, \\ (3-4\nu)\varphi'(0) - \bar{\varphi}'(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-i\theta} d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (6.7.4)$$

причем второе повторяет первое. Теперь первое равенство (6.7.3) представляется в виде

$$(3-4\nu)[\varphi(\xi) - \xi\varphi'(0)] = \frac{\xi^2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{\sigma^2(\sigma-\xi)}, \quad (6.7.5)$$

и из него дифференцированием находим

$$\frac{1}{\xi} [\varphi'(\xi) - \varphi'(0)] = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{3-4\nu} \oint_{\gamma} \frac{2\sigma-\xi}{\sigma^2(\sigma-\xi)^2} f(\theta) d\sigma,$$

так что по второму равенству (6.7.3)

$$\psi(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{3-4\nu} \oint_{\gamma} \frac{2\sigma-\xi}{\sigma^2(\sigma-\xi)^2} f(\theta) d\sigma + \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) d\sigma}{\sigma-\xi} \right]. \quad (6.7.6)$$

При обозначениях

$$\left. \begin{aligned} L(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{\sigma^2(\sigma-\xi)}, & M(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) d\sigma}{\sigma-\xi}, \\ Q(\xi) &= 2L(\xi) + \xi L'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{2\sigma-\xi}{\sigma^2(\sigma-\xi)^2} f(\theta) d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (6.7.7)$$

можно теперь представить вектор перемещения в виде

$$\begin{aligned} 2\mu(u+iv) &= (3-4\nu)\varphi(\xi) - \xi\bar{\varphi}'(\xi) - \bar{\psi}(\xi) = \\ &= \xi^2 L(\xi) + \frac{1-\xi\xi}{3-4\nu} \bar{Q}(\xi) + \bar{M}(\xi) + [(3-4\nu)\varphi'(0) - \bar{\varphi}'(0)] \xi \end{aligned}$$

или, сославшись на (6.7.4),

$$2\mu(u-iv) = M(\xi) + \xi^2 \bar{L}(\xi) + \frac{1-\xi\xi}{3-4\nu} Q(\xi) + \frac{\xi}{2\pi i} \oint_{\gamma} \bar{f}(\theta) d\sigma. \quad (6.7.8)$$

Обратившись к формулам Сохоцкого — Племели (5.11.6), нетрудно проверить этот результат. Действительно, полагая $\zeta \rightarrow \sigma_1 = e^{i\psi}$, имеем

$$\left. \begin{aligned} M(\zeta) \big|_{\zeta \rightarrow \sigma_1} &= \frac{1}{2} \bar{f}(\psi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{f}(\theta) d\theta}{1 - e^{i(\psi-\theta)}}, \\ \xi^2 L(\zeta) \big|_{\zeta \rightarrow \sigma_1} &= \frac{1}{2} f(\psi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i(\psi-\theta)}}{1 - e^{i(\psi-\theta)}} f(\theta) d\theta, \\ \xi^2 \bar{L}(\bar{\zeta}) \big|_{\bar{\zeta} \rightarrow \bar{\sigma}_1} &= \frac{1}{2} \bar{f}(\psi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2i(\psi-\theta)}}{1 - e^{-i(\psi-\theta)}} \bar{f}(\theta) d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (6.7.9)$$

так что

$$[M(\zeta) + \xi^2 \bar{L}(\bar{\zeta})] \big|_{\zeta \rightarrow \sigma_1} = \bar{f}(\psi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) e^{-i(\psi-\theta)} d\theta.$$

Учитывая еще равенства

$$(1 - \xi \bar{\xi})_\gamma = 0, \quad \frac{\xi}{2\pi i} \oint_\gamma \bar{f}(\theta) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(\psi-\theta)} \bar{f}(\theta) d\theta,$$

приходим к требуемому соотношению

$$2\mu (u - iv) \big|_\gamma = \bar{f}(\psi).$$

Отметим еще, что, задавая $\bar{f}(\theta)$ в форме перемещения твердой фигуры

$$\bar{f}_*(\theta) = 2\mu \left(u_0 - iv_0 - i\omega_0 \frac{r_0}{\sigma} \right),$$

имеем по (6.7.7)

$$L(\zeta) = 0, \quad Q(\zeta) = 0, \quad M(\zeta) = 2\mu (u_0 - iv_0), \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \bar{f}_*(\theta) d\sigma = -2\mu i \omega_0 r_0,$$

так что

$$2\mu (u - iv) = 2\mu (u_0 - iv_0 - i\omega_0 r_0 \bar{\xi}),$$

что и требуется.

Остается определить $\varphi'(0)$. Обращаясь для этого к формулам

$$\begin{aligned} 2\mu \left[\frac{\partial (u - iv)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial (u + iv)}{\partial z} \right] &= 2\mu (e_x + e_y) = \\ &= (1 - 2\nu) (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2}{r_0} (1 - 2\nu) [\varphi'(\zeta) + \bar{\varphi}'(\bar{\zeta})] \end{aligned}$$

и сославшись на (6.7.5), (6.7.8), имеем

$$\left. \begin{aligned} r_0(\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{2}{3-4\nu} [\zeta Q(\zeta) + \bar{\zeta} \bar{Q}(\bar{\zeta})] + 2[\varphi'(0) + \bar{\varphi}'(0)], \\ r_0(\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{1}{1-2\nu} \left[2\bar{\zeta} \bar{L}'(\bar{\zeta}) + \zeta^2 \bar{L}'(\bar{\zeta}) - \frac{\zeta Q(\zeta)}{3-4\nu} + 2\zeta L(\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \zeta^2 L'(\zeta) - \frac{\bar{\zeta} \bar{Q}(\bar{\zeta})}{3-4\nu} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) \sigma d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{d\theta}{\sigma} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.7.10)$$

или, по (6.7.7),

$$r_0(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2}{3-4\nu} [\zeta Q(\zeta) + \bar{\zeta} \bar{Q}(\bar{\zeta})] + \frac{4\mu}{1-2\nu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_r^0 d\theta, \quad (6.7.11)$$

где

$$u_r^0 = u^0 \cos \theta + v^0 \sin \theta$$

— радиальное перемещение на окружности. Итак,

$$(1-2\nu)[\varphi'(0) + \bar{\varphi}'(0)] = \frac{\mu}{\pi} \int_0^{2\pi} u_r^0 d\theta. \quad (6.7.12)$$

Присоединив сюда ранее найденное соотношение (6.7.4):

$$(3-4\nu)\varphi'(0) - \bar{\varphi}'(0) = \frac{\mu}{\pi} \int_0^{2\pi} (u_r^0 + iu_\theta^0) d\theta, \quad (6.7.13)$$

из двух уравнений (6.7.12), (6.7.13) находим

$$\varphi'(0) = \frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{1}{1-2\nu} \int_0^{2\pi} u_r^0 d\theta + \frac{i}{2(1-\nu)} \int_0^{2\pi} u_\theta^0 d\theta \right] \quad (6.7.14)$$

и сопряженное значение для $\bar{\varphi}'(0)$.

Теперь по (6.7.5) имеем

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta^2}{3-4\nu} L(\zeta) + \frac{\mu}{2\pi} \zeta \left[\frac{1}{1-2\nu} \int_0^{2\pi} u_r^0 d\theta + \frac{i}{2(1-\nu)} \int_0^{2\pi} u_\theta^0 d\theta \right]. \quad (6.7.15)$$

6.8. Напряженное состояние. Функция $\zeta Q(\zeta)$ представляется в виде

$$\zeta Q(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{2\sigma\zeta - \zeta^2}{\sigma^2(\sigma - \zeta)^2} f(\theta) d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{(\sigma - \zeta)^2} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{\sigma^2} d\sigma$$

или

$$\zeta Q(\zeta) = N'(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-i\theta} d\theta, \quad N(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{\sigma - \zeta}. \quad (6.8.1)$$

Это позволяет представить выражение (6.7.10) суммы нормальных напряжений, учитывая также (6.7.14), в виде

$$r_0(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2}{3-4\nu} \left\{ N'(\zeta) + \bar{N}'(\bar{\zeta}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\theta) e^{-i\theta} + \bar{f}(\theta) e^{i\theta}] d\theta \right\} + \\ + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\theta) e^{-i\theta} + \bar{f}(\theta) e^{i\theta}] d\theta$$

или

$$r_0(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2}{3-4\nu} \operatorname{Re} \left[2N'(\zeta) + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-i\theta} d\theta \right]. \quad (6.8.2)$$

Переходим к представлению второй формулы Колосова—Мусхелишвили. Имеем

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y - i\gamma_{xy} = 2 \frac{\partial}{\partial z} (u - iv) = \frac{1}{2\mu} e^{-2i\theta} (\sigma_r - \sigma_\theta - 2i\tau_{r\theta}),$$

или

$$r_0(\sigma_r - \sigma_\theta - 2i\tau_{r\theta}) = 2 \left[\frac{\zeta}{\xi} M'(\zeta) - \frac{1}{3-4\nu} \zeta Q(\zeta) + \frac{1-\xi\bar{\zeta}}{3-4\nu} \frac{\zeta}{\xi} Q'(\zeta) \right]. \quad (6.8.3)$$

В центре круговой области

$$\left. \begin{aligned} r_0(\sigma_r + \sigma_\theta)|_{r=0} &= \frac{2\mu}{1-2\nu} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_r^0 d\theta, \\ r_0(\sigma_r - \sigma_\theta - 2i\tau_{r\theta})|_{r=0} &= 2e^{2i\theta} \left[M'(\zeta) + \frac{3}{3-4\nu} L'(\zeta) \right]_{\zeta=0} = \\ &= \frac{2\mu}{\pi} e^{2i\theta} \left[\int_0^{2\pi} (u - iv)|_{r=r_0} e^{-i\theta} d\theta + \frac{3}{3-4\nu} \int_0^{2\pi} (u + iv)|_{r=r_0} e^{-3i\theta} d\theta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.8.4)$$

Для вычисления распределения напряжений на окружности требуется провести предельный переход $\zeta \rightarrow \sigma_1 = e^{i\psi}$ в выражениях $N'(\zeta)$, $M'(\zeta)$. Имеем

$$N'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{(\sigma - \zeta)^2} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\theta) \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{\sigma - \zeta} d\sigma = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{f(\theta)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{f'(\theta)}{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta},$$

так как первый интеграл отпадает. Остается применить формулу Сохоцкого — Племели *)

$$\begin{aligned} N'(\zeta)|_{\zeta \rightarrow \sigma_1} &= -\frac{1}{2} i f'(\psi) e^{-i\psi} - \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{f'(\theta)}{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma - \sigma_1} = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-i\psi} \left[i f'(\psi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta \right]. \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

Итак,

$$\begin{aligned} r_0(\sigma_r + \sigma_\theta)|_{r=r_0} &= \\ &= -\frac{2}{3-4\nu} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\psi} \left[i f'(\psi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-i\theta} d\theta \right\} \end{aligned} \quad (6.8.6)$$

и аналогично

$$\begin{aligned} r_0(\sigma_r - \sigma_\theta - 2i\tau_{r\theta})|_{r=r_0} &= \\ &= -e^{i\psi} \left[i \bar{f}'(\psi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta \right] + \\ &+ \frac{e^{-i\psi}}{3-4\nu} \left[i f'(\psi) + \frac{e^{2i\psi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} f'(\theta) d\theta + \frac{e^{2i\psi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-2i\theta} d\theta \right]. \end{aligned} \quad (6.8.7)$$

Теперь распределение поверхностных сил, создающих на окружности $r = r_0$ заданное перемещение, может быть определено вектором

$$\begin{aligned} r_0(\sigma_r - i\tau_{r\theta}) &= -\frac{1-2\nu}{3-4\nu} i e^{i\psi} \bar{f}'(\psi) - \frac{1-\nu}{3-4\nu} \frac{e^{i\psi}}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} d\theta + \\ &+ \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-i\theta} d\theta + \frac{1}{3-4\nu} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) e^{i\theta} d\theta \right). \end{aligned} \quad (6.8.8)$$

*) Предполагается дифференцируемость заданных на γ перемещений; достаточным условием существования входящих в последующие формулы интегралов служит выполнимость условий Гельдера для $f'(\theta)$.

Например, при чисто радиальном смещении

$$\hat{f}(\psi) = 2\mu u_r^0(\psi) e^{i\psi},$$

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{2\mu} (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{r=r_0} = & -\frac{1-2\nu}{3-4\nu} \left[u_r^0(\psi) + i \frac{du_r^0}{d\psi} \right] + \\ & + \frac{1-\nu}{3-4\nu} \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[u_r^0(\theta) - i \frac{du_r^0}{d\theta} \right] e^{-i(\theta-\psi)} \operatorname{ctg} \frac{\theta-\psi}{2} d\theta + \\ & + \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(3-4\nu)} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_r^0(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (6.8.9)$$

Необходимость приложения касательных сил обусловлена изменением радиального перемещения на окружности. В случае $u_r^0 = \text{const}$, сославшись на (6.4.5), находим

$$\frac{1}{2\mu} r_0 \sigma_r \Big|_{r=r_0} = \frac{u_r^0}{3-4\nu} \left[-1 + 2\nu + 2 - 2\nu + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right] = \frac{u_r^0}{1-2\nu}, \quad (6.8.10)$$

$$\tau_{r\theta} \Big|_{r=r_0} = 0,$$

и это легко проверить элементарным вычислением. Также легко проверяется статическая эквивалентность нулю найденной системы поверхностных сил (6.8.9).

6.9. Тепловые напряжения в диске, заключенном в жесткую обойму. При стационарном распределении температуры $\theta(r, \psi)$ в диске со свободным от нагружения краем вектор перемещения, определяется формулой (5.9.15), в которой следует сделать замены постоянных в соответствии с правилами (5.8.11), (5.8.13):

$$2\mu(u + iv) = 2\mu\alpha\theta(z) = 2\mu\alpha \int (\theta + ig) dz, \quad (6.9.1)$$

причем g — гармоническая функция, сопряженная с θ . В случае диска, спаянного с недеформируемой круговой обоймой через не проводящую тепла прокладку, перемещения на окружности диска равны нулю; распределенная по этой окружности система поверхностных сил — реакций обоймы — сообщает ее точкам перемещения, определяемые формулой (6.9.1), но противоположного знака. В формуле (6.8.8) теперь

$$\hat{f}(\psi) = -2\mu\alpha \int (\theta + ig) dz \Big|_{r=r_0}, \quad (6.9.2)$$

а коэффициент Пуассона должен быть заменен по правилу (5.8.13). Вместе с тем, ограничиваясь представлением гармонич-

ческой в круге $|z| < r_0$ функции θ тригонометрическим рядом по косинусам, имеем

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_k r^k \cos k\psi, \quad \theta + ig = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k z^k, \quad \Theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_k}{k+1} z^{k+1}, \quad (6.9.3)$$

причем постоянная интегрирования может быть откинута; не имеет также значения аддитивная вещественная постоянная, с точностью до которой определена сопряженная с θ функция g . Действительно, сохранение этих постоянных внесло бы в выражение вектора перемещения слагаемое, соответствующее перемещению диска как твердого тела, и, конечно, не сказалось бы на напряженном состоянии диска.

По (6.9.2) имеем теперь

$$\begin{aligned} \hat{f}(\psi) &= -2\mu\alpha r_0 \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \frac{r_0^k}{k+1} e^{i(k+1)\psi}, \\ \hat{f}'(\psi) &= -2\mu\alpha i r_0 e^{i\psi} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k r_0^k e^{ik\psi} = -2\mu\alpha i r_0 e^{i\psi} (\theta^0 + ig^0), \end{aligned}$$

где θ^0, g^0 — значения θ и g на окружности диска.

Вычисление по формуле (6.8.8) приводит теперь к равенству

$$\begin{aligned} (\sigma_r - i\tau_{r\theta})|_{r=r_0} &= -\frac{2\mu\alpha}{3-\nu} \left\{ -(1-\nu)(\theta^0 - ig^0) + \right. \\ &\quad + ie^{i\psi} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\theta^0(\varphi) - ig^0(\varphi)] e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2} d\varphi + \\ &\quad \left. + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta^0(\varphi) d\varphi + i(1+\nu) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^0(\varphi) d\varphi \right\} \quad (6.9.4) \end{aligned}$$

или, если возвратиться к представлению с помощью тригонометрического ряда,

$$\begin{aligned} (\sigma_r - i\tau_{r\theta})|_{r=r_0} &= -\frac{2\mu\alpha}{3-\nu} \left[(1+\nu) \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k r_0^k e^{-ik\psi} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \theta_0 \right] = \\ &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{3-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k r_0^k e^{-ik\psi} - 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \theta_0. \end{aligned}$$

Здесь θ_0 — постоянное слагаемое ряда (6.9.3). Можно этот результат представить в виде

$$(\sigma_r + i\tau_{r\theta})|_{r=r_0} = -2\mu\alpha \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \theta_0 + \frac{1+\nu}{3-\nu} (\theta - \theta_0 + ig) \right]_{r=r_0}, \quad (6.9.5)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_0} &= -2\mu\alpha \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \theta_0 + \frac{1+\nu}{3-\nu} (\theta - \theta_0)_{r=r_0} \right], \\ (\tau_{r\theta})_{r=r_0} &= -2\mu\alpha \frac{1+\nu}{3-\nu} (g)_{r=r_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9.6)$$

Не зависящее от полярного угла слагаемое выражения σ_r , конечно, легко получить из элементарных соображений.

Напряжение σ_θ можно найти, например, по (6.4.7):

$$(\sigma_\theta)_{r=r_0} = -2\mu\alpha \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \theta_0 + \frac{3+3\nu}{3-\nu} (\theta - \theta_0)_{r=r_0} \right]. \quad (6.9.7)$$

Определение этих напряжений требует знания распределения температуры только на поверхности диска.

6.10. Круговое отверстие в бесконечной плоскости. Край отверстия предполагается нагруженным поверхностными силами, проекции которых на оси e_r, e_θ полярной системы координат обозначаются $\hat{f}_r, \hat{f}_\theta$. Их главный вектор $X + iY$ и главный момент M^0 относительно центра отверстия представляются формулами, аналогичными (6.2.4):

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}(\theta) e^{i\theta} r_0 d\theta = -ir_0 \oint_{\gamma} \hat{f}(\theta) d\sigma = X + iY \quad (\hat{f}(\theta) = \hat{f}_r + i\hat{f}_\theta),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2}{2i} [\hat{f}(\theta) - \bar{\hat{f}}(\theta)] d\theta = -\frac{1}{2} r_0^2 \oint_{\gamma} [\hat{f}(\theta) - \bar{\hat{f}}(\theta)] \frac{d\sigma}{\sigma} = M^0$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \hat{f}(\theta) d\sigma + \frac{1}{2\pi r_0} (X + iY) = 0, \quad \oint_{\gamma} [\hat{f}(\theta) - \bar{\hat{f}}(\theta)] \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{2M^0}{r_0^2} = 0. \quad (6.10.1)$$

Краевое условие на контуре отверстия записывается в виде $r = r_0, \zeta = \sigma = e^{i\theta}$:

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi(\sigma) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma^2} \bar{\Psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = -\hat{f}(\theta), \quad (6.10.2)$$

причем в правой части поставлен знак минус, так как внешняя нормаль к L -области ($|\zeta| > 1$) упругой среды направлена противоположно e_r . Структура функций $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$ дается формулами (5.4.15):

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{1}{4} (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) + i\mu \frac{\varepsilon^\infty}{2(1-\nu)} - \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)r_0} \frac{1}{\zeta} + \Phi_*(\zeta), \\ \Psi(\zeta) &= \frac{1}{2} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{-2i\alpha} + \frac{X-iY}{8\pi(1-\nu)r_0} (3-4\nu) \frac{1}{\zeta} + \Psi_*(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (6.10.3)$$

причем разложение голоморфных на бесконечности функций $\Phi_*(\xi)$, $\Psi_*(\xi)$ начинается со слагаемых ξ^{-2} . Краевое условие, определяющее эти функции, теперь представляется в виде

$$\begin{aligned} \xi = \sigma: \quad \Phi_*(\sigma) + \overline{\Phi}_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \overline{\Phi}'_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma^2} \overline{\Psi}'_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ = -\bar{f}(\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_2^\infty + \sigma_1^\infty) + \frac{1}{2\sigma^2}(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)e^{2ia} + \\ + \frac{1}{8\pi(1-\nu)r_0} \left[4(1-\nu)(X+iY)\frac{1}{\sigma} + 2(\bar{X}-iY)\sigma \right]. \end{aligned} \quad (6.10.4)$$

Сопряженное с ним условие будет

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \Phi_*(\sigma) - \sigma \Phi'_*(\sigma) - \sigma^2 \Psi'_*(\sigma) = \\ = -\bar{f}(\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) + \frac{1}{2}\sigma^2(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)e^{-2ia} + \\ + \frac{1}{8\pi(1-\nu)r_0} \left[4(1-\nu)(X-iY)\sigma + \frac{2}{\sigma}(X+iY) \right]. \end{aligned} \quad (6.10.5)$$

В последующем при применении способа интеграла Коши не следует забывать, что $|\xi| > 1$. В этом случае интегральные формулы Коши в применении к функции $\bar{F}(\xi)$, голоморфной в L ($|\xi| > 1$), повсюду, кроме бесконечно удаленной точки, в которой она задается полиномом $g_n(\xi)$:

$$F(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k + i\beta_k}{\xi^k} + g_n(\xi), \quad g_n(\xi) = a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n,$$

представляются в виде (5.10.8):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = F(\xi) - g_n(\xi) \quad (|\xi| > 1). \quad (6.10.6)$$

Тогда функция

$$F\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k) \xi^k + a_0 + \left[g_n\left(\frac{1}{\xi}\right) - a_0 \right]$$

голоморфна при $|\xi| < 1$, кроме начала координат, в котором она имеет полюс n -го порядка, и по (5.10.5)

$$|\xi| > 1: \quad \oint \frac{F\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma - \xi} d\sigma = g_n\left(\frac{1}{\xi}\right) - a_0. \quad (6.10.7)$$

Руководствуясь этими правилами и учитывая форму разложения в степенные ряды искомых функций

$$\begin{aligned}\Phi_*(\zeta) &= \frac{\alpha_2 + i\beta_2}{\zeta^2} + \dots, \quad \overline{\Phi}_*\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \\ &= (\alpha_2 - i\beta_2)\zeta^2 + \dots, \quad \Phi'_*(\zeta) = -\frac{2(\alpha_2 + i\beta_2)}{\zeta^3} + \dots, \\ \Psi_*(\zeta) &= \frac{\alpha'_2 + i\beta'_2}{\zeta^2} + \dots, \quad \overline{\Psi}_*\left(\frac{1}{\zeta}\right) = (\alpha'_2 - i\beta'_2)\zeta^2 + \dots,\end{aligned}$$

приходим после умножения обеих частей равенств (6.10.4), (6.10.5) на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

и интегрирования по γ в направлении, обходящем область L слева, к формулам

$$\left. \begin{aligned}\Phi_*(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{e^{2i\alpha}}{2\zeta^2} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) + \frac{1}{2\pi r_0} (X + iY) \frac{1}{\zeta}, \\ \Phi_*(\zeta) - \zeta \Phi'_*(\zeta) - \zeta^2 \left[\Psi_*(\zeta) - \frac{\alpha'_2 + i\beta'_2}{\zeta^2} \right] &= \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{4\pi(1-\nu)r_0} (X + iY) \frac{1}{\zeta},\end{aligned} \right\} \quad (6.10.8)$$

так что

$$\begin{aligned}\Psi_*(\zeta) &= \frac{1}{\zeta^2} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) - f(\theta)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{3}{2\zeta^2} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{2i\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3-4\nu}{4\pi(1-\nu)r_0} (X + iY) \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{(\sigma - \zeta)^2} d\sigma \right] + \frac{\alpha'_2 + i\beta'_2}{\zeta^2}.\end{aligned} \quad (6.10.9)$$

Остается определить коэффициент $\alpha'_2 + i\beta'_2$; обращаясь для этого, например, к краевому условию (6.10.5) и сравнивая постоянные слагаемые его левой и правой частей, имеем

$$\begin{aligned}\alpha'_2 + i\beta'_2 &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \bar{f}(\theta) \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{1}{2} (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta) d\theta + \frac{1}{2} (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) = \bar{f}_0 + \frac{1}{2} (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty),\end{aligned} \quad (6.10.10)$$

где \bar{f}_0 — свободный член тригонометрического ряда $\bar{f}(\theta)$.

6.11. Равномерное нагружение края отверстия. В этом частном случае

$$f(\theta) = \frac{X+iY}{2\pi r_0} e^{-i\theta}, \quad \bar{f}(\theta) = \frac{X-iY}{2\pi r_0} e^{i\theta}, \quad \sigma_1^\infty = \sigma_2^\infty = 0, \quad (6.11.1)$$

и поэтому

$$|\zeta| > 1: \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma = \frac{X+iY}{2\pi r_0 \xi}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma = 0, \quad \bar{f}_0 = 0.$$

По (6.10.8), (6.10.9), (6.10.10) и (6.10.3) имеем (принимая $\epsilon^\infty = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= -\frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{z} \quad (z = r_0 \zeta), \\ \Psi(\zeta) &= \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)} (X-iY) \frac{1}{z} - \frac{X+iY}{4\pi(1-\nu)} \frac{r_0^2}{z^3}. \end{aligned} \right\} \quad (6.11.2)$$

При $r_0 \rightarrow 0$ приходим к ранее найденному решению задачи о сосредоточенной силе в плоскости (п. 3.1).

6.12. Растяжение плоскости, ослабленной круговым отверстием. Край отверстия предполагается ненагруженным, так что

$$f(\theta) = 0, \quad X+iY = 0. \quad (6.12.1)$$

Из перечисленных выше соотношений получаем

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{1}{4} (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) + \frac{r_0^2}{2z^2} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{2i\alpha}, \\ \Psi(\zeta) &= \frac{1}{2} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{-2i\alpha} + \frac{1}{2} (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) \frac{r_0^2}{z^2} + \\ &\quad + \frac{3}{2} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) \frac{r_0^4}{z^4} e^{2i\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (6.12.2)$$

и по формулам Колосова — Мусхелишвили (1.14.9) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty + 2 \frac{r_0}{r} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) \cos 2\psi, \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \\ &= (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) \frac{r_0^2}{r^2} + (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) \left(e^{2i\psi} - 2 \frac{r_0^2}{r^2} e^{-2i\psi} + 3 \frac{r_0^4}{r^4} e^{-2i\psi} \right), \end{aligned} \quad (6.12.3)$$

где $\psi = \theta - \alpha$ — угол, отсчитываемый от первой главной оси.

Например, при растяжении пластинки, ослабленной круговым отверстием (задача Кирша, 1898),

$$\begin{aligned} \sigma_2^\infty = 0, \quad \sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_1^\infty \left(1 - \frac{2r_0^2}{r^2} \cos 2\psi \right), \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \\ &= \sigma_1^\infty \left(\frac{r_0^2}{r^2} - e^{2i\psi} + 2 \frac{r_0^2}{r^2} e^{-2i\psi} - 3 \frac{r_0^4}{r^4} e^{-2i\psi} \right). \end{aligned} \quad (6.12.4)$$

При $r = r_0$ $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$, а

$$\sigma_\theta = \sigma_1^\infty (1 - 2 \cos 2\psi), \quad (\sigma_\theta)_{\max} = 3\sigma_1^\infty \quad \left(\text{при } \psi = \pm \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.12.5)$$

— максимальное напряжение на контуре круглого отверстия равно утроенному номинальному. Концентрация напряжений имеет отчетливо выраженный локальный характер; например, вдоль диаметра, перпендикулярного направлению растяжения ($\psi = \pi/2$),

$$\sigma_\theta = \sigma_1^\infty \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{r_0^4}{r^4} \right)$$

и $\sigma_\theta = 1,074\sigma_1^\infty$ при $r = 3r_0$, $\sigma_\theta = 1,022$ при $r = 5r_0$.

При всестороннем растяжении на бесконечности ($\sigma_1^\infty = \sigma_2^\infty = q$)

$$\sigma_\theta = q \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad \sigma_r = q \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad (\sigma_\theta)_{r=r_0} = 2q. \quad (6.12.6)$$

При напряженном состоянии простого сдвига на бесконечности ($\sigma_1^\infty = -\sigma_2^\infty = \tau$) по формулам (6.12.3) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= -4\tau \frac{r_0^2}{r^2} \cos 2\psi, \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \\ &= -2\tau \left(e^{2i\psi} - 2 \frac{r_0^2}{r^2} e^{-2i\psi} + 3 \frac{r_0^4}{r^4} e^{-2i\psi} \right), \end{aligned} \quad (6.12.7)$$

и максимальное напряжение на контуре отверстия оказывается равным учетверенному номинальному напряжению.

6.13. Продолжение $\Phi(z)$. При преобразовании обратными радиусами относительно окружности $\Gamma(r=a)$ точке $M(r, \theta)$ сопоставляется точка $M^*(a^2/r, \theta)$, иначе говоря, точка $M(z = re^{i\theta})$ переходит в точку $M^*\left(\frac{a^2}{\bar{z}} = \frac{a^2}{r} e^{i\theta}\right)$ на том же луче, исходящем из центра Γ . Рассматривается упругое тело (L -область), ограниченное окружностью Γ ; это — круглый диск при $|z| < a$ и плоскость с круговым отверстием при $|z| > a$. При обходе Γ в положительном направлении (против часовой стрелки при $|z| < a$, по часовой стрелке при $|z| > a$) область L остается слева, R — справа. Пусть $M(z)$ — точка области L , $M^*(a^2/\bar{z})$ — области R . По (1.14.9)

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z}\bar{\Phi}'(\bar{z}) - \frac{\bar{z}}{z} \bar{\Psi}(\bar{z}) \quad (z \in L). \quad (6.13.1)$$

В R -области функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ не определены, в ней z преобразуется в a^2/\bar{z} , а $\sigma_r + i\tau_{r\theta} = 0$. Это позволяет определить $\Phi(z)$ в R -области, приняв левую часть равенства (6.13.1) нулем, заменив z на a^2/\bar{z} ; сохранив при этом неизменным \bar{z} , получаем соотношение, связывающее функции только от \bar{z} :

$$\Phi\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) = -\bar{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \frac{\bar{z}^2}{a^2} \bar{\Psi}(\bar{z}) \quad (z \in L). \quad (6.13.2)$$

Заменив здесь \bar{z} на a^2/z , приходим к эквивалентному соотношению между функциями от z :

$$\Phi(z) = -\bar{\Phi}\left(\frac{a^2}{z}\right) + \frac{a^2}{z} \bar{\Phi}'\left(\frac{a^2}{z}\right) + \frac{a^2}{z^2} \bar{\Psi}\left(\frac{a^2}{z}\right) \quad (z \in R). \quad (6.13.3)$$

Этим равенством определяется продолжение $\Phi(z)$ в R -область.

Пусть L -областью является плоскость с круговым отверстием, тогда R -областью служит диск $|z| < a$. Функции $\bar{\Phi}(z)$, $\bar{\Psi}(z)$, голоморфные в L , разлагаются в ряды по отрицательным степеням z , содержащие также постоянные слагаемые; поэтому $\bar{\Phi}(a^2/z)$, $\bar{\Psi}(a^2/z)$ — ряды по положительным степеням z и из структуры формулы (6.13.3) легко заключить, что $\Phi(z)$ голоморфна в R всюду, кроме начала координат, являющегося полюсом с разложением в его окрестности вида

$$A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}. \quad (6.13.4)$$

Если же L -область представляет диск, то бесконечно удаленная точка $z = \infty$ заключена в R -области; $\bar{\Phi}(z)$, $\bar{\Psi}(z)$ — ряды по положительным, а $\bar{\Phi}(a^2/z)$, $\bar{\Psi}(a^2/z)$ — отрицательным степеням z , содержащие также постоянные слагаемые. Постоянное слагаемое согласно (6.13.3) войдет также в определяемое этой формулой аналитическое продолжение $\Phi(z)$ в R -область; в этой области $\Phi(z)$ является поэтому голоморфной всюду функцией, включая бесконечно удаленную точку $z = \infty$, в которой ее главная часть постоянна.

Формулы (6.13.1), (6.13.2) позволяют составить равенство $z \in L$:

$$\Phi(z) - \bar{\Phi}\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) + \bar{\Psi}(\bar{z}) \frac{\bar{z}^2}{a^2} \left(1 - \frac{a^2}{z\bar{z}}\right) = (\sigma_r + i\tau_{r\theta}). \quad (6.13.5)$$

При предельном переходе $|z| \rightarrow a$ обе точки $M(z)$ и $M^*(a^2/\bar{z})$ приходят в одну и ту же точку $M^0(t = ae^{i\psi})$ на Γ — первая из L -, вторая из R -области; вместе с тем $z\bar{z} - a^2 = 0$; получаем соотношение

$$z = t \in \Gamma: \quad \Phi^L(t) - \Phi^R(t) = (\sigma_r + i\tau_{r\theta})_\Gamma. \quad (6.13.6)$$

Сославшись теперь на (5.11.9), определим $\Phi(z)$ с помощью интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_\Gamma}{t - z} dt + \gamma(z). \quad (6.13.7)$$

Интеграл в этой формуле представляет голоморфную в плоскости, исключая Γ , функцию z . Интегрирование ведется в направлении, оставляющем L -область слева. Функция $\gamma(z)$, введенная для учета возможных особенностей $\Phi(z)$ при $z = 0$ и

$z = \infty$, в соответствии со сказанным ранее принимается равной выражению (6.13.4), если L -область — плоскость с круговым отверстием; она равна постоянной (пусть D), когда L — диск. Итак,

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_{\Gamma}}{t-z} dt + D; \quad z \in L, \quad |z| < a, \\ \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_{\Gamma}}{t-z} dt + A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}; \quad z \in L, \quad |z| > a. \end{aligned} \right\} \quad (6.13.8)$$

Возвращаясь к формуле (6.13.2) и записав сопряженное с ней выражение, имеем

$$\Psi(z) = \frac{a^2}{z^2} \left[\Phi(z) + \bar{\Phi}\left(\frac{a^2}{z}\right) - z\Phi'(z) \right], \quad z \in L. \quad (6.13.9)$$

Этим равенством определяется голоморфная в L функция $\Psi(z)$. В нем $\Phi(z)$ определена одной из формул (6.13.8). Слагаемое $\bar{\Phi}(a^2/z)$ вычисляется так: входящий в (6.13.8) интеграл определяется для $z \in R$; составляется сопряженное с так построенной функцией $\Phi(z)$ выражение, и в последнем, чтобы вернуться в L -область, \bar{z} заменяется на a^2/z . Очевидно, что так построенная голоморфная в L функция отличается от получающейся формальной заменой в выражении $\Phi(z)$ для $z \in L$ переменной z на a^2/z . Для последней примем обозначение $\Phi^{\times}(a^2/z)$; очевидно, эта функция уже не голоморфна в L .

6.14. Решение краевых задач пп. 6.2, 6.10 способом продолжения. Начнем с рассмотрения случая диска $|\zeta| < 1$ в предположении, что поверхностные силы уравновешены. Краевые условия и уравнения равновесия записываются в виде [см. (6.2.4)]

$$\zeta = \sigma = e^{i\theta}: \quad \sigma_r + i\tau_{r\theta} = f(\theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \sigma^{-k}, \quad (6.14.1)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\theta) d\sigma = A_{-1} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} [f(\theta) - \bar{f}(\theta)] \frac{d\sigma}{\sigma} = A_0 - \bar{A}_0 = 0. \quad (6.14.2)$$

По (6.13.8) с помощью формул п. 5.10 имеем

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{\sigma - \zeta} + D = \begin{cases} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \zeta^k + D & (\zeta \in L, |\zeta| < 1), \\ - \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \zeta^{-k} + D & (\zeta \in R, |\zeta| > 1) \end{cases} \quad (6.14.3)$$

и в соответствии со сказанным в п. 6.13 определяется голоморфная в L функция

$$\bar{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_{-k} \xi^k + \bar{D}. \quad (6.14.4)$$

Это выражение, учитывая, что

$$\bar{f}(\theta) = \bar{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_{-k} \sigma^k, \quad (6.14.5)$$

можно записать также в виде

$$\bar{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right) = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) d\sigma}{\sigma - \xi} + \bar{A}_0 + \bar{D}. \quad (6.14.6)$$

По (6.13.9) получаем

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta) - \bar{f}(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma - \frac{\xi}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{(\sigma - \xi)^2} + \bar{A}_0 + D + \bar{D} \right].$$

Но функция $\Psi(\xi)$ голоморфна в круге $|\xi| < 1$; поэтому требуется приравнять нулю в выражении в скобках коэффициент при ξ и постоянное слагаемое. Приходим к равенствам

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta)}{\sigma^2} d\sigma = - \bar{A}_{-1} = 0, \quad D + \bar{D} = -A_0 = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{\sigma} d\sigma.$$

Первое выражает условие обращения в нуль главного вектора поверхностных сил. Второму также можно удовлетворить; это следует из уравнения моментов (A_0 вещественно). Конечно, D определяется с точностью до мнимого слагаемого, которое может быть принято равным нулю. Приходим к уже известным результатам п. 6.3:

$$\left. \begin{aligned} |\xi| < 1: \quad \Phi(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{\sigma - \xi} - \frac{1}{2} \oint_{\gamma} f(\theta) \frac{d\sigma}{\sigma} \right), \\ \Psi(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\xi^2} \left(\oint_{\gamma} \frac{f(\theta) - \bar{f}(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma - \xi \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{(\sigma - \xi)^2} d\sigma \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.14.7)$$

В случае плоскости с отверстием, записывая краевое условие в виде

$$\xi = \sigma = e^{i\theta}: \quad \sigma_r + i\tau_{r\theta} = -f(\theta) = - \left[A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \sigma^{-k} \right], \quad (6.14.8)$$

по (6.13.8) имеем

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta) d\sigma}{\sigma - \xi} + A + \frac{B}{\xi} + \frac{C}{\xi^2} = \\ &= \begin{cases} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{-k}}{\xi^k} + A + \frac{B}{\xi} + \frac{C}{\xi^2} & (\xi \in L, |\xi| > 1), \\ A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \xi^k + A + \frac{B}{\xi} + \frac{C}{\xi^2} & (\xi \in R, |\xi| < 1). \end{cases} \quad (6.14.9)\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right) &= \bar{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_k}{\xi^k} + \bar{A} + \bar{B}\xi + \bar{C}\xi^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) d\sigma}{\sigma - \xi} + \bar{A}_0 + \bar{A} + \bar{B}\xi + \bar{C}\xi^2 \quad (6.14.10)\end{aligned}$$

и по (6.13.9)

$$\begin{aligned}\xi \in L, |\xi| > 1: \quad \Psi(\xi) &= \frac{1}{\xi^2} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) - f(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma + \right. \\ &\left. + \frac{\xi}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{(\sigma - \xi)^2} d\sigma + A + \bar{A} + \bar{A}_0 + \frac{2B}{\xi} + \frac{3C}{\xi^2} \right] + \frac{\bar{B}}{\xi} + \bar{C}. \quad (6.14.11)\end{aligned}$$

Эта функция голоморфна в бесконечно удаленной точке, и ее главная часть в ней равна \bar{C} . Постоянные A, B, C могут быть выражены через главный вектор поверхностных сил в отверстии и через напряжения и вращение на бесконечности. Сославшись на (6.10.1), (6.10.3), имеем

$$A = \frac{1}{4}(\sigma_1^{\infty} + \sigma_2^{\infty}) + i\mu \frac{\varepsilon^{\infty}}{2(1-\nu)}, \quad \bar{B} = \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)}(X - iY),$$

$$\bar{C} = \frac{1}{2}(\sigma_2^{\infty} - \sigma_1^{\infty})e^{-2i\alpha},$$

причем

$$\frac{1}{2\pi i_0}(X + iY) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\theta) d\sigma = A_{-1}, \quad A_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{\sigma} d\sigma.$$

Возвращаясь к (6.14.9), (6.14.11), приходим к таким выражениям искомым функций:

$$\left. \begin{aligned} \zeta \in L, |\zeta| > 1: \quad \Phi(\zeta) &= \frac{1}{4}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) + i\mu \frac{e^\infty}{2(1-\nu)} + \\ &+ \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)}(X+iY)\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2\zeta^2}(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)e^{2i\alpha} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \\ \Psi(\zeta) &= \frac{1}{2}(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)e^{-2i\alpha} + \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)}(X-iY)\frac{1}{\zeta} + \\ &+ \frac{1}{\zeta^2} \left[\frac{1}{2}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \bar{f}(\theta) \frac{d\sigma}{\sigma} + \right. \\ &+ \frac{3-4\nu}{4\pi(1-\nu)}(X+iY)\frac{1}{\zeta} + \frac{3}{2\zeta^2}(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)e^{2i\alpha} + \\ &\left. + \frac{\zeta}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\theta)}{(\sigma - \zeta)^2} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{f}(\theta) - f(\theta)}{\sigma - \zeta} d\sigma \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.14.12)$$

и это полностью согласуется с результатами п. 6.10.

§ 7. Круговое кольцо

7.1. Напряженное состояние, вызываемое дисторсией. Будем исходить из представления функции напряжений в форме Мичелла (5.6.7). При отсутствии нагружения по внешней ($r = r_0$) и внутренней ($r = r_1$) окружностям, ограничивающим кольцо, достаточно в этом выражении сохранить слагаемые

$$U = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \left[\frac{1}{2} b_3 r^2 + (c_2 r \cos \theta - c_1 r \sin \theta) \right] \ln r + \right. \\ \left. + \left[\alpha_1 r^2 + \alpha'_{-1} \ln r + r^3 (C_1 \cos \theta + S_1 \sin \theta) + \frac{1}{r} (\alpha'_1 \cos \theta + b'_1 \sin \theta) \right] \right\}, \quad (7.1.1)$$

причем пары постоянных (α_1, α'_{-1}) , (C_1, α'_1) , (S_1, b'_1) определяются из независимых систем уравнений, получаемых по крайевым условиям

$$r = r_0, \quad r = r_1: \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (7.1.2)$$

Найдя эти постоянные, приходим к следующим напряженным состояниям: осесимметричное состояние, вызываемое вращательной компонентой дисторсии,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\mu b_3}{2\pi(1-\nu)} \left(\ln \frac{r}{r_0} - \frac{r_1^2}{r^2} \frac{r_0^2 - r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} \ln \frac{r_1}{r_0} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\mu b_3}{2\pi(1-\nu)} \left(1 + \ln \frac{r}{r_0} + \frac{r_1^2}{r^2} \frac{r_0^2 + r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} \ln \frac{r_1}{r_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.1.3)$$

и напряженное состояние от поступательных дисторсий

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r} (c_2 \cos \theta - c_1 \sin \theta) \left(1 - \frac{1}{r^2} \frac{r_0^2 r_1^2 + r^4}{r_0^2 + r_1^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r} (c_2 \cos \theta - c_1 \sin \theta) \left(1 + \frac{1}{r^2} \frac{r_0^2 r_1^2 - 3r^4}{r_0^2 + r_1^2} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r} (c_2 \sin \theta + c_1 \cos \theta) \left(1 - \frac{1}{r^2} \frac{r_0^2 r_1^2 + r^4}{r_0^2 + r_1^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.1.4)$$

7.2. Вторая краевая задача для кругового кольца. Рассматривается напряженное состояние в кольце, ограниченном извне и изнутри концентрическими окружностями Γ_0 и Γ_1 ; для упрощения записей радиус наружной окружности принимается равным 1, радиус внутренней обозначается α ($0 < \alpha < 1$). По (1.14.9)

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta}) - \zeta\Phi'(\zeta) - \frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\Psi(\zeta), \quad (7.2.1)$$

и краевые условия могут быть записаны в виде

$$\text{на } \Gamma_0: \quad \zeta = \sigma, \quad \Phi(\sigma) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \sigma\Phi'(\sigma) - \sigma^2\Psi(\sigma) = f(\theta), \quad (7.2.2)$$

$$\text{на } \Gamma_1: \quad \zeta = \alpha\sigma, \quad \Phi(\alpha\sigma) + \bar{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \alpha\sigma\Phi'(\alpha\sigma) - \sigma^2\Psi(\alpha\sigma) = -\bar{F}(\theta). \quad (7.2.3)$$

Здесь через

$$f(\theta) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} f_{-k} \sigma^{-k}, \quad F(\theta) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} F_{-k} \sigma^{-k} \quad (7.2.4)$$

обозначены векторы внешних поверхностных сил, распределенных по Γ_0 и Γ_1 .

Сопряженные векторы представляются выражениями

$$\bar{f}(\theta) = \bar{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_{-k} \sigma^k, \quad \bar{F}(\theta) = \bar{F}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}_k \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{F}_{-k} \sigma^k. \quad (7.2.5)$$

Из уравнений статики

$$\oint f(\theta) d\sigma + \alpha \oint F(\theta) d\sigma = 0, \quad \oint (f - \bar{f}) \frac{d\sigma}{\sigma} + \alpha^2 \oint (F - \bar{F}) \frac{d\sigma}{\sigma} = 0, \quad (7.2.6)$$

выражающих условия равенства нулю главного вектора и главного момента внешних сил, приложенных к кольцу, следуют ус-

ловия, налагаемые на коэффициенты тригонометрических рядов (7.2.5):

$$\bar{f}_{-1} + \alpha F_{-1} = 0, \quad \bar{f}_0 + \alpha^2 F_0 - (\bar{f}_0 + \alpha^2 \bar{F}_0) = 0. \quad (7.2.7)$$

Можно удовлетворить уравнению (7.2.2), задав функцию $\Psi(\xi)$ в кольце $\alpha \leq |\xi| \leq 1$ выражением

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left[\Phi(\xi) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \xi \Phi'(\xi) - L(\xi) \right], \quad (7.2.8)$$

в котором $L(\xi)$ определяется рядом Лорана

$$L(\xi) = \bar{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_k}{\xi^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_{-k} \xi^k. \quad (7.2.9)$$

Конечно, при этом удовлетворяется и сопряженное с (7.2.2) краевое условие на Γ_0 .

Теперь имеем

$$\sigma^2 \Psi(\alpha\sigma) = \frac{1}{\alpha^2} \left[\Phi(\alpha\sigma) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\alpha\sigma}\right) - \alpha\sigma \Phi'(\alpha\sigma) - L(\alpha\sigma) \right],$$

а краевое условие (7.2.3) на Γ_1 переписывается в виде

$$\begin{aligned} (1 - \alpha^2) [\Phi(\alpha\sigma) - \alpha\sigma \Phi'(\alpha\sigma)] - \alpha^2 \bar{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\alpha\sigma}\right) = \\ = \alpha^2 \bar{F}(0) + L(\alpha\sigma) = \alpha^2 \bar{F}_0 + \bar{f}_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\alpha^2 \bar{F}_k + \frac{\bar{f}_k}{\alpha^k} \right) \sigma^{-k} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^2 \bar{F}_{-k} + \alpha^k \bar{f}_{-k}) \sigma^k. \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

Сопряженное краевое условие будет

$$\begin{aligned} (1 - \alpha^2) \left[\bar{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \frac{\alpha}{\sigma} \bar{\Phi}'\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \right] - \alpha^2 \Phi(\alpha\sigma) + \Phi\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right) = \\ = \alpha^2 F_0 + f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha^2 F_k + \frac{f_k}{\alpha^k} \right) \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^2 F_{-k} + \alpha^k f_{-k}) \sigma^{-k}. \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

7.3. Определение функций $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$. Функцию $\Phi(\xi)$, аналитическую в кольце $\alpha \leq |\xi| \leq 1$, представим ее разложением в ряд Лорана

$$\Phi(\xi) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \xi^k + \frac{C_{-1}}{\xi} + \sum_{k=2}^{\infty} C_{-k} \xi^{-k}. \quad (7.3.1)$$

Тогда $\Psi(\xi)$ по (7.2.8) определится из соотношения

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left[C_0 + \bar{C}_0 + \sum_{k=2}^{\infty} (1-k) C_k \xi^k + \frac{2C_{-1}}{\xi} + \sum_{k=2}^{\infty} (1+k) C_{-k} \xi^{-k} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{C}_k}{\xi^k} + \bar{C}_{-1} \xi + \sum_{k=2}^{\infty} \bar{C}_{-k} \xi^k - L(\xi) \right]. \quad (7.3.2)$$

Здесь важно отметить, что коэффициенты при ξ^{-1} в выражениях $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ соответственно равны C_{-1} и $\bar{C}_{-1} - \bar{f}_{-1}$, и поэтому в представлении $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ войдут неоднозначные слагаемые

$$\varphi(\xi) = C_{-1} \ln \xi + \dots, \quad \psi(\xi) = (\bar{C}_{-1} - \bar{f}_{-1}) \ln \xi + \dots,$$

и условие однозначности вектора перемещения (1.14.5) позволяет определить C_{-1} :

$$(3 - 4\nu) C_{-1} + (C_{-1} - \bar{f}_{-1}) = 0, \quad C_{-1} = \frac{\bar{f}_{-1}}{4(1-\nu)}. \quad (7.3.3)$$

Обратившись теперь к краевым условиям (7.2.10), (7.2.11) и заменив в них $\Phi(\xi)$ его выражением (7.3.1), придем к системе уравнений

$$(1 - \alpha^2)(C_0 + \bar{C}_0) = \alpha^2 \bar{F}_0 + \bar{f}_0, \quad (7.3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} (1 - \alpha^2)(1 - k) \alpha^k C_k + (\alpha^k - \alpha^{-k+2}) \bar{C}_{-k} &= \alpha^2 \bar{F}_{-k} + \alpha^k \bar{f}_{-k}, \\ (\alpha^{-k} - \alpha^{k+2}) C_k + (1 - \alpha^2)(1 + k) \alpha^{-k} \bar{C}_{-k} &= \alpha^2 F_k + \frac{f_k}{\alpha^k} \end{aligned} \right\} \quad (7.3.5)$$

и к сопряженной с ней системе.

По (7.2.7) правая часть уравнения (7.3.4) вещественна, равно как и левая его часть; коэффициент C_0 определен с точностью до его мнимой части; принимая ее равной нулю, получаем

$$C_0 = \frac{\alpha^2 \bar{F}_0 + \bar{f}_0}{2(1 - \alpha^2)} = \frac{\alpha^2 F_0 + f_0}{2(1 - \alpha^2)}. \quad (7.3.6)$$

При $k = 1$ первое уравнение (7.3.5) удовлетворяется тождественно, а второе дает

$$(1 - \alpha^4) C_1 + 2(1 - \alpha^2) \bar{C}_{-1} = \alpha^3 F_1 + f_1,$$

и к такому же уравнению для сопряженных величин приводит рассмотрение случая $k = -1$.

По (7.3.3) получаем

$$C_1 = \frac{\alpha^3 F_1 + f_1}{1 - \alpha^4} - \frac{\bar{f}_{-1}}{2(1 - \nu)(1 + \alpha^2)}. \quad (7.3.7)$$

При $k = \pm 2, \pm 3, \dots$ система уравнений (7.3.5) имеет единственное решение, так как ее определитель

$$\Delta = \alpha^2 [(\alpha^{-k} - \alpha^k)^2 - k^2 (\alpha^{-1} - \alpha)^2] = 4e^{-2k} [\operatorname{sh}^2 kt - k^2 \operatorname{sh}^2 t] \quad (\alpha = e^{-t})$$

не обращается в нуль при вещественных t .

Достаточным условием сходимости построенных рядов — решения (7.3.1) — является убывание коэффициентов тригонометрических рядов (7.2.4) при $n \rightarrow \infty$, как $n^{-(2+\mu)}$, $0 < \mu < 1$. Для этого требуется, чтобы первые производные функций $f(\theta)$, $F(\theta)$ удовлетворяли условиям Гельдера с показателем μ .

7.4. Труба под равномерным внешним и внутренним давлением (задача Ляме). В этом простейшем случае отличны от нуля коэффициенты f_0, F_0 :

$$(\sigma_r)_{r=r_0} = -p_0 = f_0, \quad (\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1 = -F_0,$$

и по (7.3.6), (7.3.1), (7.3.2), (7.2.8)

$$C_0 = \frac{\alpha^2 p_1 - p_0}{2(1 - \alpha^2)} = \Phi(\xi), \quad \Psi(\xi) = \frac{\alpha^2 (p_1 - p_0)}{1 - \alpha^2} \frac{1}{\xi^2}.$$

По формулам Колосова — Мусхелишвили получаем

$$\sigma_r = \frac{\alpha^2 p_1 - p_0}{1 - \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \frac{p_1 - p_0}{1 - \alpha^2}, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha^2 p_1 - p_0}{1 - \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \frac{p_1 - p_0}{1 - \alpha^2} \quad \left(\rho = |\xi| = \frac{r}{r_0} \right).$$

7.5. Температурные напряжения в кольце. Предполагается, что поле температуры стационарно; в выражении температуры достаточно знать лишь логарифмическое слагаемое и слагаемое ξ^{-1} . Наружный радиус кольца принимается равным 1, а внутренних α . Краевое условие (5.9.20) служит для определения двух голоморфных в кольце функций $\varphi_{0*}(\xi)$, $\psi_*(\xi)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{0*}(\xi) + \xi \bar{\varphi}'_{0*}(\bar{\xi}) + \bar{\psi}_*(\bar{\xi}) &= \\ &= \frac{1}{2} A \left[2(\theta'_0 \xi + \theta'_1 + i g'_1) \ln \rho + \theta'_0 \xi + (\theta'_1 - i g'_1) \frac{\xi}{\xi} \right] \quad (7.5.1) \\ &\quad \left(A = \mu \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \right). \end{aligned}$$

По ним с помощью соотношений (5.9.19) находим функции $\varphi_0(\xi)$, $\psi(\xi)$, что решает задачу.

К крайевым условиям для функций Φ , Ψ можно прийти дифференцированием соотношения (7.5.1) по дуге на любой окружности $\xi = \rho e^{i\theta}$, $\rho = \text{const}$. Вдоль этой окружности

$$d\xi = \rho i e^{i\theta} d\theta = i \frac{\xi}{\rho} ds, \quad \frac{d}{ds} = \frac{d\xi}{ds} \frac{d}{d\xi} = i \frac{\xi}{\rho} \frac{d}{d\xi} = -i \frac{\xi}{\rho} \frac{d}{d\bar{\xi}}. \quad (7.5.2)$$

Полагая

$$\Phi_*(\xi) = \varphi'_{0*}(\xi), \quad \Psi_*(\xi) = \psi'_*(\xi),$$

дифференцируя входящие в (7.5.1) функции (при $\rho = \text{const}$) в соответствии с правилами (7.5.2) и переходя к сопряженным величинам, придем к равенству

$$\Phi_*(\zeta) + \bar{\Phi}_*(\zeta) - \zeta \Phi'_*(\zeta) - \frac{\zeta}{\alpha} \Psi_*(\zeta) = A \left[\theta'_0 \left(\ln \rho + \frac{1}{2} \right) + \frac{\theta'_1 + i g'_1}{\zeta} \right]. \quad (7.5.3)$$

Здесь по (7.2.1), (7.2.4) отличны от нуля коэффициенты $\bar{f}_0 = f_0 = \frac{1}{2} A \theta'_0$, $f_1 = A(\theta'_1 - i g'_1)$, $F_0 = \bar{F}_0 = -A \theta'_0 \left(\frac{1}{2} + \ln \alpha \right)$,

$$F_1 = -A \alpha^{-1} (\theta'_1 - i g'_1),$$

и по (7.3.6), (7.37) имеем

$$C_0 = \frac{1}{2} A \theta'_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{1 - \alpha^2} \right), \quad C_1 = \frac{A}{1 + \alpha^2} (\theta'_1 - i g'_1),$$

и выражения функций $\Phi_*(\zeta)$, $\Psi_*(\zeta)$ записываются в виде

$$\Phi_*(\zeta) = A \left[\frac{1}{2} \theta'_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{1 - \alpha^2} \right) + \frac{\theta'_1 - i g'_1}{1 + \alpha^2} \zeta \right],$$

$$\Psi_*(\zeta) = -\frac{A}{\zeta^2} \left[\theta'_0 \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{1 - \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{\theta'_1 + i g'_1}{\zeta} \right].$$

Теперь, сославшись на соотношения (5.9.19), получаем

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= A \left[-\theta'_0 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{1 - \alpha^2} + \frac{1}{2} \ln \zeta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta'_1 - i g'_1}{1 + \alpha^2} \zeta - \frac{1}{2} \frac{\theta'_1 + i g'_1}{\zeta} \right], \\ \Psi(\zeta) &= -\frac{A}{\zeta^2} \left[\frac{\theta'_0}{1 - \alpha^2} \alpha^2 \ln \alpha + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{\theta'_1 + i g'_1}{\zeta} + \frac{1}{2} (\theta'_1 i - g'_1) \zeta \right], \end{aligned} \right\} \quad (7.5.4)$$

и вычисляемые по формулам Колосова — Мусхелишвили напряжения определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= -2A \theta'_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{1 - \alpha^2} + \ln \rho \right) + \\ &+ A(\theta'_1 - i g'_1) \left(\frac{2\zeta}{1 + \alpha^2} - \frac{1}{\zeta} \right) + A(\theta'_1 + i g'_1) \left(\frac{2\bar{\zeta}}{1 + \alpha^2} - \frac{1}{\bar{\zeta}} \right), \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r - i \tau_{r\theta} &= -A \theta'_0 \left[\frac{\alpha^2 \ln \alpha}{1 - \alpha^2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \ln \rho \right] + \\ &+ \frac{A(\theta'_1 + i g'_1)}{\zeta} \left(\frac{\rho^2}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{1}{\rho^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

Напомним, что эти формулы имеют место при любом стационарном распределении температуры в полом круговом цилиндре;

знание температурного поля требуется для вычисления перемещений и напряжения σ_z .

Выражение (7.5.1) коэффициента A предполагает случай плоской деформации (цилиндр); в плоском напряженном состоянии $A = \mu\alpha(1 + \nu)^*$.

7.6. Растяжение кольца сосредоточенными силами. Противоположно направленные растягивающие силы одинаковой величины R приложены в концах ($\rho = \pm 1$, $r = \pm r_0$) горизонтального диаметра наружной окружности кольца ($\alpha \leq \rho \leq 1$); его внутренняя граница ($\rho = \alpha$) не нагружена.

Задача о таком нагружении сплошного диска была рассмотрена в п. 6.1. Функции $\Phi_0(\xi)$, $\Psi_0(\xi)$, определяющие ее решение, легко находятся по (6.1.10):

$$\Phi_0(\xi) = q \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2}, \quad \Psi_0(\xi) = - \frac{4q}{(1 - \xi^2)^2} \quad \left(q = \frac{R}{2\pi r_0} \right). \quad (7.6.1)$$

Изменение знака обусловлено тем, что силы R предположены растягивающими. Вектор напряжения на любой окружности в диске, определяемый по (1.14.9), равен

$$\frac{1}{q} (\sigma_r^0 - i\tau_{r\theta}^0) = 2 \left[\frac{1}{1 - \xi^2} - \frac{\xi^4 - 2\frac{\xi}{\xi} + \xi^2}{(1 - \xi^2)^2} \right], \quad (7.6.2)$$

и легко проверить, что это выражение обращается в нуль на всей окружности $|\xi| = 1$, исключая точки $\xi = \pm 1$ приложения сил. На окружности $\xi = \alpha\sigma$ оно равно

$$\begin{aligned} (\sigma_r^0 - i\tau_{r\theta}^0)_{\xi=\alpha\sigma} &= 2q \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2} - \sigma^2 \frac{\sigma^2\alpha^4 - 2 + \alpha^2}{(1 - \alpha^2\sigma^2)^2} \right] = \\ &= 2q \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^{2k} - \frac{1}{\alpha^2} (\sigma^2\alpha^4 - 2 + \alpha^2) \sum_{k=1}^{\infty} k (\alpha\sigma)^{2k} \right]. \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

В задаче о кольце решение (7.6.1) задачи о диске корректируется слагаемыми $\Phi_1(\xi)$, $\Psi_1(\xi)$:

$$\Phi(\xi) = \Phi_0(\xi) + \Phi_1(\xi), \quad \Psi(\xi) = \Psi_0(\xi) + \Psi_1(\xi). \quad (7.6.4)$$

Краевые условия для корректирующих функций должны выражать отсутствие соответствующих им поверхностных сил на наружной границе кольца:

$$\xi = \sigma: \quad \Phi_1(\sigma) + \overline{\Phi_1}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \sigma\Phi_1'(\sigma) - \sigma^2\Psi_1(\sigma) = 0, \quad (7.6.5)$$

*) Здесь, как и в (7.5.1), конечно, α — коэффициент температурного расширения.

и отсутствие поверхностных сил, определяемых решением $\Phi_0(\xi)$, $\Psi_0(\xi)$:

$$\xi = \alpha\sigma: \quad \Phi_1(\alpha\sigma) + \bar{\Phi}_1\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \alpha\sigma\Phi_1'(\alpha\sigma) - \sigma^2\Psi_1(\alpha\sigma) = \frac{1}{q}(\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{\xi=\alpha\sigma} = -\bar{F}(\theta), \quad (7.6.6)$$

причем $\bar{F}(\theta)$ определено по (7.6.3), а по (7.2.5)

$$\bar{F}_0 = 2q, \quad \bar{F}_{2k} = 2q\alpha^{2k}, \quad \bar{F}_{-2k} = 2q\left[\frac{2-\alpha^2}{\alpha^2}k - (k-1)\right]\alpha^{2k}. \quad (7.6.7)$$

Функция $\Psi_1(\xi)$, согласно (7.2.8) и (7.6.5), задается выражением

$$\Psi_1(\xi) = \frac{1}{\xi^2}\left[\Phi_1(\xi) + \bar{\Phi}_1\left(\frac{1}{\xi}\right) - \xi\Phi_1'(\xi)\right], \quad (7.6.8)$$

а коэффициенты ряда Лорана (7.3.1), определяющего $\Phi_1(\xi)$, находясь из системы уравнений (7.3.4), (7.3.5).

7.7. Способ продолжения. Плоскость ξ разбивается на три области: содержащее упругую среду кольцо L ($\alpha \leq |\xi| \leq 1$), область R_1 ($1 \leq |\xi| \leq \infty$) — плоскость вне единичной окружности γ_0 , область R_2 — круг ($0 \leq |\xi| \leq \alpha$) внутри окружности γ_1 . Преобразование обратными радиусами относительно γ_0 переводит точку $\xi \in L$ в точку $1/\bar{\xi}$ области R_1 (в кольцо этой области $1 \leq |\xi| \leq 1/\alpha$), а относительно γ_1 — в точку $\alpha^2/\bar{\xi}$ области R_2 (кольцо $\alpha^2 \leq |\xi| \leq \alpha$ в ней).

Продолжения $\Phi(\xi)$ в области R_1 и R_2 , определяемые по (6.13.3), представляются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \xi \in R_1: \quad \Phi(\xi) &= -\bar{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{1}{\xi}\bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{1}{\xi^2}\bar{\Psi}\left(\frac{1}{\xi}\right), \\ \xi \in R_2: \quad \Phi(\xi) &= -\bar{\Phi}\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) + \frac{\alpha^2}{\xi}\bar{\Phi}'\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) + \frac{\alpha^2}{\xi^2}\bar{\Psi}\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right). \end{aligned} \right\} \quad (7.7.1)$$

Функция $\Psi(z)$ в L , согласно (6.13.9), определяется двумя способами:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= \frac{1}{\xi^2}\left[\Phi(\xi) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \xi\Phi'(\xi)\right] = \\ &= \frac{\alpha^2}{\xi^2}\left[\Phi(\xi) + \bar{\Phi}\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) - \xi\Phi'(\xi)\right] \quad (\xi \in L) \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

Эти соотношения приводят к «тождеству связи»

$$\xi \in L: \quad (1 - \alpha^2)[\Phi(\xi) - \xi\Phi'(\xi)] + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \alpha^2\bar{\Phi}\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) = 0. \quad (7.7.3)$$

Краевые условия на γ_0 и γ_1 в соответствии с (6.13.6) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi = \sigma = e^{i\theta} \in \gamma_0: \quad \Phi^L(\sigma) - \Phi^{R_1}(\sigma) &= (\sigma_r + i\tau_{r\theta})_{\gamma_0} = f_0(\sigma), \\ \xi = \alpha\sigma = \alpha e^{i\theta} \in \gamma_1: \quad \Phi^L(\sigma) - \Phi^{R_2}(\sigma) &= (\sigma_r + i\tau_{r\theta})_{\gamma_1} = f_1(\sigma), \end{aligned} \right\} \quad (7.7.4)$$

и по (6.13.7) функция $\Phi(\zeta)$ на всей плоскости ζ определяется равенством

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + g(\zeta). \quad (7.7.5)$$

Здесь голоморфная в кольце функция $g(\zeta)$ представима рядом Лорана. Первый интеграл в формуле (7.7.5) непрерывен на γ_1 , второй — на γ_0 . Поэтому на γ_0 и на γ_1 функция $\Phi(\zeta)$ испытывает диктуемые краевыми условиями (7.7.4) разрывы непрерывности.

В тригонометрических рядах, задающих $f_0(\sigma)$, $f_1(\sigma)$, отделим слагаемые $f^+(\sigma)$, содержащие положительные степени σ (включая свободный член σ^0), от слагаемых $f^-(\sigma)$ с отрицательными степенями σ :

$$\left. \begin{aligned} f_0^+(\sigma) &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k, & f_0^-(\sigma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} \sigma^{-k}, \\ f_1^+(\sigma) &= \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k, & f_1^-(\sigma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{-k} \sigma^{-k}, \end{aligned} \right\} \quad (7.7.6)$$

так что

$$f_0(\sigma) = f_0^+(\sigma) + f_0^-(\sigma), \quad f_1(\sigma) = f_1^+(\sigma) + f_1^-(\sigma). \quad (7.7.7)$$

Заметим, что $f_0^+(\sigma)$, $f_1^+(\sigma)$ — значения на γ_0 , γ_1 функций $f_0^+\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)$, $f_1^+\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)$, голоморфных внутри γ_0 и соответственно γ_1 ; точно так же $f_0^-(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$ — контурные значения функций $f_0^-\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)$, $f_1^-\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)$, голоморфных вне γ_0 , γ_1 .

Имея это в виду и применяя правила вычисления интегралов Коши (п. 5 10), получаем следующие представления функции $\Phi(\zeta)$:

$$\left. \begin{aligned} \zeta \in R_1: & \quad \Phi(\zeta) = -f_0^-\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) + f_1^-\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) + g(\zeta), \\ \zeta \in L: & \quad \Phi(\zeta) = f_0^+\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) + f_1^-\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) + g(\zeta), \\ \zeta \in R_2: & \quad \Phi(\zeta) = f_0^+\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) - f_1^+\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) + g(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (7.7.8)$$

и это вполне согласуется с краевыми условиями (7.7.4).

Переходим к записи тождества связи (7.7.3); входящие в него функции $\overline{\Phi}(1/\zeta)$, $\overline{\Phi}(\alpha^2/\zeta)$ определяются по выражениям $\Phi(\zeta)$ для $\zeta \in R_1$, $\zeta \in R_2$, если в них заменить ζ на $1/\zeta$ и

соответственно на α^2/ξ , возвращаясь тем самым в область L . Получаем

$$\xi \in L: \quad \begin{cases} \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\xi}\right) = -\bar{f}_0^-\left(\frac{1}{\xi}\right) + \bar{f}_1^-\left(\frac{1}{\alpha\xi}\right) + \bar{g}\left(\frac{1}{\xi}\right), \\ \bar{\Phi}\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) = \bar{f}_0^+\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) - \bar{f}_1^+\left(\frac{\alpha}{\xi}\right) + \bar{g}\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right), \end{cases} \quad (7.7.9)$$

и подстановка в (7.7.3) дает равенство

$$(1 - \alpha^2) [\Phi(\xi) - \xi\Phi'(\xi)] + \left[-\bar{f}_0^-\left(\frac{1}{\xi}\right) + \bar{f}_1^-\left(\frac{1}{\alpha\xi}\right) + \bar{g}\left(\frac{1}{\xi}\right) \right] - \\ - \alpha^2 \left[\bar{f}_0^+\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) - \bar{f}_1^+\left(\frac{\alpha}{\xi}\right) + \bar{g}\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) \right] = 0 \quad (\xi \in L).$$

Из него можно исключить функцию g , определив ее по выражению для $\Phi(\xi)$ при $\xi \in L$:

$$\xi \in L: \quad \begin{cases} \bar{g}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \bar{\Phi}^\times\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{f}_0^+\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{f}_1^-\left(\frac{1}{\alpha\xi}\right), \\ \bar{g}\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) = \bar{\Phi}^\times\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) - \bar{f}_0^+\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) - \bar{f}_1^-\left(\frac{\alpha}{\xi}\right), \end{cases} \quad (7.7.10)$$

причем $\bar{\Phi}^\times(1/\xi)$, $\bar{\Phi}^\times(\alpha^2/\xi)$ — результат формальной замены в $\bar{\Phi}(\xi)$ для $\xi \in L$ переменной ξ соответственно на $1/\xi$, α^2/ξ (см. п. 6.13).

Используя обозначение (7.7.7), приходим к функциональному уравнению для $\Phi(\xi)$

$$\xi \in L: \quad (1 - \alpha^2) [\Phi(\xi) - \xi\Phi'(\xi)] + \\ + \left[\bar{\Phi}^\times\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{f}_0\left(\frac{1}{\xi}\right) \right] - \alpha^2 \left[\bar{\Phi}^\times\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) - \bar{f}_1\left(\frac{\alpha}{\xi}\right) \right] = 0. \quad (7.7.11)$$

Из него легко получить уравнения, определяющие коэффициенты ряда Лорана этой функции:

$$\Phi(\xi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \xi^n + C_{-n} \xi^{-n}). \quad (7.7.12)$$

Подставив его в (7.7.11), получим

$$(1 - \alpha^2) \left\{ C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(1 - n) C_n \xi^n + (1 + n) C_{-n} \xi^{-n}] \right\} + \\ + (1 - \alpha^2) \bar{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{C}_n \xi^{-n} + C_{-n} \xi^n) - \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{C}_n \alpha^{2n} \xi^{-n} + \bar{C}_{-n} \alpha^{-2n} \xi^n) = \\ = \bar{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_n \xi^{-n} + \bar{\alpha}_{-n} \xi^n) - \alpha^2 \left[\bar{\beta}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\beta}_n \alpha^n \xi^{-n} + \bar{\beta}_{-n} \alpha^{-n} \xi^n) \right]. \quad (7.7.13)$$

Приравнивая коэффициенты при ξ^0 , ξ^1 , ξ^{-1} слева и справа, получаем

$$\left. \begin{aligned} (1 - \alpha^2)(C_0 + \bar{C}_0) &= \bar{\alpha}_0 - \alpha^2 \bar{\beta}_0, \quad \bar{\alpha}_{-1} - \alpha \bar{\beta}_{-1} = 0, \\ (1 - \alpha^2) 2C_{-1} + \bar{C}_1 (1 - \alpha^4) &= \bar{\alpha}_1 - \alpha^3 \bar{\beta}_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.7.14)$$

Наконец, сравнение слагаемых при ξ^n , ξ^{-n} при $n = 2, 3, \dots$ приводит к уравнениям (в уравнении для коэффициентов при ξ^{-n} переходим к сопряженным величинам)

$$\left. \begin{aligned} (1 - \alpha^2)(1 - n)C_n + \bar{C}_{-n}(1 - \alpha^{-2n+2}) &= \bar{\alpha}_{-n} - \alpha^{-n+2} \bar{\beta}_{-n}, \\ (1 - \alpha^{2n+2})C_n + (1 - \alpha^2)(1 + n)\bar{C}_{-n} &= \alpha_n - \alpha^{n+2} \beta_n. \end{aligned} \right\} \quad (7.7.15)$$

Эти уравнения (если учесть отличия обозначений) совпадают с (7.3.5). Эта система уравнений позволяет определить все коэффициенты C_n , C_{-n} при $n \geq 2$, так как ее определитель

$$\Delta_1 = \alpha^2(\alpha^n - \alpha^{-n})^2 - n^2(1 - \alpha^2)^2 \quad (7.7.16)$$

отличен от нуля.

Уравнения статики, выражающие обращение в нуль главного момента и главного вектора распределенных по γ_0 , γ_1 поверхностных сил, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} [\tau_{r\theta} |_{\gamma_0} - \alpha^2 \tau_{r\theta} |_{\gamma_1}] d\theta &= \frac{\pi}{i} [(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0) - \alpha^2 (\beta_0 - \bar{\beta}_0)] = 0, \\ \operatorname{Im}(\alpha_0 - \alpha^2 \beta_0) &= 0, \\ \int_0^{2\pi} [(\sigma_r + i\tau_{r\theta}) |_{\gamma_0} - \alpha(\sigma_r + i\tau_{r\theta}) |_{\gamma_1}] e^{i\theta} d\theta &= 2\pi(\alpha_{-1} - \alpha \beta_{-1}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.7.17)$$

Они соответствуют первому и второму уравнениям (7.7.14) и являются условиями существования решения. Из уравнений (7.7.15) имеем

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\Delta_1} [(1 - \alpha^2)(1 + n)(\bar{\alpha}_{-n} - \alpha^{-n+2} \bar{\beta}_{-n}) - \\ &\quad - (1 - \alpha^{-2n+2})(\alpha_n - \alpha^{n+2} \beta_n)], \\ C_{-n} &= \frac{1}{\Delta_1} [-(1 - \alpha^{2n+2})(\alpha_{-n} - \alpha^{-n+2} \beta_{-n}) + \\ &\quad + (1 - \alpha^2)(1 - n)(\bar{\alpha}_n - \alpha^{n+2} \bar{\beta}_n)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.7.18)$$

Третье уравнение (7.7.14), связывающее два неизвестных C_{-1} , \bar{C}_1 , должно быть дополнено по (5.4.15) соотношением

$$C_{-1} = -\frac{X + iY}{8\pi(1 - \nu)}. \quad (7.7.19)$$

вывод которого основывался на требовании однозначности перемещений. Получаем

$$C_1 = \frac{X - iY}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha^3\beta_1}{1-\alpha^4}. \quad (7.7.20)$$

Функция $\Psi(\xi)$, определяемая, например, первым равенством (7.7.2), составляется заменой в нем $\Phi(1/\xi)$ по (7.7.9)

$$\xi^2\Psi(\xi) = \Phi(\xi) - \xi\Phi'(\xi) - \bar{f}_0\left(\frac{1}{\xi}\right) + \bar{f}_1\left(\frac{1}{\alpha\xi}\right) + \bar{g}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

и последующей заменой $\bar{g}(1/\xi)$ по (7.7.10). Получаем

$$\xi \subset L: \quad \xi^2\Psi(\xi) = \Phi(\xi) - \xi\Phi'(\xi) + \bar{\Phi}^\times\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{f}_0\left(\frac{1}{\xi}\right). \quad (7.7.21)$$

С помощью второго равенства (7.7.2) получили бы

$$\xi \subset L: \quad \xi^2\Psi(\xi) = \alpha^2 \left[\Phi(\xi) - \xi\Phi'(\xi) + \bar{\Phi}^\times\left(\frac{\alpha^2}{\xi}\right) - \bar{f}_1\left(\frac{\alpha}{\xi}\right) \right],$$

что совпадает с (7.7.21) вследствие (7.7.11). При таких определениях $\Psi(\xi)$ выполняются краевые условия, записываемые по (1.14.9):

$$\begin{aligned} \xi = \sigma \subset \gamma_0: \quad \Phi(\sigma) - \sigma\Phi'(\sigma) + \bar{\Phi}^\times\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \sigma^2\Psi(\sigma) &= \bar{f}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ &= \bar{\alpha}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_n\sigma^{-n} + \bar{\alpha}_{-n}\sigma^n) = (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{\gamma_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi = \alpha\sigma \subset \gamma_1: \quad \Phi(\alpha\sigma) - \alpha\sigma\Phi'(\sigma) + \bar{\Phi}^\times\left(\frac{\alpha^2}{\sigma}\right) - \sigma^2\Psi(\sigma) &= \bar{f}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ &= \bar{\beta}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\beta}_n\sigma^{-n} + \bar{\beta}_{-n}\sigma^n) = (\sigma_r - i\tau_{r\theta})_{\gamma_1}, \end{aligned}$$

что и требуется.

Как ожидалось, результаты применения способа продолжения тождественны с теми, которые можно получить непосредственно построением функций Φ , Ψ по краевым условиям. Однако для некоторых частных случаев нагружения этот способ, сводящийся к рассмотрению одного лишь функционального уравнения (7.7.11), быстрее ведет к цели.

§ 8. Применение конформного преобразования

8.1. Бесконечная плоскость с отверстием. Краевое условие на контуре отверстия Γ в предположении, что заданные напряжения на бесконечности ограничены, то (5.4.15), (5.4.17)

записывается в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + [z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z})] \frac{d\bar{z}}{dz} = \\ = - (F_n + iF_t) + \frac{X + iY}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1}{z} - (3-4\nu) \frac{1}{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz} \right] + \\ + \frac{X - iY}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{z}{\bar{z}^2} \right) \frac{d\bar{z}}{dz} - \frac{1}{2} [\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty + (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{2i\alpha} \frac{d\bar{z}}{dz}]. \quad (8.1.1) \end{aligned}$$

Здесь $-(F_n + iF_t) = (F_x + iF_y)\bar{n}$ — вектор поверхностных сил на площадке с нормалью n к Γ , направленной внутрь среды; $X + iY$ — главный вектор поверхностных сил $F_x + iF_y$; $\sigma_1^\infty, \sigma_2^\infty$ — главные напряжения на бесконечном удалении от отверстия; α — угол первого главного направления с осью Ox ; z и \bar{z} связаны уравнением контура Γ . Функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ голоморфны в L (плоскости вне отверстия), а их разложения в ряды по степеням z^{-1} начинаются со слагаемого z^{-2} *).

Предполагается, что известно конформное преобразование области $|\xi| > 1$ вне единичного круга плоскости ξ на рассматриваемую область L ; оно дается соотношением вида (5.4.1):

$$z = \omega(\xi) = c_0\xi + \frac{c_1}{\xi} + \frac{c_2}{\xi^2} + \dots = c_0\xi + m(\xi) \quad (c_0 \neq 0), \quad (8.1.2)$$

причем $\omega'(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \geq 1$, а c_0 вещественно. Функция $m(\xi)$ голоморфна при $|\xi| > 1$. Далее будет показана разрешимость задачи конечным числом действий, когда $m(\xi)$ представляет полином от ξ^{-1} ; предполагается, что это условие выполнено, а степень полинома обозначается n .

Используя обозначения (5.2.13) и учитывая, что на Γ $z = \omega(\sigma)$, $\bar{z} = \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$, $dz = \omega'(\sigma)d\sigma$, $d\bar{z} = -\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma^2}$, (8.1.3)

можно преобразовать теперь краевое условие (8.1.1) к виду на γ , $\xi = \sigma = e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \omega'(\sigma)\Phi_1(\sigma) + \omega'(\sigma)\bar{\Phi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{\omega(\sigma)}{\sigma^2}\bar{\Phi}_1'\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma^2}\bar{\Psi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ = -f(\theta)\omega'(\sigma) + \frac{X + iY}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{\omega'(\sigma)}{\omega(\sigma)} + (3-4\nu) \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma^2\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \right] + \\ + \frac{X - iY}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{\omega'(\sigma)}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\omega(\sigma)}{\bar{\omega}^2\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] - \frac{1}{2} \left[(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty)\omega'(\sigma) - \right. \\ \left. - (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)e^{2i\alpha} \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma^2} \right] \quad (f(\theta) = F_n + iF_t). \quad (8.1.4) \end{aligned}$$

*) В п. 5.4 они обозначались через Φ_{**} , Ψ_{**} .

Можно несколько упростить эту запись, учитывая, что

$$\frac{1}{\omega(\xi)} = \frac{1}{c_0 \xi} - \frac{m(\xi)}{c_0 \xi \omega(\xi)},$$

и введя в рассмотрение функции

$$\begin{aligned}\Phi_*(\xi) &= \Phi_1(\xi) + \frac{X + iY}{8\pi(1-\nu)} \frac{m(\xi)}{c_0 \omega(\xi) \xi}, \\ \Psi_*(\xi) &= \Psi_1(\xi) - \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)} (X - iY) \frac{m(\xi)}{c_0 \omega(\xi) \xi},\end{aligned}\quad (8.1.5)$$

также голоморфные и обращающиеся на бесконечности в нуль не медленнее, чем ξ^{-2} . Краевое условие (8.1.4) запишется в виде

$$\begin{aligned}\omega'(\sigma) \Phi_*(\sigma) + \omega'(\sigma) \bar{\Phi}_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{\omega(\sigma)}{\sigma^2} \bar{\Phi}'_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma^2} \bar{\Psi}_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ = -\bar{f}(\theta) \omega'(\sigma) + \frac{X + iY}{8\pi(1-\nu) c_0 \sigma} \left[\omega'(\sigma) + (3-4\nu) \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] + \\ + \frac{X - iY}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{\omega'(\sigma) \sigma}{c_0} + \frac{\omega(\sigma)}{c_0} \right) - \\ - \frac{1}{2} \left[(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) \omega'(\sigma) - (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{2i\alpha} \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma^2} \right] = -F(\theta),\end{aligned}\quad (8.1.6)$$

и сопряженное условие будет

$$\begin{aligned}\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \bar{\Phi}_*\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \Phi_*(\sigma) - \sigma^2 \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \Phi'_*(\sigma) - \sigma^2 \omega'(\sigma) \Psi_*(\sigma) = \\ = -\bar{f}(\theta) \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{X - iY}{8\pi(1-\nu)} \frac{\sigma}{c_0} \left[\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + (3-4\nu) \omega'(\sigma) \right] + \\ + \frac{X + iY}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1}{\sigma c_0} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{c_0} \right] - \\ - \frac{1}{2} \left[(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) - (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{-2i\alpha} \sigma^2 \omega'(\sigma) \right] = -\bar{F}(\theta).\end{aligned}\quad (8.1.7)$$

8.2. Способ интегралов Коши. Вспомнив характер разложений искомых функций

$$\begin{aligned}\Phi_*(\xi) &= \frac{a_2}{\xi^2} + \frac{a_3}{\xi^3} + \dots + \frac{a_n}{\xi^n} + \dots, \\ \Psi_*(\xi) &= \frac{a'_2}{\xi^2} + \frac{a'_3}{\xi^3} + \dots + \frac{a'_n}{\xi^n} + \dots,\end{aligned}\quad (8.2.1)$$

легко выяснить поведение в области $|\xi| > 1$ функций

$$\omega'(\xi) \bar{\Phi}_*\left(\frac{1}{\xi}\right) - \frac{\omega(\xi)}{\xi^2} \bar{\Phi}'_*\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{d}{d\xi} \omega(\xi) \bar{\Phi}_*\left(\frac{1}{\xi}\right); \quad \frac{1}{\xi^2} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \bar{\Psi}_*\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

входящих через их краевые значения в условие (8.1.6). Имеем

$$\begin{aligned}\omega(\xi) \bar{\Phi}_* \left(\frac{1}{\xi} \right) &= \\ &= \left(c_0 \xi + \frac{c_1}{\xi} + \frac{c_2}{\xi^2} + \dots + \frac{c_n}{\xi^n} \right) (\bar{a}_2 \xi^2 + \bar{a}_3 \xi^3 + \dots + \bar{a}_n \xi^n + \dots) = \\ &= c_3 \bar{a}_2 \frac{1}{\xi} + c_4 \left(\frac{\bar{a}_2}{\xi^2} + \frac{\bar{a}_3}{\xi} \right) + \dots \\ &\dots + c_n \left(\frac{\bar{a}_2}{\xi^{n-2}} + \frac{\bar{a}_3}{\xi^{n-3}} + \dots + \frac{\bar{a}_{n-1}}{\xi} \right) + Z(\xi), \quad (8.2.2)\end{aligned}$$

причем $Z(\xi)$ — голоморфная в круге $|\xi| < 1$ функция (ее разложение в ряд содержит только неотрицательные степени ξ). Итак,

$$\frac{d}{d\xi} \omega(\xi) \bar{\Phi}_* \left(\frac{1}{\xi} \right) = p_{n-1} \left(\frac{1}{\xi} \right) + Z'(\xi), \quad (8.2.3)$$

где $p_{n-1}(1/\xi)$ — полином $(n-1)$ -й степени по ξ^{-1} , зависящий линейно от неизвестных коэффициентов a_2, \dots, a_{n-1} :

$$\begin{aligned}p_{n-1} \left(\frac{1}{\xi} \right) &= - \left\{ c_3 \bar{a}_2 \frac{1}{\xi^2} + c_4 \left(\frac{2\bar{a}_2}{\xi^3} + \frac{\bar{a}_3}{\xi^2} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + c_n \left[(n-2) \frac{\bar{a}_2}{\xi^{n-1}} + \dots + \frac{\bar{a}_{n-1}}{\xi^2} \right] \right\}. \quad (8.2.4)\end{aligned}$$

Разложение в степенной ряд функции $\frac{1}{\xi^2} \bar{\omega}' \left(\frac{1}{\xi} \right) \bar{\Psi}_* \left(\frac{1}{\xi} \right)$ содержит только неотрицательные, а $\bar{\omega}'(\xi) \Phi_*(\xi)$ — только отрицательные степени ξ .

Функция, соответствующая слагаемым левой части сопряженного краевого условия, представляется в виде

$$\frac{d}{d \left(\frac{1}{\xi} \right)} \bar{\omega} \left(\frac{1}{\xi} \right) \Phi_*(\xi) = \bar{\omega}' \left(\frac{1}{\xi} \right) \Phi_*(\xi) - \xi^2 \bar{\omega} \left(\frac{1}{\xi} \right) \Phi'_*(\xi) = \bar{p}_{n-1}(\xi) + \bar{Z}' \left(\frac{1}{\xi} \right), \quad (8.2.5)$$

тогда как функции

$$\bar{\omega}' \left(\frac{1}{\xi} \right) \bar{\Phi}_* \left(\frac{1}{\xi} \right), \quad \xi^2 \bar{\omega}'(\xi) \Psi_*(\xi)$$

представимы: первая — рядом, содержащим только положительные степени, а вторая — по отрицательным степеням с главной частью $c_0 a'_2$ на бесконечности.

Сославшись теперь на правила вычисления интегралов типа Коши в п. 5.10, имеем

$$\left. \begin{aligned} |\xi| > 1: \quad & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \omega'(\sigma) \Phi_*(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} = \omega'(\xi) \Phi_*(\xi), \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[p_{n-1}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + Z'(\sigma) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} = p_{n-1}\left(\frac{1}{\xi}\right), \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \frac{\bar{\Psi}_*\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} = 0, \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \bar{\Phi}_*\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma - \xi} d\sigma = 0, \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\sigma^2 \omega'(\sigma) \Psi_*(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = \xi^2 \omega'(\xi) \Psi_*(\xi) - c_0 a'_2, \\ & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left[\bar{p}_{n-1}(\sigma) + \bar{Z}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} = \bar{Z}'\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{Z}'_0 = \\ & = \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \Phi_*(\xi) - \xi^2 \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \Phi'_*(\xi) - \bar{p}_{n-1}(\xi) - \bar{Z}'_0, \end{aligned} \right\} \quad (8.2.6)$$

причем \bar{Z}'_0 — главную часть функции $\bar{Z}'(1/\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$ — легко выразить, возвращаясь к (8.2.2):

$$Z'_0 = c_1 \bar{a}_2 + c_2 \bar{a}_3 + \dots + c_n \bar{a}_{n+1}, \quad \bar{Z}'_0 = \bar{c}_1 a_2 + \bar{c}_2 a_3 + \dots + \bar{c}_n a_{n+1}. \quad (8.2.7)$$

Собрав эти результаты, придем к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \omega'(\xi) \Phi_*(\xi) + p_{n-1}\left(\frac{1}{\xi}\right) &= - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma, \\ \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \Phi_*(\xi) - \xi^2 \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \Phi'_*(\xi) - \bar{p}_{n-1}(\xi) - \bar{Z}'_0 - \\ &- \xi^2 \omega'(\xi) \Psi_*(\xi) + c_0 a'_2 = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{F}(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.8)$$

Их правые части, вычисляемые по тем же правилам п. 5.10, известны. Систему уравнений, определяющих входящие в левые части неизвестные коэффициенты $a_2, \bar{a}_2, \dots, a_{n+1}, a'_2$, можно получить сравнением коэффициентов в разложениях по степеням $1/\xi$ правой и левой частей равенств (8.2.8). Это будет далее пояснено на примерах.

8.3. Эллиптическое отверстие. Конформное преобразование области $|\xi| > 1$ на плоскость с эллиптическим отверстием дается функцией

$$z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{m}{\xi} \right) \quad (R > 0, 0 \leq m \leq 1), \quad (8.3.1)$$

причем окружности $|\xi| = 1$ соответствует эллипс с полуосями

$$a = R(1 + m), \quad b = R(1 - m),$$

обращающийся в окружность при $m = 0$; значению $m = 1$ соответствует преобразование области $|\xi| > 1$ в плоскость, разрезанную по отрезку $(-2R, 2R)$.

Отметим, что производная преобразующей функции

$$\omega'(\xi) = R \left(1 - \frac{m}{\xi^2} \right) \quad (8.3.2)$$

не обращается в нуль при $|\xi| \geq 1$, если $m < 1$. При $m = 1$ она становится нулем при $\xi = \pm 1$, что соответствует наличию на контуре области «угловых точек» — концов $-2R, 2R$ разреза.

Далее предполагается, что по краю отверстия действует постоянное нормальное давление p и известно напряженное состояние на бесконечности. Тогда $X + iY = 0$ и по (8.1.6)

$$-F(\theta) = - \left[p + \frac{1}{2}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) \right] \omega'(\sigma) + \frac{1}{2}(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma^2} e^{2i\alpha}, \quad (8.3.3)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta) d\sigma}{\sigma - \xi} &= \frac{Rm}{\xi^2} \left[p + \frac{1}{2}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) \right] + \\ &+ \frac{R}{2\xi^2} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{2i\alpha}, \\ \oint \frac{\bar{F}(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.4)$$

Повторив вычисление, представленное в общем виде формулой (8.2.2), имеем

$$p_{n-1} = 0, \quad \bar{Z}'_0 = Rma_2$$

и по (8.2.8) получим

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{m}{\xi^2} \right) \Phi_*(\xi) &= \frac{m}{\xi^2} \left[p + \frac{1}{2}(\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) \right] + \frac{1}{2\xi^2} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{2i\alpha}, \\ (1 - m\xi^2) \Phi_*(\xi) - \xi^2 \left(\frac{1}{\xi} + m\xi \right) \Phi'_*(\xi) - ma_2 - \\ &- (\xi^2 - m) \Psi_*(\xi) + a'_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.5)$$

Сравнение не зависящих от σ слагаемых, например, во втором краевом условии (8.1.7), принимающем в случае эллиптического отверстия вид

$$\begin{aligned} (1 - m\sigma^2) \bar{\Phi}_* \left(\frac{1}{\sigma} \right) + (1 - m\sigma^2) \Phi_*(\sigma) - \\ - \sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma \right) \Phi'_*(\sigma) - (\sigma^2 - m) \Psi(\sigma) = \\ = - \left[p + \frac{1}{2} (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) \right] (1 - m\sigma^2) + \frac{1}{2} (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) (\sigma^2 - m) e^{-2i\alpha}, \end{aligned}$$

дает

$$ma_2 - a'_2 = - \left[p + \frac{1}{2} (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty) \right] - \frac{1}{2} m (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty) e^{-2i\alpha}. \quad (8.3.6)$$

Теперь $\Phi_*(\zeta)$, $\Psi_*(\zeta)$ вполне определены. Приводимые ниже результирующие формулы составлены по отдельности для двух случаев:

1°. Напряжения на бесконечности отсутствуют, по краю отверстия действует постоянное нормальное давление

$$\Phi_*(\zeta) = \frac{mp}{\zeta^2 - m}, \quad \Psi_*(\zeta) = \frac{p}{\zeta^2 - m} + \frac{mp}{(\zeta^2 - m)^3} [m\zeta^4 + (3 + m^2)\zeta^2 - m]. \quad (8.3.7)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \sigma_\theta + \sigma_\rho = 2 [\Phi_*(\zeta) + \bar{\Phi}_*(\bar{\zeta})] = 2mp \left(\frac{1}{\zeta^2 - m} + \frac{1}{\bar{\zeta}^2 - m} \right) = \\ = 4mp \frac{\rho^2 \cos 2\theta - m}{\rho^4 - 2mp^2 \cos 2\theta + m^2}. \end{aligned}$$

На контуре эллипса $\rho = 1$, $\sigma_\rho = -p$, так что

$$\sigma_\theta|_{\rho=1} = 4mp \frac{\cos 2\theta - m}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} + p.$$

Максимум достигается в концах большой полуоси ($\theta = 0$) и оказывается равным

$$\frac{1}{p} \sigma_\theta \Big|_{\substack{\rho=1 \\ \theta=0}} = \frac{4m}{1-m} + 1 = 2 \frac{a}{b} - 1. \quad (8.3.8)$$

2°. Край отверстия свободен, $\sigma_1^\infty = q$, $\sigma_2^\infty = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \Phi_*(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{m - e^{2i\alpha}}{\zeta^2 - m}, \\ \frac{1}{q} \Psi_*(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{m + e^{-2i\alpha}}{\zeta^2 - m} + \frac{1}{2} \frac{m - e^{2i\alpha}}{(\zeta^2 - m)^3} [m\zeta^4 + (3 + m)\zeta^2 - m] \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

и по (5.4.15)

$$\frac{1}{q} \Phi(\zeta) = \frac{1}{4} \frac{\zeta^2 + m - 2e^{2i\alpha}}{\zeta^2 - m}, \quad \frac{1}{q} \Psi(\zeta) = \frac{1}{q} \Psi_*(\zeta) - \frac{1}{2} e^{-2i\alpha}. \quad (8.3.10)$$

Получаем

$$\frac{1}{q}(\sigma_p + \sigma_\theta) = \frac{\rho^4 - 2\rho^2 \cos(2\theta - 2\alpha) - m^2 + 2m \cos 2\alpha}{\rho^4 - 2m\rho^2 \cos 2\theta + m^2}. \quad (8.3.11)$$

и на контуре отверстия

$$\frac{1}{q}(\sigma_\theta)_{\rho=1} = \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha - 2\cos(2\theta - 2\alpha)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2}. \quad (8.3.12)$$

8.4. Гипотрохонидное отверстие. С помощью функции

$$z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{m}{n\xi^n} \right) \quad (0 < m < 1)$$

область $|\xi| > 1$ вне единичного круга конформно преобразуется в область L плоскости z вне отверстия, образуемого контуром Γ — гипотрохой *):

$$z = R \left(\sigma + \frac{m}{n\sigma^n} \right),$$

$$x = R \left(\cos \theta + \frac{m}{n} \cos n\theta \right),$$

$$y = R \left(\sin \theta - \frac{m}{n} \sin n\theta \right). \quad (8.4.1)$$

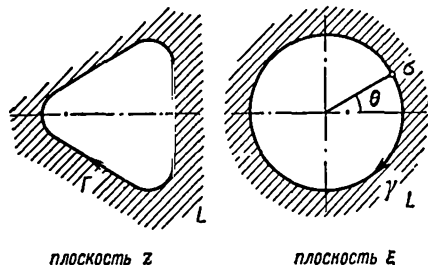


Рис. 44.

При $n = 1$ возвращаемся к случаю эллипса, при целых $n > 1$ получаем кривые, представляющие правильные криволинейные многоугольники со скругленными углами, — треугольник при $n = 2$, квадрат при $n = 3$ и т. д. (рис. 44).

По (8.2.2), (8.2.7) имеем теперь

$$p_{n-1} \left(\frac{1}{\xi} \right) = -\frac{Rm}{n} \left(\bar{a}_2 \frac{n-2}{\xi^{n-1}} + \bar{a}_3 \frac{n-3}{\xi^{n-2}} + \dots + \frac{\bar{a}_{n-1}}{\xi^2} \right), Z'_0 = \frac{Rm}{n} a_{n+1}, \quad (8.4.2)$$

и выражения функций $\Phi_*(\xi)$, $\Psi_*(\xi)$ по (8.2.8) записываются в виде

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{m}{\xi^{n+1}} \right) \Phi_*(\xi) - \frac{m}{n} \left(\bar{a}_2 \frac{n-2}{\xi^{n-1}} + \bar{a}_3 \frac{n-3}{\xi^{n-2}} + \dots + \frac{\bar{a}_{n-1}}{\xi^2} \right) = \\ = -\frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma, \\ (1 - m\xi^{n+1})\Phi_*(\xi) - \left(\xi + \frac{m}{n} \xi^{n+2} \right) \Phi'_*(\xi) + \\ + \frac{m}{n} [a_2(n-2)\xi^{n-1} + a_3(n-3)\xi^{n-2} + \dots + a_{n-1}\xi^2] - \\ - \frac{m}{n} a_{n+1} - \xi^2 \left(1 - \frac{m}{\xi^{n+1}} \right) \Psi_*(\xi) + a'_2 = -\frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \frac{\bar{F}(\theta)}{\sigma - \xi} d\sigma. \quad (8.4.3) \end{aligned}$$

*) Гипотрохонда — геометрическое место точки на круге, катящемся внутри неподвижного круга.

Ограничимся далее рассмотрением случая ненагруженного края отверстия и задания напряженного состояния на бесконечности, в котором, чтобы не загромождать записей, примем $\sigma_2^\infty = 0$, $\alpha = 0$.

Тогда

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \sigma_1^\infty R \left[1 - \frac{m}{\sigma^{n+1}} + \frac{1}{\sigma^2} (1 - m\sigma^{n+1}) \right],$$

$$- \frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta) d\sigma}{\sigma - \xi} = \frac{1}{2} \sigma_1^\infty \left(\frac{m}{\xi^{n+1}} - \frac{1}{\xi^2} \right),$$

$$- \frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \frac{\bar{F}(\theta) d\sigma}{\sigma - \xi} = \frac{1}{2} \sigma_1^\infty \frac{m}{\xi^{n-1}} \quad (n > 1)$$

и по (8.4.3)

$$\left(1 - \frac{m}{\xi^{n+1}} \right) \left(\frac{a_2}{\xi^2} + \frac{a_3}{\xi^3} + \dots + \frac{a_n}{\xi^n} + \dots \right) -$$

$$- \frac{m}{n} \left(\bar{a}_2 \frac{n-2}{\xi^{n-1}} + \bar{a}_3 \frac{n-3}{\xi^{n-2}} + \dots + \bar{a}_{n-1} \frac{1}{\xi^2} \right) = \frac{1}{2} \sigma_1^\infty \left(\frac{m}{\xi^{n+1}} - \frac{1}{\xi^2} \right).$$

Сравнение коэффициентов при ξ^{-2} , ξ^{-n+1} приводит к системе уравнений

$$a_2 - \frac{m}{n} \bar{a}_{n-1} = -\frac{1}{2} \sigma_1^\infty, \quad -\frac{m}{n} \bar{a}_2 (n-2) + a_{n-1} = 0.$$

Остальные коэффициенты a_3, a_4, \dots, a_{n-2} равны нулю. Этим определяется полином $p_{n-1} \left(\frac{1}{\xi} \right)$:

$$p_{n-1} \left(\frac{1}{\xi} \right) = \frac{1}{2} \sigma_1^\infty \frac{Rmn(n-2)}{n^2 - m^2(n-2)} \left(\frac{1}{\xi^{n-1}} + \frac{m}{n} \frac{1}{\xi^2} \right) \quad (8.4.4)$$

и, далее, функция $\Phi_*(\xi)$:

$$\Phi_*(\xi) = \frac{1}{2} \sigma_1^\infty \left(\frac{m - \xi^{n-1}}{\xi^{n+1} - m} - \frac{m(n-2)}{n^2 - m^2(n-2)} \frac{n\xi^2 + m\xi^{n-1}}{\xi^{n+1} - m} \right). \quad (8.4.5)$$

Остается найти входящую во второе уравнение (8.2.8) постоянную a'_2 ; это достигается сравнением свободных членов в одном из краевых условий (8.1.6), (8.1.7); имеем

$$a'_2 = \frac{m}{n} a_{n+1} + \frac{1}{2} \sigma_1^\infty = \frac{1}{2} \sigma_1^\infty \left(\frac{m^2}{n} + 1 \right), \quad \bar{Z}'_0 = \frac{1}{2} \sigma_1^\infty \frac{m^2}{n}. \quad (8.4.6)$$

Этим вполне определяется функция $\Psi_*(\xi)$:

$$\xi^2 \left(1 - \frac{m}{\xi^{n+1}} \right) \Psi_*(\xi) = \frac{1}{2} \sigma_1^\infty \left(1 - \frac{m}{\xi^{n-1}} \right) + (1 - m\xi^{n+1}) \Phi_*(\xi) -$$

$$- \left(\xi + \frac{m}{n} \xi^{n+2} \right) \Phi'_*(\xi) - \frac{1}{2} \sigma_1^\infty \frac{mn(n-2)}{n^2 - m^2(n-2)} \left(\xi^{n-1} + \frac{m}{n} \xi^2 \right). \quad (8.4.7)$$

Вычисление напряжений требует теперь лишь проведения громоздких алгебраических выкладок. Достаточно просто, как всегда, находится сумма нормальных напряжений, а по ней значение σ_θ на контуре отверстия:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{1 + m^2 - 2m \cos(n+1)\theta} \left\{ (\sigma_1^\infty + \sigma_2^\infty)(1 - m^2) + \right. \\ \left. + \frac{2n(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty)}{n^2 - (n-2)m^2} [(n - m^2n + 2m^2) \cos 2(\alpha - \theta) - 2m \cos(2\alpha + n\theta - \theta)] \right\} \\ (n = 2, 3, \dots).$$

Здесь $\sigma_1^\infty, \sigma_2^\infty$ — главные напряжения на бесконечности, α — угол оси σ_1^∞ с осью x .

8.5. Односвязная конечная область. Конформное преобразование единичного круга $|\xi| \leq 1$ на рассматриваемую область, ограниченную гладким замкнутым контуром Γ , дается голоморфной в круге функций $\omega(\xi)$:

$$z = \omega(\xi) = c_1\xi + c_2\xi^2 + \dots,$$

причем c_1 можно считать вещественным числом, а $\omega'(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \leq 1$. Далее будем считать, что $\omega(\xi)$ — полином n -й степени. Тогда, как и в случае бесконечной области с отверстием, решение задачи может быть получено в конечном виде.

Краевые условия по (5.2.15) записываются (при нескольких измененных обозначениях) в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega'(\sigma) \Phi(\sigma) + \frac{d}{d\sigma} \omega(\sigma) \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma^2} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \overline{\Psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ = (F_n + iF_t) \omega'(\sigma) = F(\theta), \\ \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{d}{d\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \Phi(\sigma) - \sigma^2 \omega'(\sigma) \Psi(\sigma) = \\ = (F_n - iF_t) \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \bar{F}(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (8.5.1)$$

Здесь по (5.2.9)

$$F_n + iF_t = \bar{n}(F_x + iF_y),$$

где $F_x + iF_y$ — вектор поверхностных сил, а F_n, F_t — его проекции на внешнюю нормаль и касательную к Γ . Главный вектор

поверхностных сил, вычисляемый с помощью формул (5.2.6), (5.2.7), представляется в виде

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (F_x + iF_y) ds &= \oint_{\Gamma} (F_n + iF_t) n ds = \\ &= \oint_{\gamma} (F_n + iF_t) \sigma \sqrt{\frac{\omega'(\sigma)}{\bar{\omega}'(\frac{1}{\sigma})}} \sqrt{\omega'(\sigma) \bar{\omega}'(\frac{1}{\sigma})} d\theta = \\ &= \frac{1}{i} \oint_{\gamma} (F_n + iF_t) \omega'(\sigma) d\sigma = -i \oint_{\gamma} F(\theta) d\sigma. \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Их главный момент относительно точки $z = 0$, в которую отображен центр круга, равен

$$\begin{aligned} m^0 &= \oint_{\Gamma} (xF_y - yF_x) ds = \frac{1}{2} i \oint_{\Gamma} [z(F_x - iF_y) - \bar{z}(F_x + iF_y)] ds = \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \left[\frac{\omega(\sigma)}{\sigma^2} \bar{F}(\theta) - \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) F(\theta) \right] d\sigma, \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

и условия статической эквивалентности нулю системы поверхностных сил записываются в виде [ср. (6.2.4)]

$$\oint_{\gamma} F(\theta) d\sigma = 0, \quad \oint_{\gamma} \left[\frac{\omega(\sigma)}{\sigma^2} \bar{F}(\theta) - \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) F(\theta) \right] d\sigma = 0. \quad (5.5.4)$$

Не составит труда убедиться, что этим условиям удовлетворяют и левые части краевых условий (8.5.1), если функции $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ голоморфны в единичном круге. Действительно,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F(\theta) d\sigma &= \oint_{\gamma} \omega'(\sigma) \Phi(\sigma) d\sigma + \oint_{\gamma} d \left[\omega(\sigma) \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] + \\ &\quad + \oint_{\gamma} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \bar{\Psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) d\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0 \end{aligned}$$

— первый и третий интегралы равны нулю, поскольку подынтегральные функции являются краевыми значениями функций, голоморфных при $|\xi| < 1$ и соответственно $|\xi| > 1$; второй — поскольку $\omega(\sigma) \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ однозначна. Образую аналогичным образом уравнение моментов, имеем

$$\begin{aligned} - \oint_{\gamma} \left[\omega(\sigma) \bar{F}(\theta) \frac{1}{\sigma^2} - \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) F(\theta) \right] d\sigma &= \\ &= \oint_{\gamma} d \left\{ \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \omega(\sigma) \left[\Phi(\sigma) + \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \left[\bar{\Psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \frac{d}{d\sigma} \bar{\omega}^2\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \Psi(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \omega^2(\sigma) \right] d\sigma = 0, \end{aligned}$$

что и требуется.

Применение способа интегралов Коши к первому краевому условию (8.5.1) приводит к соотношению

$$\omega'(\zeta) \Phi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\omega(\sigma) \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta) d\sigma}{\sigma - \zeta}. \quad (8.5.5)$$

Вместе с тем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\omega(\sigma) \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma - \zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{(\sigma - \zeta)^2} d\sigma = \\ &= \frac{d}{d\zeta} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \end{aligned} \quad (8.5.6)$$

Через $p_n(\zeta)$ обозначим голоморфную часть функции

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) &= (c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots + c_n\zeta^n) \left(\bar{a}_0 + \frac{\bar{a}_1}{\zeta} + \dots + \frac{\bar{a}_n}{\zeta^n} + \dots\right) = \\ &= p_n(\zeta) + Z\left(\frac{1}{\zeta}\right), \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

причем

$$\begin{aligned} p_n(\zeta) &= (c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \dots + c_n\bar{a}_n) + (c_1\bar{a}_0 + c_2\bar{a}_1 + \dots + c_n\bar{a}_{n-1})\zeta + \\ &\quad + (c_2\bar{a}_0 + c_3\bar{a}_1 + \dots + c_n\bar{a}_{n-2})\zeta^2 + \dots + c_n\bar{a}_0\zeta^n, \end{aligned} \quad (8.5.8)$$

а $Z(\zeta)$ — голоморфная в круге $|\zeta| < 1$ функция.

Теперь равенство (8.5.5) записывается в виде

$$\omega'(\zeta) \Phi(\zeta) + p'_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta) d\sigma}{\sigma - \zeta}. \quad (8.5.9)$$

Сославшись на (8.5.7), имеем

$$\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi(\zeta) = \bar{p}_n\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \bar{Z}(\zeta), \quad \frac{d}{d\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi(\zeta) = \bar{p}'_n\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \zeta^2 \bar{Z}'(\zeta). \quad (8.5.10)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d}{d\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \Phi(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} &= \bar{p}'_n(0) - \zeta^2 \bar{Z}'(\zeta) = \\ &= \bar{p}'_n(0) - \bar{p}'_n\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi(\zeta) - \zeta^2 \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi'(\zeta) \end{aligned}$$

и второе краевое условие приводит к зависимости

$$\begin{aligned} \bar{c}_1\bar{a}_0 + \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi(\zeta) - \zeta^2 \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi'(\zeta) - \bar{p}'_n\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \\ + \bar{p}'_n(0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{F}(\theta) d\sigma}{\sigma - \zeta} = \zeta^2 \omega'(\zeta) \Psi(\zeta), \end{aligned} \quad (8.5.11)$$

причем по (8.5.8)

$$\bar{p}'_n(0) = \bar{c}_1 a_0 + \bar{c}_2 a_1 + \dots + \bar{c}_n a_{n-1}. \quad (8.5.12)$$

По (8.5.9) и учитывая, что $d\sigma = i\sigma d\theta$, имеем

$$c_1 a_0 + p'_n(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta)}{\sigma} d\sigma, \quad \bar{c}_1 \bar{a}_0 + \bar{p}'_n(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{F}(\theta)}{\sigma} d\sigma.$$

Вместе с тем по (8.5.4)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{F}(\theta)}{\sigma^2} d\sigma = 0.$$

Эти соотношения позволяют представить (8.5.11) в виде

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \Phi(\xi) - \xi^2 \bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right) \Phi'(\xi) - \bar{p}'_n\left(\frac{1}{\xi}\right) - \\ - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \bar{F}(\theta) \left(\frac{1}{\sigma - \xi} - \frac{1}{\sigma} - \frac{\xi}{\sigma^2} \right) d\sigma = \xi^2 \omega'(\xi) \Psi(\xi) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \omega'(\xi) \Psi(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \left[\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \Phi(\xi) - \xi^2 \bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right) \Phi'(\xi) - \bar{p}'_n\left(\frac{1}{\xi}\right) \right] - \\ - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\bar{F}(\theta) d\sigma}{\sigma^2 (\sigma - \xi)}. \quad (8.5.13) \end{aligned}$$

По (8.5.10) первая группа слагаемых равна $-\bar{Z}'(\xi)$. Это подтверждает предположенную наперед голоморфность $\Psi(\xi)$ в круге $|\xi| < 1$.

8.6. Пример. Рассматривается конечная область L , ограниченная контуром (эпитрохидный овал, рис. 45)

$$x = R \left(\cos \theta + \frac{1}{3} m \cos 3\theta \right), \quad y = R \left(\sin \theta + \frac{1}{3} m \sin 3\theta \right).$$

В нее преобразуется внутренность единичного круга с помощью преобразования

$$z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{1}{3} m \xi^3 \right), \quad (8.6.1)$$

причем условие $\omega'(\xi) \neq 0$ при $|\xi| \leq 1$ требует $0 \leq m \leq 1$; при условии $0 \leq m \leq 1/3$ точки на Γ , соответствующие $\theta = 0$, $\theta = \pi$, наиболее удалены от начала координат, тогда как точки $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ переходят на Γ в точки, наиболее к нему близкие. Кривая (8.6.1) представляет напоминающий вытянутый эллипс овал с полуосями $a = R \left(1 + \frac{m}{3} \right)$, $b = R \left(1 - \frac{m}{3} \right)$; область L ограничена извне этим овалом.

В рассматриваемом случае по (8.5.8)

$$p'_n(\xi) = R\bar{a}_0 + \frac{1}{3} Rm(\bar{a}_2 + 2\bar{a}_1\xi + 3\bar{a}_0\xi^2), \quad (8.6.2)$$

и по (8.5.9) приходим к следующей системе уравнений, определяющих неизвестные $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + \bar{a}_0 + \frac{1}{3} m\bar{a}_2 &= \frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta)}{\sigma} d\sigma, \\ a_1 + \frac{2}{3} m\bar{a}_1 &= \frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta)}{\sigma^2} d\sigma, \\ a_2 + m(\bar{a}_0 + a_0) &= \frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \frac{F(\theta)}{\sigma^3} d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (8.6.3)$$

и к сопряженной с ней системе. Из них легко определяются неизвестные a_0, a_1, a_2 ; по ним составляется выражение полинома $p'_n(\xi)$ и далее (8.5.9), (8.5.13) определяют искомые функции $\Phi(\xi), \Psi(\xi)$.

8.7. Первая краевая задача. Ограничиваясь случаем внешней задачи, сохраним предположение, что функция, реализующая преобразование внешности единичного круга на рассматриваемую бесконечную область L , ограниченную изнутри гладким контуром Γ , имеет вид (8.1.2), причем $m(\xi)$ — полином n -й степени от ξ^{-1} . Считая напряжения на бесконечности отсутствующими, имеем по (5.4.18)

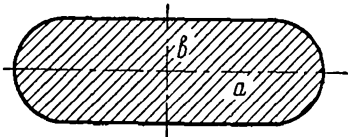


Рис. 45.

$$(3 - 4\nu) \varphi_1(z) - z\bar{\varphi}'_1(\bar{z}) - \bar{\psi}_1(\bar{z}) = 2\mu(u + iv) + \frac{3 - 4\nu}{8\pi(1 - \nu)}(X + iY)(\ln z + \ln \bar{z}) - \frac{X - iY}{8\pi(1 - \nu)} \frac{z}{\bar{z}}, \quad (8.7.1)$$

причем $\varphi_1(z), \psi_1(z)$ голоморфны в L ; $X + iY$ — главный вектор поверхностных сил на Γ (он предполагается заданным).

Полагая

$$\varphi_1(\omega(\xi)) = \varphi_*(\xi), \quad \psi_1(\bar{\omega}(\xi)) = \bar{\psi}_*(\xi),$$

переходим к записи

$$\begin{aligned} (3 - 4\nu) \varphi_*(\xi) - \frac{\omega(\xi)}{\bar{\omega}'(\xi)} \bar{\varphi}'_*(\xi) - \bar{\psi}_*(\xi) = \\ = 2\mu(u + iv) + \frac{3 - 4\nu}{8\pi(1 - \nu)}(X + iY)[\ln \omega(\xi) + \ln \bar{\omega}(\xi)] - \frac{X - iY}{8\pi(1 - \nu)} \frac{\omega(\xi)}{\bar{\omega}(\xi)}. \end{aligned}$$

В искомые функции $\varphi_*(\zeta)$, $\psi_*(\zeta)$ можно включить голоморфную при $|\zeta| > 1$ функцию $\ln \frac{\omega(\zeta)}{\xi}$, приняв

$$\left. \begin{aligned} \varphi_*(\zeta) &= \varphi(\zeta) + \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \ln \frac{\omega(\zeta)}{\xi}, \\ \psi_*(\zeta) &= \psi(\zeta) - \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)} (X-iY) \ln \frac{\omega(\zeta)}{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7.2)$$

Тогда

$$\bar{\varphi}'_*(\bar{\zeta}) \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} = \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} + \frac{X-iY}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}(\bar{\zeta})} - \frac{1}{\xi} \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \right)$$

и предшествующее равенство запишется в виде

$$\begin{aligned} (3-4\nu) \varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \bar{\varphi}'(\bar{\zeta}) - \bar{\psi}(\bar{\zeta}) &= \\ = 2\mu(u+iv) + \frac{3-4\nu}{4\pi(1-\nu)} (X+iY) \ln |\zeta| - \frac{X-iY}{8\pi(1-\nu)} \frac{\omega(\zeta)}{\xi \bar{\omega}'(\bar{\zeta})}. \end{aligned} \quad (8.7.3)$$

Это приводит к представлению краевых условий

$$\left. \begin{aligned} (3-4\nu) \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \varphi(\sigma) - \omega(\sigma) \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) &= \\ = 2\mu \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) (u+iv)_\Gamma - \frac{X-iY}{8\pi(1-\nu)} \sigma \omega(\sigma), \\ (3-4\nu) \omega'(\sigma) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \varphi'(\sigma) - \omega'(\sigma) \psi(\sigma) &= \\ = 2\mu \omega'(\sigma) (u-iv)_\Gamma - \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{\sigma} \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right), \end{aligned} \right\} \quad (8.7.4)$$

так как $\ln |\zeta| = 0$ на γ .

Следуя приемам, примененным в п. 8.2, рассмотрим, полагая $\varphi(\infty) = 0$, функцию

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \varphi(\xi) &= (\bar{c}_0 - \bar{c}_1 \xi^2 - 2\bar{c}_2 \xi^3 - \dots - n\bar{c}_n \xi^{n+1}) \times \\ &\times \left(\frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{\xi^{n+1}} + \dots \right) = q_n(\xi) + Z\left(\frac{1}{\xi}\right). \end{aligned} \quad (8.7.5)$$

Здесь $q_n(\xi)$ — полином n -й степени по ξ , а $Z\left(\frac{1}{\xi}\right)$ — голоморфная в $|\xi| > 1$ функция, причем $Z(\infty) = 0$. Тогда

$$|\xi| > 1: \quad \oint_{\gamma} \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \varphi(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = Z\left(\frac{1}{\xi}\right) = \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \varphi(\xi) - q_n(\xi).$$

Произведение $\omega(\zeta) \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\xi}\right)$ представляет сумму полинома от ξ^{-1} и функции, голоморфной в круге $|\xi| < 1$:

$$\omega(\zeta) \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\xi}\right) = r_{n-2}\left(\frac{1}{\xi}\right) + Q(\xi), \quad (8.7.6)$$

причем принято

$$r_{n-2}(\infty) = 0, \quad Q(0) = -[c_2 \bar{a}_1 + 2c_3 \bar{a}_2 + \dots + (n-1)c_n \bar{a}_{n-1}]. \quad (8.7.7)$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) d\sigma}{\sigma - \xi} = r_{n-2}\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Теперь применение способа интеграла Коши приводит к соотношению

$$\begin{aligned} (3-4\nu) \left[\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \varphi(\xi) - q_n(\xi) \right] - r_{n-2}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} 2\mu(u+iv)_{\Gamma} \frac{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma - \xi} d\sigma - \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} [\xi \omega(\xi) - c_0 \xi^2 - c_1]. \end{aligned} \quad (8.7.8)$$

Аналогичные действия над вторым краевым условием дают

$$\begin{aligned} (3-4\nu) \left[\bar{q}_n\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{q}_n(0) \right] - \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right) \varphi'(\xi) - \bar{r}_{n-2}(\xi) \right] + \\ + \bar{Q}(0) - \omega'(\xi) \psi(\xi) + c_0 \psi(\infty) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} 2\mu(u-iv)_{\Gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma - \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \frac{c_0}{\xi^2}. \end{aligned} \quad (8.7.9)$$

Постоянная $\psi(\infty)$ определяется сравнением не зависящих от σ слагаемых (свободных членов их тригонометрических рядов) в левой и правой частях второго краевого условия (8.7.4). Умножив их на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma}$ и проинтегрировав по контуру единичного круга γ , имеем

$$\begin{aligned} (3-4\nu) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \omega'(\sigma) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \varphi'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma} \psi(\sigma) d\sigma = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} 2\mu(u-iv)_{\Gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma} d\sigma - \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \oint_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma^2} d\sigma, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (3-4\nu) \bar{q}_n(0) - \bar{Q}(0) - c_0 \psi(\infty) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} 2\mu(u-iv)_{\Gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma} d\sigma - \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \bar{c}_1. \end{aligned} \quad (8.7.10)$$

8.8. **Эллиптическое отверстие.** В этом случае по (8.3.1), (8.7.8), (8.7.9) имеем

$$(3 - 4\nu) [(1 - m\xi^2) \varphi(\xi) + m(a_1\xi + a_2)] = \frac{2\mu}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \bar{\omega}' \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{(u + iv)_{\Gamma}}{\sigma - \xi} d\sigma, \quad (8.8.1)$$

$$\begin{aligned} & - (3 - 4\nu) \frac{m\bar{a}_1}{\xi} - \left(\frac{1}{\xi} + m\xi \right) \varphi'(\xi) - \left(1 - \frac{m}{\xi^2} \right) \psi(\xi) + \psi(\infty) = \\ & = \frac{2\mu}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \omega'(\sigma) \frac{(u - iv)_{\Gamma}}{\sigma - \xi} d\sigma - \frac{X + iY}{8\pi(1 - \nu)} \frac{1}{\xi^2}. \end{aligned} \quad (8.8.2)$$

В частном случае, когда впаивному в упругую среду твердому эллиптическому ядру дается перемещение

$$(u + iv)_{\Gamma} = u_0 + iv_0 + i\epsilon z = u_0 + iv_0 + i\epsilon \omega(\xi),$$

имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \bar{\omega}' \left(\frac{1}{\sigma} \right) \frac{(u + iv)_{\Gamma}}{\sigma - \xi} d\sigma = \\ & = \frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} (1 - m\sigma^2) \left[u_0 + iv_0 + i\epsilon R \left(\sigma + \frac{m}{\sigma} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} = \frac{i\epsilon R m}{\xi}, \end{aligned} \quad (8.8.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i R} \oint_{\gamma} \omega'(\sigma) \frac{(u - iv)_{\Gamma}}{\sigma - \xi} d\sigma = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \left(1 - \frac{m}{\sigma^2} \right) \left[u_0 - iv_0 - i\epsilon R \left(\frac{1}{\sigma} + m\sigma \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} = \\ & = - \frac{m}{\sigma^2} (u_0 - iv_0) - i\epsilon R \left[(1 - m^2) \frac{1}{\xi} - \frac{m}{\xi^3} \right] \end{aligned} \quad (8.8.4)$$

и далее по (8.8.1), (8.7.5), (8.7.6)

$$\left. \begin{aligned} (3 - 4\nu) \varphi(\xi) &= \frac{2\mu i \epsilon m R}{\xi} = (3 - 4\nu) a_1, \quad a_2 = a_3 = \dots = 0, \\ q_n(0) &= 0, \quad Q(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.8.5)$$

Обратившись к (8.7.10), получаем

$$\psi(\infty) = -2\mu(u_0 - iv_0) + \frac{m(X + iY)}{8\pi(1 - \nu)}$$

и по (8.8.2)

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= -2\mu(u_0 - iv_0) + \frac{2\mu i \epsilon R}{\xi} \left(1 + m \frac{1 + m\xi^2}{\xi^2 - m} \frac{1}{3 - 4\nu} \right) + \\ &+ \frac{X + iY}{8\pi(1 - \nu)} \frac{1 + m\xi^2}{\xi^2 - m}. \end{aligned} \quad (8.8.6)$$

Этим определены голоморфные в области $|\xi| > 1$ части иско-
мых функций; функции, определяющие решение задачи (назо-

вем их снова $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$, получим, добавляя, в соответствии с (8.7.2), (5.4.3), к выражениям (8.8.5), (8.8.6) логарифмические слагаемые $-\frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \ln \xi$, $\frac{X-iY}{8(1-\nu)} (3-4\nu) \ln \xi$. Итак,

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{2\mu\epsilon m R}{3-4\nu} \frac{1}{\xi} - \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \ln \xi, \\ \psi(\xi) &= -2\mu(u_0 - iv_0) + \frac{2\mu\epsilon R}{\xi} \left(1 + m \frac{1+m\xi^2}{\xi^2-m} \frac{1}{3-4\nu}\right) + \\ &\quad + \frac{X+iY}{8\pi(1-\nu)} \frac{1+m\xi^2}{\xi^2-m} + \frac{X-iY}{8\pi(1-\nu)} (3-4\nu) \ln \xi. \end{aligned} \right\} \quad (8.8.7)$$

Вектор перемещения определяется теперь равенством

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) &= 2\mu(u_0 + iv_0) + 2\mu\epsilon R \left(\frac{m}{\xi} + \frac{1}{\xi} \right) - \\ &\quad - \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)} (\ln \xi + \ln \bar{\xi}) (X + iY) + \\ &\quad + \frac{2\mu\epsilon R m}{3-4\nu} \frac{1-\xi\bar{\xi}}{\xi^2-m} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{m}{\bar{\xi}} \right) + \frac{X-iY}{8\pi(1-\nu)} \frac{1-\xi\bar{\xi}}{\xi^2-m} \left(\frac{m\bar{\xi}}{\xi} - 1 \right). \end{aligned} \quad (8.8.8)$$

На достаточном удалении от отверстия в его выражения входят логарифмически возрастающее слагаемое и остающиеся ограниченными члены

$$2\mu(u + iv)^\infty = 2\mu(u^0 + iv^0) - \frac{X-iY}{8\pi(1-\nu)} (m - e^{2i\theta}) - \frac{3-4\nu}{4\pi(1-\nu)} (X + iY) \ln \rho.$$

Момент внешних сил, сообщаящий ядру поворот ϵ , определяется, согласно (3.1.14), по коэффициенту при z^{-1} в выражении $\psi(z)$. По (8.8.7) слагаемое степени ξ^{-1} равно

$$\frac{2\mu\epsilon R}{\xi} \left(1 + \frac{m^2}{3-4\nu} \right) \approx \frac{2\mu\epsilon R^2}{z} \left(1 + \frac{m^2}{3-4\nu} \right)$$

и по (3.1.14)

$$M^0 = 4\pi\mu\epsilon R^2 \left(1 + \frac{m^2}{3-4\nu} \right). \quad (8.8.9)$$

8.9. Двусвязная область. Предполагается, что известно конформное преобразование

$$z = \omega(\xi) \quad (8.9.1)$$

кругового кольца плоскости ξ , ограниченного окружностями γ_0 , γ_1 радиусов ρ_0 , ρ_1 ($\rho_0 \leq |\xi| \leq \rho_1$), на двусвязную область L плоскости z . Принимается, что наружному контуру Γ_0 (внутреннему Γ_1) этой области соответствует внутренняя окружность γ_0 (наружная γ_1) кольца.

Рассматривается случай, когда системы поверхностных сил на каждом из контуров Γ_0 , Γ_1 по отдельности статически эквивалентны нулю. Тогда существует решение вспомогательной задачи о нагружении односвязной области, ограниченной конту-

ром Γ_0 . Предполагается, что это решение известно; им определяются нормальное и касательное напряжения на контуре Γ_1 — вектор $(\sigma_n + i\tau_{nt})_{\Gamma_1}^0$. Тогда, рассмотрев для двусвязной области L задачу с краевыми условиями

$$(\sigma_n + i\tau_{nt})_{\Gamma_0} = 0, \quad (\sigma_n + i\tau_{nt})_{\Gamma_1} = (\sigma_n + i\tau_{nt})_{\Gamma_1}^1 - (\sigma_n + i\tau_{nt})_{\Gamma_1}^0 \quad (8.9.2)$$

и наложив на него решение вспомогательной задачи, приходим к решению задачи, в котором оба контура нагружены заданным образом. В дальнейшем поэтому рассматривается случай, когда наружный контур Γ_0 не нагружен*). По (5.2.10) на любом контуре Γ области L , в который преобразуется окружность $\rho = \text{const}$ в кольце, вектор $\sigma_n - i\tau_{nt}$ дается выражением

$$\sigma_n - i\tau_{nt} = \{\Phi_1(z) + \bar{\Phi}_1(\bar{z}) - [\bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)]n^2\}_{\Gamma}, \quad (8.9.3)$$

причем по (5.2.7) квадрат вектора нормали n будет

$$n^2 = -\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = -\frac{\omega'(\xi)}{\bar{\omega}'(\xi)} \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} = \frac{\omega'(\xi)}{\bar{\omega}'(\xi)} \frac{\xi}{\bar{\xi}}. \quad (8.9.4)$$

Переходя в (8.9.3) к переменной ξ и обозначая

$$\Phi_1(z) = \Phi_1(\omega(\xi)) = \Phi(\xi), \quad \Psi_1(z) = \Psi_1(\omega(\xi)) = \Psi(\xi),$$

приходим к соотношению

$$\Phi(\xi) + \bar{\Phi}(\bar{\xi}) - \frac{\xi}{\bar{\xi}\bar{\omega}'(\bar{\xi})} [\bar{\omega}(\bar{\xi})\Phi'(\xi) + \omega'(\xi)\Psi(\xi)] = \sigma_n - i\tau_{nt}. \quad (8.9.5)$$

На окружности γ_0 имеем $\xi = \rho_0\sigma$, $\bar{\xi} = \rho_0/\sigma$, и первое краевое условие (8.9.2) приводится к виду

$$\Phi(\rho_0\sigma) + \bar{\Phi}\left(\frac{\rho_0}{\sigma}\right) - \frac{\sigma^2}{\bar{\omega}'(\rho_0/\sigma)} \left[\bar{\omega}\left(\frac{\rho_0}{\sigma}\right)\Phi'(\rho_0\sigma) + \omega'(\rho_0\sigma)\Psi(\rho_0\sigma) \right] = 0. \quad (8.9.6)$$

Оно удовлетворяется, если определить $\Psi(\xi)$ в кольце $\rho_0 \leq |\xi| \leq \rho_1$ равенством

$$\begin{aligned} \omega'(\xi)\Psi(\xi) &= \frac{\rho_0^2}{\xi^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_0^2}{\xi}\right) \left[\Phi(\xi) + \bar{\Phi}\left(\frac{\rho_0^2}{\xi}\right) \right] - \bar{\omega}\left(\frac{\rho_0^2}{\xi}\right)\Phi'(\xi) = \\ &= -\frac{d}{d\xi} \bar{\omega}\left(\frac{\rho_0^2}{\xi}\right) \Phi(\xi) + \frac{\rho_0^2}{\xi^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_0^2}{\xi}\right) \bar{\Phi}\left(\frac{\rho_0^2}{\xi}\right). \end{aligned} \quad (8.9.7)$$

*) Конечно, можно предварительно «снять нагружение» с внутреннего контура; например, когда область L — кольцо между конфокальными эллипсами, решение внутренней задачи для сплошного эллипса значительно более сложно, чем для плоскости с эллиптическим отверстием.

Краевое условие на Γ_1 записывается в виде

$$\Phi(\rho_1\sigma) + \bar{\Phi}\left(\frac{\rho_1}{\sigma}\right) - \frac{\sigma^2}{\bar{\omega}'(\rho_1/\sigma)} \left[\bar{\omega}\left(\frac{\rho_1}{\sigma}\right) \Phi'(\rho_1\sigma) + \omega'(\rho_1\sigma) \Psi(\rho_1\sigma) \right] = \\ = (\sigma_n - i\tau_n)_{\Gamma_1}. \quad (8.9.8)$$

Поверхностную силу на Γ_1 , задаваемую рядом Фурье

$$(\sigma_n - i\tau_n)_{\Gamma_1} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sigma^k + \frac{a_{-k}}{\sigma^k} \right), \quad (8.9.9)$$

можно рассматривать как значение на Γ_1 функции от ζ , определенной в кольце рядом Лорана

$$g(\zeta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\rho_1^k} \zeta^k + \frac{a_{-k}}{\zeta^k} \rho_1^k \right). \quad (8.9.10)$$

Это позволяет дать еще одно представление функции $\Psi(\zeta)$, аналогичное (8.9.7),

$$\omega'(\zeta) \Psi(\zeta) = \frac{\rho_1^2}{\zeta^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) \left[\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) \right] - \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) \Phi'(\zeta) - \\ - \frac{\rho_1^2}{\zeta^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) g(\zeta) = - \frac{d}{d\zeta} \bar{\omega}\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) \Phi(\zeta) + \frac{\rho_1^2}{\zeta^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) \bar{\Phi}\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) - \\ - \frac{\rho_1^2}{\zeta^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) g(\zeta). \quad (8.9.11)$$

Сопоставление двух представлений одной и той же функции $\Psi(\zeta)$ приводит к соотношению связи

$$\frac{d}{d\zeta} \left[\bar{\omega}\left(\frac{\rho_0^2}{\zeta}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) \right] \Phi(\zeta) + \frac{\rho_1^2}{\zeta^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) \bar{\Phi}\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) - \\ - \frac{\rho_0^2}{\zeta^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_0^2}{\zeta}\right) \bar{\Phi}\left(\frac{\rho_0^2}{\zeta}\right) = \frac{\rho_1^2}{\zeta^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) g(\zeta). \quad (8.9.12)$$

Решение $\omega'(\zeta) \Phi(\zeta)$ этого функционального уравнения должно разыскиваться в форме ряда Лорана, в котором отсутствует слабое вида ζ^{-1} :

$$\omega'(\zeta) \Phi(\zeta) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_{-k}}{\zeta^k}, \quad (c_{-1} = 0). \quad (8.9.13)$$

Тогда такое же слабое будет отсутствовать и в представлении Лорана функции

$$\frac{\rho_0^2}{\zeta^2} \bar{\omega}'\left(\frac{\rho_0^2}{\zeta}\right) \bar{\Phi}'\left(\frac{\rho_0^2}{\zeta}\right) = \bar{c}_0 \frac{\rho_0^2}{\zeta^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{c}_k \rho_0^{2k+2}}{\zeta^{k+2}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\bar{c}_{-k}}{\rho_0^{2k-2}} \zeta^{k-2}.$$

Из второго представления (8.9.7) видно, что функция $\omega'(\zeta) \Psi(\zeta)$

также не содержит слагаемого ξ^{-1} . Поэтому представления функций

$$\varphi(\xi) = \int \omega'(\xi) \Phi(\xi) d\xi, \quad \psi(\xi) = \int \omega'(\xi) \Psi(\xi) d\xi$$

будут лишены логарифмических членов, что гарантирует однозначность вектора перемещения (отсутствие дисторсии).

8.10. Неконцентрическое кольцо. Область L ограничена извне окружностью Γ_0 радиуса r_0 , а изнутри — окружностью Γ_1 радиуса r_1 ; эксцентриситет — расстояние между центрами O_0, O_1 этих окружностей — обозначается e . Конформное преобразование кругового кольца на эту область было рассмотрено в п. 3.12 гл. VI. Здесь оно представляется в другой форме:

$$z = c \frac{\xi + 1}{\xi - 1}, \quad (8.10.1)$$

причем c — вещественная постоянная. По (8.10.1) имеем

$$\xi = \frac{z+c}{z-c} = 1 + \frac{2c}{z-c}, \quad \xi \bar{\xi} - 1 = \frac{4cx}{(z-c)(\bar{z}-c)}, \quad (8.10.2)$$

откуда следует, что

$$\left(x - c \frac{\xi \bar{\xi} + 1}{\xi \bar{\xi} - 1}\right)^2 + y^2 = \left| \frac{2c \sqrt{\xi \bar{\xi}}}{\xi \bar{\xi} - 1} \right|^2. \quad (8.10.3)$$

Концентрическим окружностям $\xi \bar{\xi} = \rho^2 = \text{const}$ в кольце соответствуют в L окружности с центрами на оси абсцисс (в точках d) радиусов r :

$$d = c \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 - 1} = c \operatorname{cth} \alpha, \quad r = \frac{2c\rho}{\rho^2 - 1} = \frac{c}{\operatorname{sh} \alpha} \quad (\rho = e^\alpha > 1, \alpha > 0). \quad (8.10.4)$$

Таким образом, концентрическое кольцо, образованное окружностями γ_0 и γ_1 радиусов ρ_0 и ρ_1 ($1 < \rho_0 < \rho_1$), отображено на кольцевую область L : наружной окружности Γ_0 (внутренней Γ_1) соответствует внутренняя окружность γ_0 (наружная γ_1) кольца. Величины c, α_0, α_1 (или ρ_0, ρ_1) связаны уравнениями

$$r_0 \operatorname{sh} \alpha_0 = r_1 \operatorname{sh} \alpha_1 = c, \quad e = |r_0 \operatorname{ch} \alpha_0 - r_1 \operatorname{ch} \alpha_1|. \quad (8.10.5)$$

Исключив из них α_0, α_1 , получаем уравнение, определяющее c :

$$e = \sqrt{r_0^2 + c^2} - \sqrt{r_1^2 + c^2}. \quad (8.10.6)$$

Ограничимся далее рассмотрением наиболее простого случая нагружения — равномерное давление p , распределенное на окружности Γ_1 . Соотношение связи (8.9.12) (в нем $g(\xi) = -p$), после подстановки значения (8.10.1) функции $\omega(\xi)$ приводится к виду

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\xi \Phi(\xi)}{Z_0 Z_1} + \frac{1}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \left[\frac{\rho_0^2}{Z_0^2} \overline{\Phi} \left(\frac{\rho_0^2}{\xi} \right) - \frac{\rho_1^2}{Z_1^2} \overline{\Phi} \left(\frac{\rho_1^2}{\xi} \right) \right] = \frac{q}{Z_1^2}, \quad (8.10.7)$$

причем для краткости принято

$$Z_0 = \rho_0^2 - \zeta, \quad Z_1 = \rho_1^2 - \zeta, \quad q = \frac{\rho_1^2 p}{\rho_1^2 - \rho_0^2}. \quad (8.10.8)$$

Оказывается возможным удовлетворить этому соотношению, приняв (C_0, C_1, C_2 вещественны)

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta) \Phi(\zeta) &= -2c \left(\frac{C_0}{(\zeta-1)^2} + C_1 + \frac{C_2}{\zeta^2} \right), \\ \Phi(\zeta) &= C_0 + (\zeta-1)^2 \left(C_1 + \frac{C_2}{\zeta^2} \right). \end{aligned} \quad (8.10.9)$$

Точка $\zeta = 0$ не является простым полюсом функции $\omega'(\zeta) \Phi(\zeta)$.

При таком задании функции $\Phi(\zeta)$ уравнение (8.10.7) приводится к виду

$$\begin{aligned} Z_0 Z_1 [\Phi(\zeta) + \zeta \Phi'(\zeta)] + \zeta \Phi(\zeta) (Z_0 + Z_1) + C_0 (\rho_0^2 \rho_1^2 - \zeta^2) - \\ - \frac{C_1}{\zeta^2} Z_0^2 Z_1^2 + \frac{C_2}{\rho_0^2 \rho_1^2} Z_0^2 Z_1^2 = q Z_0^2. \end{aligned} \quad (8.10.10)$$

Нетрудно проверить, что в разложении левой части по степеням ζ при условии

$$C_1 \rho_0^2 \rho_1^2 + C_2 = 0 \quad (8.10.11)$$

будут отсутствовать отрицательные степени ζ (ζ^{-2}, ζ^{-1}). При этом же условии обратятся в нуль и коэффициенты при ζ^3 и ζ^4 . Придем к соотношению

$$\begin{aligned} C_1 [\zeta^2 (2\lambda + 2\mu - 2 - \mu^2) + 2\zeta (\lambda\mu - 4\lambda + \mu) + (2\lambda - 2\lambda^2 + \\ + 2\lambda\mu - \mu^2)] + 2C_0 (\lambda - \zeta^2) = q (\rho_0^4 - 2\rho_0^2 \zeta + \zeta^2) \quad (8.10.12) \\ (\lambda = \rho_0^2 \rho_1^2, \quad \mu = \rho_0^2 + \rho_1^2) \end{aligned}$$

и к системе трех уравнений для двух неизвестных C_1, C_0 :

$$\left. \begin{aligned} C_1 (2\lambda + 2\mu - 2 - \mu^2) - 2C_0 - q &= 0, \\ C_1 (\lambda\mu - 4\lambda + \mu) + q\rho_0^2 &= 0, \\ C_1 (2\lambda - 2\lambda^2 + 2\lambda\mu - \mu^2) + 2C_0\lambda - q\rho_0^4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.10.13)$$

Но она совместна, так как ее определитель, что легко проверить, равен нулю. Этим определены по (8.10.9) и (8.9.7) функции $\Phi(\zeta), \Psi(\zeta)$. Напряжения находим по формулам Колосова — Мухелишвили; вектор перемещения однозначен.

ЧАСТЬ IV

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГЛАВА VIII

ЗАКОНЫ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА

§ 1. Потенциальная энергия деформации

1.1. Идеально-упругое тело. В гл. I и II в рассмотрение были введены две группы величин: первая группа величин, определяющих тензор напряжений, служила для описания напряженного состояния, возникающего под действием внешних массовых и поверхностных сил, тогда как величины второй группы — меры и тензоры деформации — определяли изменения геометрических объектов (отрезок, площадку, объем) при деформировании среды. Никаких предположений о связи между величинами этих двух групп — о законах состояния среды — не было сделано. Поэтому сказанное в этих главах приложимо к средам любой природы; но его недостаточно для суждения о поведении какой-либо реальной среды, для построения ее механики.

Установление законов состояния среды, то есть зависимостей тензора напряжений от тензоров деформации и скорости деформации при учете термодинамических параметров и влияния предшествующей истории деформирования, составляет предмет реологии. В этой книге, как уже говорилось в пп. 1.1, 1.3 гл. III, рассматривается одна лишь реологическая модель — идеально-упругое тело. Основным его свойством является обратимость происходящих в нем процессов; можно предложить два способа определения этого свойства. Первый — полная восстанавливаемость формы тела, второй — возвращение без потерь энергии, сообщенной телу при деформировании. Предполагается, что тело из некоторого начального состояния подвергается нагружению, протекающему «столь медленно и постепенно», что в каждый момент сохраняется равновесие, соответствующее условиям, в которых тело находится в этот момент (игнорируются динамические явления). Возникает деформированное состояние; оно целиком исчезает, и тело восстанавливает на-

чальную геометрическую форму при медленном и постепенном разгрузении. Второй способ построения модели — энергетический; работа сил нагружения затрачивается на сообщение телу накапливаемой им потенциальной энергии деформации, при разгрузении тело возвращает ее без потерь.

В математической формулировке первый способ состоит в задании закона связи между тензорами напряжений и деформации. При втором способе построения закона состояния исходят из задания выражения потенциальной энергии через компоненты деформации и по нему определяют тензор напряжений.

«Упругое тело» характеризуется только наличием однозначной зависимости тензора напряжений \hat{T} от меры деформации \hat{g}^x (или \hat{M}). Требование существования потенциальной энергии деформации выделяет из класса упругих тел «гиперупругие» тела (Труделл), названные здесь идеально-упругими. Далее рассматриваются только идеально-упругие тела, поэтому слово «идеальный» часто опускается.

Применимость модели идеально-упругого тела к реальным телам, как и любой другой реологической модели, должна быть подтверждена экспериментально. Однако осуществима проверка только следствий, получаемых теоретически из исходного закона. Чем больше накоплено таких следствий, тем больше возможностей создается для экспериментального исследования. Трудная задача установления закона состояния материала «должна быть передана экспериментаторам как можно позже» (Синьорини). Необходимо еще добавить, что непосредственному измерению доступно только поле деформаций, тогда как о напряжениях можно судить только по их интегральным эффектам — параметрам нагружения (растягивающая сила, крутящий момент, давление на поверхности образца и т. п.). Поэтому опыты чаще всего проводятся на образцах достаточно простой геометрической формы (призматический стержень, тонкостенная цилиндрическая трубка) в условиях статической определенности компонент напряженного состояния. Экспериментальные знания сосредоточены лишь на многообразиях одного, двух, редко и отрывочно — трех измерений шестимерного пространства компонент тензора деформации. Эти недостаточные сведения могут служить подтверждением не одного-единственного, а отличных друг от друга представлений закона состояния. Довольствуются принятой формой закона состояния, если констатируется его достаточно удовлетворительное подтверждение опытными данными в использованном диапазоне измеряемых величин.

1.2. Потенциалы деформации. Рассматривается единичный объем идеально-упругого тела в его начальном состоянии

(v -объем). Согласно первому закону термодинамики удельная элементарная работа внешних сил $\delta' A_{(e)}$, сложенная с подведенным элементарным количеством тепла $\delta' Q$ (выраженным в механических единицах), равна приращению δE внутренней энергии (п. 2.1 гл. III):

$$\delta E = \delta' A_{(e)} + \delta' Q. \quad (1.2.1)$$

Добавив сюда определение энтропии в обратимом равновесном процессе

$$\delta S = \frac{\delta' Q}{\Theta}, \quad (1.2.2)$$

где Θ — абсолютная температура, и сославшись на выражение (3.5.8) гл. I элементарной работы, имеем

$$\delta E = \sqrt{\frac{G}{g}} \tilde{t}^{sq} \delta \mathcal{E}_{sq} + \Theta \delta S. \quad (1.2.3)$$

Рассматривая теперь внутреннюю энергию как функцию семи независимых переменных — шести компонент тензора деформации $\hat{\mathcal{E}}$ и энтропии S , имеем

$$\delta E = \frac{\partial E}{\partial \mathcal{E}_{st}} \delta \mathcal{E}_{st} + \frac{\partial E}{\partial S} \delta S; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial \mathcal{E}_{st}} - \sqrt{\frac{G}{g}} \tilde{t}^{st} \right) \delta \mathcal{E}_{st} + \left(\frac{\partial E}{\partial S} - \Theta \right) \delta S = 0$$

и вследствие независимости вариаций $\delta \mathcal{E}_{st}$, δS

$$\tilde{t}^{st} = \sqrt{\frac{g}{G}} \left(\frac{\partial E}{\partial \mathcal{E}_{st}} \right)_S; \quad \Theta = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{\mathcal{E}_{st}}. \quad (1.2.4)$$

Напомним, что \tilde{t}^{st} — контравариантные компоненты тензора напряжений \hat{T} в V -объеме, \mathcal{E}_{st} — ковариантные компоненты $\hat{\mathcal{E}}$ в метрике v -объема; подстрочные индексы, как принято в термодинамике, напоминают, каким переменным при дифференцировании приписываются постоянные значения. Итак, знание внутренней энергии $E(\mathcal{E}_{11}, \dots, \mathcal{E}_{23}; S)$ определяет закон состояния среды — зависимость компонент тензора напряжений и температуры от деформаций и энтропии. Выражение закона состояния через температуру и компоненты деформации определяется заданием свободной энергии F . Вариация этого термодинамического потенциала (2.2.3) гл. III равна по (1.2.3)

$$\delta F = \delta E - \Theta \delta S - S \delta \Theta = \sqrt{\frac{G}{g}} \tilde{t}^{st} \delta \mathcal{E}_{st} - S \delta \Theta = \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}_{st}} \delta \mathcal{E}_{st} + \frac{\partial F}{\partial \Theta} \delta \Theta, \quad (1.2.5)$$

так что

$$\tilde{t}^{st} = \sqrt{\frac{g}{G}} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}_{st}} \right)_{\Theta}, \quad S = - \left(\frac{\partial F}{\partial \Theta} \right)_{\mathcal{E}_{st}}. \quad (1.2.6)$$

При адиабатическом процессе деформирования отсутствует приток тепла, $\delta'Q = 0$, и по (1.2.1)

$$\delta E = \delta' A_{(e)} = \sqrt{\frac{G}{g}} \tau^{st} \delta \mathcal{E}_{st}. \quad (1.2.7)$$

Аналогичное заключение делается при изотермическом процессе, но тогда $\delta\Theta = 0$ и функцией, полный дифференциал которой равен удельной элементарной работе, оказывается свободная энергия

$$\delta F = \delta' A_{(e)} = \sqrt{\frac{G}{g}} \tau^{st} \delta \mathcal{E}_{st}. \quad (1.2.8)$$

Итак, в том и другом процессах может быть введена в рассмотрение величина, называемая удельной потенциальной энергией деформации. Эта величина, обозначаемая A , зависит от компонент тензора деформации, а ее вариация равна

$$\delta A = \delta' A_{(e)} = \sqrt{\frac{G}{g}} \tau^{st} \delta \mathcal{E}_{st} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} \tau^{st} \delta G_{st}. \quad (1.2.9)$$

Сохранив одно и то же наименование и обозначение для удельной потенциальной энергии деформации, не следует забывать, что речь идет о двух отличных друг от друга величинах. В адиабатическом процессе A отождествляется с внутренней, в изотермическом — со свободной энергией. В определяемые ими законы состояния, внешне описываемые одинаковыми соотношениями, входят отличные друг от друга модули упругости — «адиабатические» в первом процессе, «изотермические» — во втором. См. п. 2.3 гл. III.

Выражения контравариантных компонент тензора напряжений через удельную потенциальную энергию записываются в виде

$$\tau^{st} = \sqrt{\frac{g}{G}} \frac{\partial A}{\partial \mathcal{E}_{st}} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} \frac{\partial A}{\partial G_{st}} \quad (1.2.10)$$

или же в виде

$$\tau^{st} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{G}} \left(\frac{\partial A}{\partial \mathcal{E}_{st}} + \frac{\partial A}{\partial \mathcal{E}_{ts}} \right) = \sqrt{\frac{g}{G}} \left(\frac{\partial A}{\partial G_{st}} + \frac{\partial A}{\partial G_{ts}} \right). \quad (1.2.11)$$

Эта запись предохраняет от возможных ошибок; в ней \mathcal{E}_{st} , \mathcal{E}_{ts} (или G_{st} , G_{ts}) считаются отличными друг от друга.

Потенциальная энергия деформации тела, обозначаемая a , равна интегралу по v -объему от удельной потенциальной энергии:

$$a = \int \int \int_v A d\tau_0. \quad (1.2.12)$$

Ее вариация равна

$$\delta a = \delta \int \int \int_v A \, d\tau_0 = \int \int \int_v \delta A \, d\tau_0, \quad (1.2.13)$$

и знак вариации мог быть внесен под знак интеграла, поскольку v -объем не варьируется. Отсюда следует возможность отождествления вариации δa с элементарной работой внешних массовых и поверхностных сил. Этим объясняется необходимость относить удельную потенциальную энергию деформации к единице начального объема (v -, а не V -объема).

1.3. Однородное изотропное идеально-упругое тело. Предполагается, что в начальном состоянии среда однородна и изотропна, ее плотность ρ_0 постоянна. Этим исключается зависимость удельной потенциальной энергии деформации от ориентации осей выбранной координатной системы и явное вхождение в ее выражение координат точек среды.

Это выражение представляется поэтому функцией только трех главных инвариантов тензора или мер деформации (п. 3.3 гл. II) Коши:

$$A = A(I_1(\hat{\mathcal{E}}), I_2(\hat{\mathcal{E}}), I_3(\hat{\mathcal{E}})) \quad (1.3.1)$$

или

$$A = A(I_1(\hat{G}^\times), I_2(\hat{G}^\times), I_3(\hat{G}^\times)). \quad (1.3.2)$$

Вторая форма записи часто предпочтительнее первой, поскольку введение мер деформации упрощает запись формул. Переход к тензору деформации, конечно, не составит труда. Наличие формул (5.2.3)–(5.2.5) гл. II, связывающих инварианты мер деформации Коши и Альманзи, а также обратных им тензоров позволяет рассматривать A и как функцию инвариантов меры или тензора деформации Альманзи:

$$A = A(I_1(\hat{g}^\times), I_2(\hat{g}^\times), I_3(\hat{g}^\times)), \quad A = A(I_1(\hat{\mathcal{E}}), I_2(\hat{\mathcal{E}}), I_3(\hat{\mathcal{E}})). \quad (1.3.3)$$

Представления удельной потенциальной энергии через главные инварианты тензоров \hat{M} , \hat{m} не отличаются от (1.3.2) и соответственно от (1.3.3), поскольку $I_k(\hat{G}^\times) = I_k(\hat{M})$, $I_k(\hat{g}^\times) = I_k(\hat{m})$. Это, конечно, не означает, что записи законов состояния через, скажем, тензоры \hat{G}^\times и \hat{M} одинаковы, так как это различные тензоры.

В дальнейшем для сокращения записей применяются обозначения

$$\left. \begin{aligned} I_k(\hat{G}^\times) &= I_k(\hat{M}) = I_k, & I_k(\hat{\mathcal{E}}) &= j_k, \\ I_k(\hat{g}^\times) &= I_k(\hat{m}) = I'_k, & I_k(\hat{\mathcal{E}}) &= j'_k. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.4)$$

Заметим еще, что удельную потенциальную энергию можно представлять и в функции от трех независимых, но не главных инвариантов той или иной меры деформации, например от первого главного инварианта ее, второго инварианта ее девиатора и еще одной величины, зависящей также от третьего главного инварианта. Инвариантами являются, конечно, главные значения меры деформации, главные удлинения и т. д.

§ 2. Закон состояния изотропного идеально-упругого тела

2.1. Общая форма закона состояния. Вариация удельной потенциальной энергии деформации, равная согласно (1.2.9) в принятых предположениях удельной элементарной работе внешних сил, представляется формулой (3.6.4) гл. I:

$$\delta A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{Q} \cdot \delta \hat{G} \times. \quad (2.1.1)$$

Здесь введен «энергетический» тензор напряжений \hat{Q} — тензор, контравариантные компоненты которого в базисе r_s начального v -объема равны контравариантным компонентам \hat{T}^{st} тензора напряжений \hat{T} в базисе V -объема; по (3.6.5) гл. I

$$\hat{T} = \nabla R^* \cdot \hat{Q} \cdot \nabla R. \quad (2.1.2)$$

Обратившись теперь к соотношению (I. 12.7), дающему инвариантное определение градиента скалярного инварианта по тензору

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial \hat{G} \times} \cdot \delta \hat{G} \times \quad (\delta \hat{G} \times = \delta \hat{G}^* \times), \quad (2.1.3)$$

имеем

$$\hat{Q} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} \frac{\partial A}{\partial \hat{G} \times}. \quad (2.1.4)$$

Считая A заданной функцией главных инвариантов $I_k(\hat{G} \times)$, сославшись на формулы (I. 12.12), (I. 12.13), приходим к соотношениям

$$\hat{Q} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) \hat{g} - \frac{\partial A}{\partial I_2} \hat{G} \times + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \hat{G} \times^{-1} \right], \quad (2.1.5)$$

$$\hat{Q} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \hat{g} - \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \hat{G} \times + \frac{\partial A}{\partial I_3} \hat{G} \times^2 \right]. \quad (2.1.6)$$

В них \hat{g} — единичный тензор в v -объеме.

Вводим обозначения

$$^0 c = \frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2}, \quad ^1 c = \frac{\partial A}{\partial I_2}, \quad ^{-1} c = I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3}, \quad (2.1.7)$$

$$^0 d = \frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_2 \frac{\partial A}{\partial I_3}, \quad ^1 d = \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_3}, \quad ^2 d = \frac{\partial A}{\partial I_3}. \quad (2.1.8)$$

Заметив, что

$$\hat{Q} = \hat{r}^{st} r_s r_t, \quad \hat{G}^\times = G_{mn} r^m r^n, \quad \hat{G}^{\times^2} = G_{mn} G_{rq} r^m r^n r^q, \quad \hat{G}^{\times^{-1}} = G^{st} r_s r_t,$$

приходим к записям закона состояния в виде

$$\hat{r}^{st} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} (c g^{st} - {}^1 G_{mn} g^{sm} g^{tn} + {}^{-1} c G^{st}), \quad (2.1.9)$$

$$\hat{r}^{st} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} (d g^{st} - {}^1 G_{mn} g^{sm} g^{tn} + {}^2 G_{mn} G_{rq} r^m r^n r^q g^{st}) \quad (2.1.10)$$

Здесь контравариантные компоненты тензора напряжений выражены через компоненты метрических тензоров v - и V -объемов. Величины c, d могут быть названы обобщенными модулями упругости.

Принимая за материальные координаты точки ее декартовы координаты в начальном состоянии ($q^s = a_s$), приходим к записи закона состояния (2.1.9) в виде

$$\left. \begin{aligned} \hat{r}^{11} &= \frac{2}{\sqrt{G}} \left[c - {}^1 G_{11} + \frac{\partial A}{\partial I_3} (G_{22} G_{33} - G_{32}^2) \right], \\ \hat{r}^{12} &= \frac{2}{\sqrt{G}} \left[-{}^1 G_{12} + \frac{\partial A}{\partial I_3} (G_{23} G_{31} - G_{33} G_{21}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1.11)$$

и т. д.

В случае несжимаемой среды — среды, сохраняющей объем при деформации,

$$I_3(\hat{G}^\times) = \sqrt{\frac{G}{g}} = 1, \quad A(I_1, I_2, 1) = A(I_1, I_2) \quad (2.1.12)$$

и по (I. 12.7), (I. 12.8)

$$\delta I_3 = \frac{\partial I_3}{\partial \hat{G}^\times} \cdot \delta \hat{G}^\times = I_3(\hat{G}^\times) \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot \delta \hat{G}^\times = 0. \quad (2.1.13)$$

Введя в рассмотрение лагранжев множитель, назовем его c/I_3 , перепишем теперь соотношения (2.1.1), (2.1.2) в виде

$$\delta A = \left(\frac{\partial A}{\partial \hat{G}^\times} + {}^{-1} c \hat{G}^{\times^{-1}} \right) \cdot \delta \hat{G}^\times = \frac{1}{2} \hat{Q} \cdot \delta \hat{G}^\times. \quad (2.1.14)$$

Отсюда находим

$$\hat{Q} = 2 \left(\frac{\partial A}{\partial \hat{G}^\times} + {}^{-1} c \hat{G}^{\times^{-1}} \right). \quad (2.1.15)$$

Здесь A не зависит от I_3 , так что по (I. 12.12) приходим к уже знакомому представлению энергетического тензора напряжений

$$\hat{Q} = 2 (c \hat{g} - {}^1 c \hat{G}^\times + {}^{-1} c \hat{G}^{\times^{-1}}). \quad (2.1.16)$$

Но теперь отпадает представление c как «обобщенного модуля упругости» — эта неизвестная для несжимаемого материала величина (лагранжев множитель) определяется из уравнений статики, к которым присоединяется условие несжимаемости (2.1.12).

2.2. Начальное и натуральное состояния. Напомним, что перемещения точек среды отсчитываются от их положения в v -объеме, названного начальным. В нем

$$u = 0, \quad R = r, \quad \hat{G} = \hat{g}, \quad I_1 = I_2 = 3, \quad I_3 = 1, \quad (2.2.1)$$

так что

$$G_{mn} g^{mt} g^{ns} = g_n^t g^{ns} = g^{st}, \quad G^{st} = g^{st} \quad (2.2.2)$$

и напряжения в начальном состоянии представляются равенством

$$\tau_0^{st} = 2 \left(c - \frac{1}{c} + \frac{-1}{c} \right) G^{st} = 2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) G^{st}. \quad (2.2.3)$$

Здесь нуликом показано, что величина в скобках вычисляется для значений аргументов I_k , соответствующих начальному состоянию. Тензор напряжений в этом состоянии является шаровым и представляет всестороннее равномерное растяжение или сжатие [см. (3.5.9) гл. I]. Только такое состояние может быть принято за начальное, если сохранить единственное предположение об изотропии среды, на котором основывался вывод закона состояния (2.1.9). Итак, среда, изотропная в натуральном состоянии, может сохранять изотропию в напряженном состоянии только при условии, что последнее является всесторонним равномерным растяжением или сжатием. Для начальных состояний с распределением напряжений, отличных от всестороннего равномерного сжатия или растяжения, закон состояния (2.1.5) не имеет места. Такие состояния создают анизотропию свойств среды.

2.3. Связь между обобщенными модулями при различных начальных состояниях. Рассматриваются два состояния упругого тела — первое (v_0 -объем) является натуральным, второе получено из первого преобразованием подобия (v^\times -объем) с коэффициентом подобия K ; тогда

$$R = r^\times = Kr, \quad x_s = a_s^\times = Ka_s. \quad (2.3.1)$$

Соответствующие плотности ρ_0 и ρ^\times связаны соотношением

$$\rho_0 d\tau_0 = \rho^\times d\tau^\times, \quad \frac{\rho_0}{\rho^\times} = \frac{d\tau^\times}{d\tau_0} = K^3. \quad (2.3.2)$$

Меры деформации, вычисляемые по первому и второму начальным состояниям, и их инварианты связаны соотношениями (5.6.2), (5.6.3) гл. II. Потенциальная энергия деформации

в V -объеме обозначается a и соответственно a^\times . Конечно, $a = a^\times$, поскольку численное значение потенциальной энергии a^\times является суммой потенциальных энергий, накопленных в переходах $v_0 \rightarrow v^\times$, $v^\times \rightarrow V$, и не может отличаться от ее значения в переходе $v_0 \rightarrow V$. Поэтому, сославшись на (1.2.12), имеем

$$\begin{aligned} \int \int \int_{v_0} A(I_1, I_2, I_3) d\tau_0 &= \int \int \int_{v^\times} A^\times(I_1^\times, I_2^\times, I_3^\times) d\tau^\times = \\ &= \int \int \int_{v_0} A^\times(I_1^\times, I_2^\times, I_3^\times) K^3 d\tau_0 = \int \int \int_{v_0} A^\times\left(\frac{I_1}{K^2}, \frac{I_2}{K^4}, \frac{I_3}{K^6}\right) K^3 d\tau_0 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

и, поскольку объем v_0 может быть произвольно выбран,

$$A(I_1, I_2, I_3) = K^3 A^\times\left(\frac{I_1}{K^2}, \frac{I_2}{K^4}, \frac{I_3}{K^6}\right). \quad (2.3.4)$$

Теперь по (2.3.4) имеем

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} = K \frac{\partial A^\times}{\partial I_1^\times}, \quad \frac{\partial A}{\partial I_2} = \frac{1}{K} \frac{\partial A^\times}{\partial I_2^\times}, \quad \frac{\partial A}{\partial I_3} = \frac{1}{K^3} \frac{\partial A^\times}{\partial I_3^\times}, \quad (2.3.5)$$

так что по (2.1.4)

$$\left. \begin{aligned} {}^0 c &= K \left(\frac{\partial A^\times}{\partial I_1^\times} + I_1^\times \frac{\partial A^\times}{\partial I_2^\times} \right) = K {}^0 c^\times, \quad {}^1 c = \frac{1}{K} \frac{\partial A^\times}{\partial I_2^\times} = \frac{1}{K} {}^1 c^\times, \\ {}^{-1} c &= K^6 I_3^\times \frac{\partial A^\times}{\partial I_3^\times} \frac{1}{K^3} = K^3 {}^{-1} c^\times, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

где, конечно, ${}^0 c$, ${}^1 c$, ${}^{-1} c$ — обобщенные модули упругости, когда начальным состоянием является натуральное, а ${}^0 c^\times$, ${}^1 c^\times$, ${}^{-1} c^\times$ — когда начальным служит v^\times -объем:

$${}^0 c^\times = \frac{\partial A^\times}{\partial I_1^\times} + I_1^\times \frac{\partial A^\times}{\partial I_2^\times}, \quad {}^1 c^\times = \frac{\partial A^\times}{\partial I_2^\times}, \quad {}^{-1} c^\times = \frac{\partial A^\times}{\partial I_3^\times} I_3^\times. \quad (2.3.7)$$

Закон состояния при этом выборе начального состояния записывается в виде

$$\tilde{\tau}^{\times st} = \frac{2}{\sqrt{I_3^\times}} ({}^0 c^\times g^{st} - {}^1 c^\times g^{sk} g^{tq} G_{kq}^\times + {}^{-1} c^\times G^{\times st}). \quad (2.3.8)$$

Заменив здесь G_{kq}^\times , $G^{\times st}$ соответственно на $K^{-2} G_{kq}$, $K^2 G^{st}$, а I_3^\times на $K^{-6} I_3$ и используя (2.3.6), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^{\times st} &= \frac{2K^3}{\sqrt{I_3}} \left(\frac{{}^0 c}{K} g^{st} - K {}^1 c g^{sk} g^{tq} \frac{1}{K^2} G_{kq} + \frac{{}^{-1} c}{K^3} K^2 G^{st} \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{I_3}} K^2 ({}^0 c g^{st} - {}^1 c g^{sk} g^{tq} G_{kq} - {}^{-1} c G^{st}), \end{aligned}$$

или

$$\hat{t}^{\times st} = K^2 \hat{t}^{st}. \quad (2.3.9)$$

При такой связи между его контравариантными компонентами тензор напряжений сохраняет в V -объеме значение, не зависящее от выбора начального состояния:

$$\hat{t}^{\times} = \hat{t}^{\times st} R_s^{\times} R_t^{\times} = K^2 \hat{t}^{st} \frac{1}{K^2} R_s R_t = \hat{t}, \quad (2.3.10)$$

что и требуется.

2.4. Представление тензора напряжений. Переход от энергетического тензора напряжений к тензору напряжений проводится с помощью соотношения (2.1.2). Используются зависимости [см. (3.3.2), (3.3.7), (4.1.5), (4.1.6) гл. II]

$$\begin{aligned} \nabla R^* \cdot \hat{g} \cdot \nabla R &= R_s r^s \cdot r_t r^t \cdot r^q R_q = g^{tq} R_t R_q = \hat{M}, \\ \nabla R^* \cdot \hat{G}^{\times} \cdot \nabla R &= \nabla R^* \cdot \nabla R \cdot \nabla R^* \cdot \nabla R = \hat{M}^2, \\ \nabla R^* \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot \nabla R &= \nabla R^* \cdot (\nabla R \cdot \nabla R^*)^{-1} \cdot \nabla R = \\ &= \nabla R^* \cdot (\nabla R^*)^{-1} \cdot (\nabla R)^{-1} \cdot \nabla R = \hat{G}, \\ \nabla R^* \cdot \hat{G}^{\times^2} \cdot \nabla R &= \hat{M}^3 = I_1 \hat{M}^2 - I_2 \hat{M} + I_3 \hat{G}, \end{aligned}$$

по (2.1.5) или (2.1.6) приходим к записи закона состояния в форме Фингера (1894):

$$\hat{T} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} (\hat{c}^0 \hat{M} - \hat{c}^1 \hat{M}^2 + \hat{c}^{-1} \hat{G}). \quad (2.4.1)$$

В него входят тензоры, определенные в векторных базисах V -объема, \hat{G} — единичный тензор в этих базисах (не смешивать с \hat{G}^{\times} !).

Конечно, вместо тензора \hat{M} можно использовать обратный тензор $\hat{M}^{-1} = \hat{g}^{\times}$. Обратившись к формулам (I.10.12), (I.10.13), дающим выражения целых отрицательных степеней тензора, придем к записи закона состояния в виде

$$\hat{T} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} (\hat{e}^0 \hat{G} - \hat{e}^1 \hat{g}^{\times} + \hat{e}^2 \hat{g}^{\times^2}). \quad (2.4.2)$$

Здесь обобщенные модули даются формулами

$$\hat{e}^0 = I_1 \frac{\partial A}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3}, \quad \hat{e}^1 = I_2 \frac{\partial A}{\partial I_1} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_2}, \quad \hat{e}^2 = I_3 \frac{\partial A}{\partial I_1}. \quad (2.4.3)$$

Их можно также выразить через инварианты $I'_k = I_k(\hat{g}^{\times})$; обратившись к формулам (5.2.5) гл. II, получим после очевидного вычисления

$$\hat{e}^0 = -I'_3 \frac{\partial A}{\partial I'_3}, \quad \hat{e}^1 = \frac{\partial A}{\partial I'_1} + I'_1 \frac{\partial A}{\partial I'_2}, \quad \hat{e}^2 = \frac{\partial A}{\partial I'_2}. \quad (2.4.4)$$

В форме записи уравнения состояния Фингера, промежуточной между (2.4.1) и (2.4.2), используются тензоры \hat{M} и \hat{g} ; имеем [см. (I. 10.12), (I. 10.14), (I. 10.15)]

$$\hat{M}^2 = \hat{M} \cdot \hat{g}^{\times -1} = \hat{M} \cdot \frac{1}{I_3} (\hat{g}^{\times 2} - I_1' \hat{g}^{\times} + I_2' \hat{G}) = I_3 \hat{g}^{\times} - I_2 \hat{G} + I_1 \hat{M},$$

и подстановка в (2.4.1) с учетом (2.1.7) приводит к соотношению

$$\hat{T} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} \hat{M} - I_3 \frac{\partial A}{\partial I_2} \hat{g}^{\times} + \left(I_2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \hat{G} \right]. \quad (2.4.5)$$

Некоторые авторы вводят в рассмотрение тензор, главные значения которого, значит и главные инварианты, равны главным значениям тензора напряжения \hat{T} , но главные оси совмещены с главными осями меры деформации \hat{G}^{\times} . Заметив, что тензор \hat{T} соосен не с \hat{G}^{\times} , а с тензором \hat{g}^{\times} , и сославшись на (5.3.3) гл. II, можно определить «повернутый тензор напряжений», обозначаемый \hat{T}^{\wedge} через тензор поворота \hat{A} соотношением

$$\hat{T}^{\wedge} = \hat{A} \cdot \hat{T} \cdot \hat{A}^{\wedge} \quad (2.4.6)$$

и по (2.4.1)

$$\hat{T}^{\wedge} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} (\hat{c} \hat{G}^{\times} - \hat{c} \hat{G}^{\times 2} + \hat{c} \hat{g}), \quad (2.4.7)$$

так как $\hat{A} \cdot \hat{G} \cdot \hat{A}^{\wedge} = \hat{A} \cdot \hat{A}^{\wedge} = \hat{g}$. По (2.4.1) имеем также

$$\hat{G}^{\times -1} \cdot \hat{T}^{\wedge} = \hat{Q}, \quad \hat{T}^{\wedge \times} = \hat{G}^{\times} \cdot \hat{Q}. \quad (2.4.8)$$

2.5. Выражение закона состояния через тензоры деформации. Переход от мер к тензорам деформации осуществляется с помощью соотношений (3.6.3), (4.3.3) гл. II:

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} (\hat{G}^{\times} - \hat{g}), \quad \hat{\mathcal{E}}^{\wedge} = \frac{1}{2} (\hat{G} - \hat{g}^{\times}), \quad (2.5.1)$$

а формулы связи между их главными инвариантами перечислены в п. 5.4 гл. II. Из них имеем

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j_2} + \frac{1}{8} \frac{\partial A}{\partial j_3}, \quad \frac{\partial A}{\partial I_2} = \frac{1}{4} \frac{\partial A}{\partial j_2} - \frac{1}{8} \frac{\partial A}{\partial j_3}, \quad \frac{\partial A}{\partial I_3} = \frac{1}{8} \frac{\partial A}{\partial j_3}. \quad (2.5.2)$$

Пользуясь этими соотношениями и заменив $\hat{G}^{\times 2}$ его выражением

$$\hat{G}^{\times 2} = 4\hat{\mathcal{E}}^2 + 4\hat{\mathcal{E}}^{\wedge} + \hat{g},$$

можно представить выражение (2.1.5) энергетического тензора напряжений в виде

$$\sqrt{\frac{G}{g}} \hat{Q} = \hat{d}' \hat{g} - \hat{d}' \hat{\mathcal{E}} + \hat{d}' \hat{\mathcal{E}}^2, \quad (2.5.3)$$

причем выражения обобщенных модулей $\overset{k}{d'}$ через главные инварианты j_k тензора $\hat{\mathcal{E}}$ сохраняют структуру (2.1.8):

$$\overset{0}{d'} = \frac{\partial A}{\partial j_1} + j_1 \frac{\partial A}{\partial j_2} + j_2 \frac{\partial A}{\partial j_3}, \quad \overset{1}{d'} = \frac{\partial A}{\partial j_2} + j_1 \frac{\partial A}{\partial j_3}, \quad \overset{2}{d'} = \frac{\partial A}{\partial j_3}. \quad (2.5.4)$$

Аналогично строится представление повернутого тензора напряжений \hat{T}^v ; при этом оказывается удобным вместо третьего главного инварианта ввести в рассмотрение квадратный корень из него — отношение объемов среды в V - и v -состояниях:

$$\Theta = \sqrt{\frac{G}{g}} = \sqrt{I_3(\hat{G}^\times)} = (1 + 2j_1 + 4j_2 + 8j_3)^{1/2} = D + 1, \quad (2.5.5)$$

где D , согласно (5.5.1) гл. II, — относительное изменение элемента объема. Теперь вместо (2.5.2) имеем

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial j_1} - \frac{\partial A}{\partial j_2} \right), \quad \frac{\partial A}{\partial I_2} = \frac{1}{4} \frac{\partial A}{\partial j_2}, \quad \frac{\partial A}{\partial I_3} = \frac{1}{2\Theta} \frac{\partial A}{\partial \Theta} \quad (2.5.6)$$

и выражение повернутого тензора напряжений (2.4.7) записывается в виде

$$\hat{T}^v = \frac{1}{\Theta} (\overset{0}{m} \hat{g} + \overset{1}{m} \hat{\mathcal{E}} + \overset{2}{m} \hat{\mathcal{E}}^2) \quad (2.5.7)$$

с модулями

$$\left. \begin{aligned} \overset{0}{m} &= \frac{\partial A}{\partial j_1} + j_1 \frac{\partial A}{\partial j_2} + \Theta \frac{\partial A}{\partial \Theta}, & \overset{1}{m} &= 2 \left(\frac{\partial A}{\partial j_1} + j_1 \frac{\partial A}{\partial j_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j_2} \right), \\ \overset{2}{m} &= -2 \frac{\partial A}{\partial j_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.8)$$

Аналогично представление тензора напряжений через тензор деформации Альманзи — Гамеля

$$\hat{T} = \Theta' (\overset{0}{\tilde{m}} \hat{G} + \overset{1}{\tilde{m}} \hat{\mathcal{E}} + \overset{2}{\tilde{m}} \hat{\mathcal{E}}^2). \quad (2.5.9)$$

Здесь

$$\Theta' = \sqrt{\frac{g}{G}} = \sqrt{I_3(\hat{g}^\times)} = (1 - 2j'_1 + 4j'_2 - 8j'_3)^{1/2} = (D + 1)^{-1}, \quad (2.5.10)$$

а модули $\overset{k}{\tilde{m}}$ даются формулами

$$\left. \begin{aligned} \overset{0}{\tilde{m}} &= \frac{\partial A}{\partial j'_1} + j'_1 \frac{\partial A}{\partial j'_2} - \Theta' \frac{\partial A}{\partial \Theta'}, \\ \overset{1}{\tilde{m}} &= -2 \left(\frac{\partial A}{\partial j'_1} + j'_1 \frac{\partial A}{\partial j'_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j'_2} \right), \\ \overset{2}{\tilde{m}} &= 2 \frac{\partial A}{\partial j'_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.11)$$

В начальном состоянии

$$\hat{\mathcal{E}} = 0, \quad \hat{\mathcal{E}}' = 0, \quad \Theta = \Theta' = 1 \quad j_k = j'_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

и выражения введенных в рассмотрение тензоров приводятся к виду

$$\hat{Q}_0 = \left(\frac{\partial A}{\partial j_1} \right)_0 \hat{g}, \quad \hat{T}_0^1 = \left(\frac{\partial A}{\partial j_1} + \frac{\partial A}{\partial \Theta} \right)_0 \hat{g}, \quad \hat{T}_0 = \left(\frac{\partial A}{\partial j_1} - \frac{\partial A}{\partial \Theta'} \right)_0 \hat{G}. \quad (2.5.12)$$

В первой формуле удельная потенциальная энергия деформации A рассматривается как функция от j_1, j_2, j_3 , во второй (третьей) — от j_1, j_2, Θ (j'_1, j'_2, Θ'). Этим объясняется отличие записей формул для \hat{Q}_0 и \hat{T}_0 . Если начальным состоянием является натуральное, то

$$\left[\frac{\partial}{\partial j_1} A(j_1, j_2, j_3) \right]_0 = 0, \quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial j_1} + \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) A(j_1, j_2, \Theta) \right]_0 = 0 \quad (2.5.13)$$

или же

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial j'_1} - \frac{\partial}{\partial \Theta'} \right) A(j'_1, j'_2, \Theta') \right]_0 = 0. \quad (2.5.14)$$

В случае несжимаемого материала модули m (и \hat{m}) в формулах (2.5.7), (2.5.11) остаются неизвестными. Они определяются из уравнений статики и условия несжимаемости

$$\Theta = 1 \quad (\Theta' = 1).$$

2.6. Главные напряжения. Следствием закона состояния Фингера (2.4.1) является соосность тензора напряжения \hat{T} с тензором меры деформации \hat{M} (или \hat{g}^\times). Вспомнив, что главные значения этой меры равны главным значениям G_s тензора \hat{G}^\times , и называя t_s главные напряжения, имеем

$$\hat{M} = G_1 \hat{e}^1 \hat{e}^1 + G_2 \hat{e}^2 \hat{e}^2 + G_3 \hat{e}^3 \hat{e}^3, \quad \hat{T} = t_1 \hat{e}^1 \hat{e}^1 + t_2 \hat{e}^2 \hat{e}^2 + t_3 \hat{e}^3 \hat{e}^3, \quad (2.6.1)$$

где \hat{e}^s — единичные векторы главных направлений этих тензоров.

По (2.4.1), учитывая, что $\hat{G} = \sum_{s=1}^3 \hat{e}^s \hat{e}^s$ — единичный тензор V -объема, имеем

$$t_s = \frac{2}{V I_3} ({}^0 c G_s - {}^1 c G_s^2 + {}^{-1} c). \quad (2.6.2)$$

В рассмотрение вводятся также главные относительные удлинения δ_s ; по (3.4.4) гл. II они определяются равенствами

$$G_s = (1 + \delta_s)^2, \quad s = 1, 2, 3, \quad (2.6.3)$$

а инварианты $I_k(\hat{G}^\times)$ выражаются через них по формулам

$$\left. \begin{aligned} I_1(\hat{G}^\times) &= (1 + \delta_1)^2 + (1 + \delta_2)^2 + (1 + \delta_3)^2, \\ I_2(\hat{G}^\times) &= (1 + \delta_1)^2 (1 + \delta_2)^2 + (1 + \delta_2)^2 (1 + \delta_3)^2 + (1 + \delta_3)^2 (1 + \delta_1)^2, \\ I_3(\hat{G}^\times) &= (1 + \delta_1)^2 (1 + \delta_2)^2 (1 + \delta_3)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.6.4)$$

Поэтому

$$\frac{\partial I_1}{\partial \delta_s} = 2(1 + \delta_s), \quad \frac{\partial I_2}{\partial \delta_s} = 2(1 + \delta_s)(I_1 - G_s), \quad \frac{\partial I_3}{\partial \delta_s} = 2(1 + \delta_s) \frac{I_3}{(1 + \delta_s)^2}. \quad (2.6.5)$$

Теперь, вспомнив определение (2.1.7) обобщенных модулей, представим (2.6.2) в виде

$$t_s = \frac{2(1 + \delta_s)^2}{\sqrt{I_3}} \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - G_s) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{I_3}{(1 + \delta_s)^2} \frac{\partial A}{\partial I_3} \right], \quad (2.6.6)$$

причем по (2.6.5)

$$\frac{\partial A}{\partial \delta_s} = 2(1 + \delta_s) \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{\partial A}{\partial I_2} (I_1 - G_s) + \frac{I_3}{(1 + \delta_s)^2} \frac{\partial A}{\partial I_3} \right]. \quad (2.6.7)$$

Это позволяет записать выражения главных напряжений в простом виде:

$$t_s = \frac{1 + \delta_s}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial A}{\partial \delta_s} \quad (s = 1, 2, 3), \quad (2.6.8)$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \delta_1} &= (1 + \delta_2)(1 + \delta_3)t_1, \quad \frac{\partial A}{\partial \delta_2} = (1 + \delta_3)(1 + \delta_1)t_2, \\ \frac{\partial A}{\partial \delta_3} &= (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)t_3. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Удельная потенциальная энергия деформации предполагается заданной через главные удлинения.

Величины справа в формулах (2.6.9) представляют главные напряжения ${}_0t_s$, отнесенные к площадкам $d\vec{O}$ в v -объеме, нормальным главным направлениям \vec{e} тензора \hat{G}^\times ; действительно,

$${}_0t_s d\vec{O} = t_s d\vec{O}, \quad {}_0t_s = t_s \frac{d\vec{O}}{d\vec{O}} = t_s \frac{\sqrt{I_3}}{1 + \delta_s},$$

и формулы (2.6.9) представляются в простейшей форме:

$$\frac{\partial A}{\partial \delta_s} = {}_0t_s. \quad (2.6.10)$$

Возвращаясь к (2.6.8), составим выражение вариации удельной потенциальной энергии деформации:

$$\delta A = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial A}{\partial \delta_s} \delta \delta_s = t_1 (1 + \delta_2) (1 + \delta_3) \delta (1 + \delta_1) + \\ + t_2 (1 + \delta_3) (1 + \delta_1) \delta (1 + \delta_2) + t_3 (1 + \delta_1) (1 + \delta_2) \delta (1 + \delta_3); \quad (2.6.11)$$

его левая часть представляет приращение потенциальной энергии деформации в единичном кубике ν -объема с ребрами, направленными в V -объеме по главным осям $\underline{\hat{e}}$ тензора напряжений \hat{T} ; его правая часть равна элементарной работе приложенных нормально к граням этого кубика сил

$$t_1 (1 + \delta_2) (1 + \delta_3), \quad t_2 (1 + \delta_3) (1 + \delta_1), \quad t_3 (1 + \delta_1) (1 + \delta_2).$$

Этим объясняется неожиданно простая форма соотношений (2.6.8). Для несжимаемого материала

$$\sqrt{I_3} - 1 = (1 + \delta_1) (1 + \delta_2) (1 + \delta_3) - 1 = 0, \quad (2.6.12)$$

и к соотношению (2.6.11) добавляется уравнение связи между вариациями величин $1 + \delta_s$:

$$(1 + \delta_2) (1 + \delta_3) \delta (1 + \delta_1) + (1 + \delta_3) (1 + \delta_1) \delta (1 + \delta_2) + \\ + (1 + \delta_1) (1 + \delta_2) \delta (1 + \delta_3) = 0.$$

Теперь, введя лагранжевы множитель p , придем к выражениям главных напряжений для несжимаемого материала в виде

$$t_s = p + (1 + \delta_s) \frac{\partial A}{\partial \delta_s}. \quad (2.6.13)$$

Заметим, что величина c в законе состояния (2.4.1) также имеет смысл лагранжевого множителя.

2.7. Выражение тензора напряжений. Формулы (2.6.1), (2.6.7) позволяют представить тензор напряжений также в виде

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \sum_{s=1}^3 (1 + \delta_s) \frac{\partial A}{\partial \delta_s} \underline{\hat{e}}^s \underline{\hat{e}}^s. \quad (2.7.1)$$

Заменив здесь $\underline{\hat{e}}$ единичными векторами $\underline{\hat{e}}^s$ главных направлений меры деформации \hat{G}^\times :

$$\underline{\hat{e}}^s = \hat{A}^* \cdot \underline{\hat{e}}^s = \underline{\hat{e}}^s \cdot \hat{A} \quad (\hat{A} = \underline{\hat{e}}^t \underline{\hat{e}}^t),$$

где \hat{A} — тензор поворота [см. (5.3.3) гл. II], получим

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \hat{A}^* \cdot \sum_{s=1}^3 (1 + \delta_s) \frac{\partial A}{\partial \delta_s} \underline{\hat{e}}^s \underline{\hat{e}}^s \cdot \hat{A}. \quad (2.7.2)$$

Можно этому выражению придать инвариантную форму, рассматривая удельную потенциальную энергию деформации как функцию трех инвариантов

$$s_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \quad s_2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2, \quad s_3 = \delta_1^3 + \delta_2^3 + \delta_3^3. \quad (2.7.3)$$

Тогда

$$(1 + \delta_s) \frac{\partial A}{\partial \delta_s} = (1 + \delta_s) \left(\frac{\partial A}{\partial s_1} + 2\delta_s \frac{\partial A}{\partial s_2} + 3\delta_s^2 \frac{\partial A}{\partial s_3} \right),$$

и с помощью тождественных преобразований

$$\delta_s (1 + \delta_s) = (1 + \delta_s)^2 - (1 + \delta_s),$$

$$\delta_s^2 (1 + \delta_s) = (1 + \delta_s)^3 - 2(1 + \delta_s)^2 + (1 + \delta_s)$$

это выражение записывается в виде

$$(1 + \delta_s) \frac{\partial A}{\partial \delta_s} = (1 + \delta_s) \left(\frac{\partial A}{\partial s_1} - 2 \frac{\partial A}{\partial s_2} + 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \right) + \\ + 2(1 + \delta_s)^2 \left(\frac{\partial A}{\partial s_2} - 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \right) + 3(1 + \delta_s)^3 \frac{\partial A}{\partial s_3}.$$

Возвратившись к (2.7.2) и вспомнив теперь представление меры деформации \hat{G}^\times в виде

$$\hat{G}^\times = \sum_{s=1}^3 G_s {}^s s \mathbf{e} \mathbf{e} = \sum_{s=1}^3 (1 + \delta_s)^2 {}^s s \mathbf{e} \mathbf{e}, \quad \hat{G}^{\times 1/2} = \sum_{s=1}^3 (1 + \delta_s) {}^s s \mathbf{e} \mathbf{e},$$

придем к выражению

$$\hat{T} = \frac{1}{V I_3} \hat{A}^* \cdot \left[\left(\frac{\partial A}{\partial s_1} - 2 \frac{\partial A}{\partial s_2} + 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \right) \hat{G}^{\times 1/2} + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial A}{\partial s_2} - 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \right) \hat{G}^\times + 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \hat{G}^{\times 1/2} \right] \cdot \hat{A}, \quad (2.7.4)$$

которое с помощью формул (5.3.6) гл. II записывается в виде

$$\hat{T} = \frac{1}{V I_3} \nabla \mathbf{R}^* \cdot \left[\left(\frac{\partial A}{\partial s_1} - 2 \frac{\partial A}{\partial s_2} + 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \right) \hat{A} + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial A}{\partial s_2} - 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \right) \nabla \mathbf{R} + 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \hat{G}^{\times 1/2} \cdot \nabla \mathbf{R} \right]. \quad (2.7.5)$$

Для несжимаемого материала вместо формул (2.7.2) имеем выражение

$$\hat{T} = \hat{A}^* \cdot \sum_{s=1}^3 (1 + \delta_s) \frac{\partial A}{{\partial \delta_s}} {}^s s \mathbf{e} \mathbf{e} \cdot \hat{A} + p \hat{G}, \quad (2.7.6)$$

так как $\hat{G} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{e}\mathbf{e}^{ss}$ — единичный тензор в V -объеме. Инвариант s_3 теперь может быть с помощью условия несжимаемости (2.6.12) и соотношений (5.4.2) гл. II выражен через s_1, s_2 :

$$\delta_1 \delta_2 \delta_3 = - \left[s_1 + \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2) \right] = \frac{1}{6} (2s_3 - 3s_1 s_2 + s_1^3), \quad (2.7.7)$$

и поэтому исключен из выражения удельной потенциальной энергии деформации; обозначая результат такого исключения через $\tilde{A}(s_1, s_2)$, получаем вместо (2.7.6)

$$\hat{T} = \nabla \mathbf{R}^* \cdot \left[\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial s_1} - 2 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial s_2} \right) \hat{A} + 2 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial s_2} \nabla \mathbf{R} \right] + p \hat{G}. \quad (2.7.8)$$

2.8. Тензор напряжений Пиола (1836) — Кирхгоффа (1850). По определению тензора напряжений его произведение на вектор ориентированной площадки $N dO$ в V -объеме равно действующей на эту площадку силе $\mathbf{F} dO$:

$$\mathbf{F} dO = N \cdot \hat{T} dO. \quad (2.8.1)$$

Перейдя в этом выражении к площадке $\mathbf{n} do$ в v -объеме с помощью соотношения (3.5.3) гл. II, получим

$$\mathbf{F} dO = \sqrt{I_3} \mathbf{n} \cdot (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^* \cdot \hat{T} do = \mathbf{n} \cdot \hat{D} do. \quad (2.8.2)$$

Здесь в рассмотрение введен несимметричный тензор

$$\hat{D} = \sqrt{I_3} (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^* \cdot \hat{T}, \quad \hat{D}^* = \sqrt{I_3} \hat{T} \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{r}, \quad (2.8.3)$$

называемый тензором напряжений Пиола — Кирхгоффа. Уравнение статики в объеме, выражающее условие обращения в нуль главного вектора сил, действующих на произвольно выделенный из тела объем,

$$\begin{aligned} \int_0 \int \mathbf{F} dO + \int_v \int \int \rho \mathbf{K} d\tau &= \int_0 \int \mathbf{n} \cdot \hat{D} do + \int_v \int \int \rho_0 \mathbf{K} d\tau_0 = \\ &= \int_v \int \int (\nabla \cdot \hat{D} + \rho_0 \mathbf{K}) d\tau_0 = 0 \end{aligned}$$

здесь приводится к виду

$$\nabla \cdot \hat{D} + \rho_0 \mathbf{K} = 0. \quad (2.8.4)$$

Дивергенция вычисляется в векторном базисе начального объема v ; это облегчает решение ряда задач. Знание наперед неизвестной геометрии V -объема предполагается в записи уравнения статики на поверхности [см. (3.5.4) гл. II]

$$\mathbf{n} \cdot \hat{D} = \mathbf{F} \frac{dO}{do} = \mathbf{F} \left(\frac{G}{g} \mathbf{n} \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot \mathbf{n} \right)^{1/2}. \quad (2.8.5)$$

Уравнение состояния для тензора Пиола по (2.7.5), (2.8.3) и (3.2.6) гл. II записывается в виде

$$\hat{D} = \left(\frac{\partial A}{\partial s_1} - 2 \frac{\partial A}{\partial s_2} + 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \right) \hat{A} + 2 \left(\frac{\partial A}{\partial s_2} - 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \right) \nabla R + 3 \frac{\partial A}{\partial s_3} \hat{G} \times^{1/2} \cdot \nabla R. \quad (2.8.6)$$

Оно нашло применение в ряде работ (Джон, 1956) для материала «гармонического типа». Предполагается, что удельная потенциальная энергия деформации не зависит от инварианта s_3 , а ее зависимость от s_1, s_2 записывается в виде

$$A = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2 = \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu) s_1^2 - 4\mu (\delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_3 + \delta_3 \delta_1)], \quad (2.8.7)$$

где λ, μ — постоянные. При отождествлении λ, μ с постоянными Ляме, а главных относительных удлинений δ_s с диагональными компонентами ϵ_{ss} линейного тензора деформации приходим к известному выражению удельной потенциальной энергии в линейной теории упругости. Для материала «гармонического типа» *)

$$\hat{D} = (\lambda s_1 - 2\mu) \hat{A} + 2\mu \nabla R. \quad (2.8.8)$$

2.9. О задании удельной потенциальной энергии деформации. Выбор формы зависимости удельной потенциальной энергии деформации от инвариантных характеристик деформации представляет трудную и, конечно, неразрешимую единственным образом задачу. Можно указать ряд критериев, которым должна удовлетворять разумно назначаемая зависимость.

Свойство упругого материала накапливать энергию при деформировании приводит к требованию положительности удельной потенциальной энергии деформации A для всякого сопровождающегося деформацией («нетвердого») перемещения из натурального состояния (принимается, что в этом состоянии $A = 0$).

В натуральном состоянии [см. (2.6.8)]

$$\delta_s = 0, \quad t_s = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \delta_s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3),$$

и поэтому представление $A(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ степенным рядом в окрестности натурального состояния начинается с квадратичных по δ_s слагаемых

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \delta_s \partial \delta_k} \right)_0 \delta_s \delta_k + \dots \quad (2.9.1)$$

*) Наименование обусловлено тем, что рассмотрение плоской деформации тела из такого материала сводится к нелинейной краевой задаче теории гармонических функций. Можно назвать этот материал «полулинейным».

Необходимым критерием пригодности выбранного представления является положительность квадратичной формы

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \delta_s \partial \delta_k} \right)_0 \xi_s \xi_k$$

— матрица $\left\| \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \delta_s \partial \delta_k} \right)_0 \right\|$ должна удовлетворять известным неравенствам Сильвестра. Этим гарантируется положительность A в некоторой окрестности натурального состояния, но, конечно, не во всей области значений δ_s ($-1 < \delta_s < \infty$).

По формулам (2.6.7), (2.6.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial \delta_s \partial \delta_k} = & \frac{1}{1 + \delta_s} \frac{\partial A}{\partial \delta_s} \frac{\partial \delta_s}{\partial \delta_k} + \\ & + 4(1 + \delta_s)(1 + \delta_k) \left\{ \frac{\partial^2 A}{\partial I_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial I_1 \partial I_2} (2I_1 - G_s - G_k) + \right. \\ & + \frac{\partial^2 A}{\partial I_1 \partial I_3} I_3 \left[\frac{1}{(1 + \delta_k)^2} + \frac{1}{(1 + \delta_s)^2} \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial I_2^2} (I_1 - G_s)(I_1 - G_k) + \\ & + \frac{\partial^2 A}{\partial I_2 \partial I_3} I_3 \left[\frac{I_1 - G_s}{(1 + \delta_k)^2} + \frac{I_1 - G_k}{(1 + \delta_s)^2} \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial I_3^2} \frac{I_3^2}{(1 + \delta_s)^2 (1 + \delta_k)^2} \left. \right\} + \\ & + 4(1 + \delta_s) \frac{\partial A}{\partial I_2} \left[1 + \delta_k - (1 + \delta_s) \frac{\partial \delta_s}{\partial \delta_k} \right] + \\ & + 4 \frac{\partial A}{\partial I_3} I_3 \left[\frac{1}{(1 + \delta_s)(1 + \delta_k)} - \frac{1}{(1 + \delta_s)^2} \frac{\partial \delta_s}{\partial \delta_k} \right] \quad (2.9.2) \end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \delta_s \partial \delta_k} \right)_0 = & 4 \left[\left(\frac{\partial}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3} \right)^2 A \right]_0 + \\ & + \begin{cases} 0, & s = k, \\ 4 \left[\left(\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3} \right) A \right]_0, & s \neq k. \end{cases} \quad (2.9.3) \end{aligned}$$

Введя обозначения постоянных

$$4 \left[\left(\frac{\partial}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3} \right) A \right]_0 = \lambda + 2\mu, \quad 4 \left[\left(\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3} \right) A \right]_0 = -2\mu, \quad (2.9.4)$$

придем к представлению удельной потенциальной энергии деформации

$$A = \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu)(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 - 4\mu(\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_3\delta_1)] + \dots \quad (2.9.5)$$

или, при обозначениях (2.7.3),

$$A = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2 + \dots \quad (2.9.6)$$

Выписанные явно слагаемые дают выражение удельной потенциальной энергии деформации «гармонического» («полулинейного») материала. Необходимые (конечно, недостаточные) критерии положительности A представляются теперь в форме необходимых и достаточных критериев положительности этой величины в линейной теории упругости [см. (3.3.7) гл. III]:

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \quad (2.9.7)$$

или, по (2.9.4),

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3} \right) A \right]_0 < 0, \quad 3 \left[\left(\frac{\partial}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3} \right) A \right]_0 + 2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial I_2} + \frac{\partial}{\partial I_3} \right) A \right]_0 > 0. \quad (2.9.8)$$

Можно предложить также статические критерии — поведение материала не должно противоречить интуитивно ожидаемым представлениям. Один из таких критериев формулируется неравенствами:

$$\text{если } \delta_1 > \delta_2 > \delta_3, \quad \text{то } t_1 > t_2 > t_3. \quad (2.9.9)$$

Пусть $\delta_1 > \delta_2$. Тогда $t_1 > t_2$ и по (2.6.6), (2.6.4) получаем неравенство

$$\left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + (1 + \delta_3)^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right] [(1 + \delta_1)^2 - (1 + \delta_2)^2] > 0. \quad (2.9.10)$$

Второй множитель положителен; пришли к неравенствам (Трусделл)

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} + (1 + \delta_s)^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} > 0 \quad (s = 1, 2, 3). \quad (2.9.11)$$

Было получено одно из них (для $s = 3$), но аналогично доказываются остальные. Если же $\delta_1 = \delta_2 > \delta_3$, то неравенства (2.9.11) сохраняются для $s = 1$ и $s = 2$; теперь $t_1 = t_2$ и суждение о знаке величины

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} + (1 + \delta_3)^2 \frac{\partial A}{\partial I_2}$$

достигается предельным переходом: при $\delta_1 = \delta_2 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) эта величина положительна при сколь угодно малом ε . Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ она или сохраняет знак, или становится нулем:

$$\delta_1 = \delta_2, \quad \frac{\partial A}{\partial I_1} + (1 + \delta_3)^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \geq 0. \quad (2.9.12)$$

§ 3. Представление закона состояния квадратичным трехчленом

3.1. Квадратичная зависимость между двумя соосными тензорами. Законы состояния, представленные в § 2, выражают зависимости между парами соосных тензоров $(\hat{Q}, \hat{G}^\times)$, $(\hat{T}, \hat{G}^\times)$, (\hat{T}, \hat{M}) , $(\hat{T}, \hat{g}^\times)$. Структура этих зависимостей одинакова —

определяемый тензор представляется квадратным трехчленом, равным сумме квадрата, первой и нулевой степени (единичного тензора \hat{g} в v - или \hat{G} в V -метрике) тензора, через который он выражен. Коэффициенты этого трехчлена являются функциями инвариантов, определяемыми по заданию удельной потенциальной энергии деформации.

Как указывалось в п. I.12, возможность установления квадратичной зависимости между соосными тензорами является следствием теоремы Кейли — Гамильтона (I.10.11), позволяющей заменить степени тензора выше второй его нулевой, первой и второй степенями. Этим указывается другой способ вывода закона состояния. Форма связи рассматриваемого тензора напряжения с соответствующей мерой (или тензором) деформации задается квадратным трехчленом, коэффициенты которого далее определяются по условию интегрируемости вариации удельной потенциальной энергии деформации. Легче всего это проследить на примере энергетического тензора напряжений \hat{Q} , через который эта вариация непосредственно определяется по формуле (2.1.1)

$$\delta A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{Q} \cdot \delta \hat{G}^\times = \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{Q} \cdot \delta \hat{\mathcal{E}}. \quad (3.1.1)$$

3.2. Представление энергетического тензора напряжений. Соосным с ним является тензор деформации Коши $\hat{\mathcal{E}}$, и квадратичный трехчлен, их связывающий, представляется в виде

$$\hat{Q} = a_0 \hat{g} + a_1 \hat{\mathcal{E}} + a_2 \hat{\mathcal{E}}^2, \quad (3.2.1)$$

так как тензоры \hat{Q} , $\hat{\mathcal{E}}$ определены в метрике начального состояния (v -объема):

$$\hat{Q} = I^{st} r_s r_t, \quad \hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{st} r^s r^t. \quad (3.2.2)$$

Имеем, далее, *)

$$\hat{g} \cdot \delta \hat{\mathcal{E}} = I_1 (\hat{g} \cdot \delta \hat{\mathcal{E}}) = I_1 (\delta \hat{\mathcal{E}}) = \delta I_1 (\hat{\mathcal{E}});$$

$$\hat{\mathcal{E}} \cdot \delta \hat{\mathcal{E}} = I_1 (\hat{\mathcal{E}} \cdot \delta \hat{\mathcal{E}}) = I_1 \left(\delta \frac{\hat{\mathcal{E}}^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \delta I_1 (\hat{\mathcal{E}}^2),$$

$$\hat{\mathcal{E}}^2 \cdot \delta \hat{\mathcal{E}} = I_1 (\hat{\mathcal{E}}^2 \cdot \delta \hat{\mathcal{E}}) = I_1 \left(\delta \frac{\hat{\mathcal{E}}^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \delta I_1 (\hat{\mathcal{E}}^3).$$

Но по (I.10.10), (I.10.11)

$$I_1 (\hat{\mathcal{E}}^2) = j_1^2 - 2j_2, \quad I_1 (\hat{\mathcal{E}}^3) = j_1^3 - 3j_1 j_2 + 3j_3 \quad (j_k = I_k (\hat{\mathcal{E}})),$$

*) $\delta \hat{P}^2 = \hat{P} \cdot \delta \hat{P} + (\delta \hat{P}) \cdot \hat{P} \neq 2\hat{P} \cdot \delta \hat{P}$; однако $I_1 (\hat{P} \cdot \delta \hat{P}) = I_1 ((\delta \hat{P}) \cdot \hat{P})$, и поэтому $I_1 (\hat{P} \cdot \delta \hat{P}) = \frac{1}{2} \delta I_1 (\hat{P}^2)$. Точно так же $\delta \hat{P}^3 \neq 3\hat{P}^2 \cdot \delta \hat{P}$, но $I_1 (\hat{P}^2 \cdot \delta \hat{P}) = \frac{1}{3} \delta I_1 (\hat{P}^3)$.

так что

$$\hat{g} \cdot \delta \hat{g} = \delta j_1, \quad \hat{g} \cdot \delta \hat{g} = j_1 \delta j_1 - \delta j_2, \quad \hat{g} \cdot \delta \hat{g} = (j_1^2 - j_2) \delta j_1 - j_1 \delta j_2 + \delta j_3. \quad (3.2.3)$$

Теперь выражение вариации удельной потенциальной энергии деформации записывается в виде

$$\delta A = \sqrt{\frac{G}{g}} \left[(a + {}^1a_{j_1} + {}^2a(j_1^2 - j_2)) \delta j_1 - (a + {}^2a_{j_1}) \delta j_2 + {}^2a \delta j_3 \right]. \quad (3.2.4)$$

Это выражение должно удовлетворять условиям интегрируемости — коэффициенты при δj_k следует приравнять производным A по j_k . Приходим к трем уравнениям:

$$\begin{aligned} a + {}^1a_{j_1} + {}^2a(j_1^2 - j_2) &= \frac{\partial A}{\partial j_1} \sqrt{\frac{g}{G}}, \quad -(a + {}^2a_{j_1}) = \frac{\partial A}{\partial j_2} \sqrt{\frac{g}{G}}, \\ {}^2a &= \sqrt{\frac{g}{G}} \frac{\partial A}{\partial j_3}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Из них сразу же следует представление (2.5.3) энергетического тензора напряжений и выражения (2.5.4) входящих в него коэффициентов a^k .

3.3. Представление тензора напряжений. Соосным с тензором напряжений \hat{T} является тензор меры деформации Альманзи \hat{g}^{\times} ; оба тензора определены в метрике V -объема; полагаем

$$\hat{T} = {}^0b \hat{G} + {}^1b \hat{g}^{\times} + {}^2b \hat{g}^{\times 2}. \quad (3.3.1)$$

Последующее вычисление несколько осложняется тем, что в выражение вариации удельной потенциальной энергии деформации тензор напряжений непосредственно не входит; он может быть введен в него через посредство энергетического тензора напряжений \hat{Q} с помощью равенства (2.1.2): $\hat{Q} = (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \hat{T} \cdot \tilde{\nabla} r$.

Получаем

$$\delta A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} [(\tilde{\nabla} r)^* \cdot ({}^0b \hat{G} + {}^1b \hat{g}^{\times} + {}^2b \hat{g}^{\times 2}) \cdot \tilde{\nabla} r] \cdot \delta \hat{G}^{\times} \quad (3.3.2)$$

и, сославшись на определение (3.2.2) гл. II тензора $\tilde{\nabla} r$, а также на формулы (3.3.7), (4.1.2) гл. II, имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \hat{G} \cdot \tilde{\nabla} r &= (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \tilde{\nabla} r = \hat{G}^{\times -1}, \\ (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \hat{g}^{\times} \cdot \tilde{\nabla} r &= (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \tilde{\nabla} r \cdot (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \tilde{\nabla} r = \hat{G}^{\times -2}, \\ (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \hat{g}^{\times 2} \cdot \tilde{\nabla} r &= \hat{G}^{\times -3}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\delta A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} ({}^0b \hat{G}^{\times -1} + {}^1b \hat{G}^{\times -2} + {}^2b \hat{G}^{\times -3}) \cdot \delta \hat{G}^{\times}. \quad (3.3.3)$$

Дальнейшее вычисление основано на тензорных преобразованиях (I. 10.11) (I. 10.12), (I. 10.14):

$$\begin{aligned}\hat{G}^{\times-1} \cdot \delta \hat{G} &= \frac{\delta G_1}{G_1} + \frac{\delta G_2}{G_2} + \frac{\delta G_3}{G_3} = \\ &= \frac{1}{G_1 G_2 G_3} (G_2 G_3 \delta G_1 + G_3 G_1 \delta G_2 + G_1 G_2 \delta G_3) = \\ &= \frac{\delta (G_1 G_2 G_3)}{G_1 G_2 G_3} = \frac{\delta I_3}{I_3} = - \frac{\delta I'_3}{I'_3}, \\ \hat{G}^{\times-2} \cdot \delta \hat{G}^{\times} &= I_1 (\hat{G}^{\times-2} \cdot \delta \hat{G}^{\times}) = - \delta I_1 (\hat{G}^{\times-1}) = - \delta \frac{I_2}{I_3} = - \delta I'_1, \\ \hat{G}^{\times-3} \cdot \delta \hat{G}^{\times} &= I_1 (\hat{G}^{\times-3} \cdot \delta \hat{G}^{\times}) = - \frac{1}{2} \delta I_1 (\hat{G}^{\times-2}) = - \frac{1}{2} \delta \frac{I_2^2 - 2 I_1 I_3}{I_3^2} = \\ &= - I'_1 \delta I'_1 + \delta I'_2.\end{aligned}$$

Подстановка в (3.3.3) теперь дает

$$\delta A = - \frac{1}{2} \sqrt{I_3} \left[\left(\overset{1}{b} + \overset{2}{b} I'_1 \right) \delta I'_1 - \overset{2}{b} \delta I'_2 + \overset{0}{b} \frac{\delta I'_3}{I'_3} \right], \quad (3.3.4)$$

так что

$$2 \sqrt{I'_3} \frac{\partial A}{\partial I'_1} = - \left(\overset{1}{b} + \overset{2}{b} I'_1 \right), \quad 2 \sqrt{I'_3} \frac{\partial A}{\partial I'_2} = \overset{2}{b}, \quad - 2 \sqrt{I'_3} \frac{\partial A}{\partial I'_3} = \frac{1}{I'_3} \overset{0}{b}. \quad (3.3.5)$$

Возвращаемся к закону состояния (2.4.2) и к определениям (2.4.3) обобщенных модулей $\overset{k}{e}$.

3.4. Разбиение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор. Общее соотношение между двумя соосными тензорами, рассмотренное в п. I. 13, в применении к энергетическому тензору напряжений \hat{Q} и тензору деформации Коши $\hat{\mathcal{E}}$ записывается в виде [см. (I. 13.15)]

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= k j_1 \hat{g} + \frac{2\mu}{\cos 3\psi} \left\{ \cos(\omega + 3\psi) \text{Dev } \hat{\mathcal{E}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{3}}{\Gamma} \sin \omega \left[(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^2 - \frac{1}{6} \hat{g} \Gamma^2 \right] \right\}. \quad (3.4.1).\end{aligned}$$

Тензор $\hat{\mathcal{E}}$ здесь определен тремя характеристиками: его первым инвариантом $j_1 = I_1(\hat{\mathcal{E}})$, углом ψ , входящим в тригонометрическое представление главных значений $\text{Dev } \hat{\mathcal{E}}$ (I. 11.16):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 - \frac{1}{3} j_1 &= \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \psi, \quad \mathcal{E}_2 - \frac{1}{3} j_1 = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \left(\psi + \frac{2\pi}{3} \right), \\ \mathcal{E}_3 - \frac{1}{3} j_1 &= \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \left(\psi + \frac{4\pi}{3} \right), \quad \left(|\psi| < \frac{\pi}{6} \right) \quad (3.4.2)\end{aligned}$$

и его вторым инвариантом *)

$$I_2(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}}) = -\frac{\Gamma^2}{4}. \quad (3.4.3)$$

Закон состояния задается здесь тремя функциями этих характеристик: 1) отношением первых инвариантов [(I. 13.5)]

$$3k = \frac{I_1(\hat{Q})}{j_1}; \quad (3.4.4)$$

2) отношением вторых инвариантов девиаторов [см. (I. 13.9)]

$$\mu = \frac{\tau_Q}{\Gamma} = \left[\frac{I_2(\text{Dev } \hat{Q})}{4I_2(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})} \right]^{1/2}; \quad (3.4.5)$$

3) углом подобия девиаторов [(I. 13.13)]

$$\omega = \chi - \psi. \quad (3.4.6)$$

Через угол χ выражаются главные значения $\text{Dev } \hat{Q}$ формулами, аналогичными (3.4.2) [см. (I. 13.12)]:

$$Q_1 - \frac{1}{3}I_1(\hat{Q}) = \frac{2\tau_Q}{\sqrt{3}} \sin \chi, \quad Q_2 - \frac{1}{3}I_1(\hat{Q}) = \frac{2\tau_Q}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$Q_3 - \frac{1}{3}I_1(\hat{Q}) = \frac{2\tau_Q}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi + \frac{4\pi}{3} \right).$$

Напомним, что Γ — интенсивность деформации сдвига [(3.7.6) гл. II], τ_Q — интенсивность касательных напряжений [(2.2.11) гл. I], вычисляемая по тензору \hat{Q} .

Три функции

$$k = k(j_1, \Gamma, \psi), \quad \mu = \mu(j_1, \Gamma, \psi), \quad \omega = \omega(j_1, \Gamma, \psi) \quad (3.4.7).$$

связаны тремя дифференциальными соотношениями, определяемыми требованием существования удельной потенциальной энергии деформации. Последнюю здесь можно также рассматривать как функцию трех инвариантных характеристик j_1, Γ, ψ тензора деформации Коши

$$A = A(j_1, \Gamma, \psi). \quad (3.4.8)$$

Сославшись на основное равенство (3.1.1) и пользуясь представлением (3.4.1) энергетического тензора напряжений, имеем

$$\begin{aligned} \delta A = \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{Q} \cdot \delta \hat{\mathcal{E}} &= \sqrt{\frac{G}{g}} k j_1 \delta j_1 + \\ &+ \sqrt{\frac{G}{g}} \frac{2\mu}{\cos 3\psi} \left\{ \cos(\omega + 3\psi) \text{Dev } \hat{\mathcal{E}} \cdot \delta \hat{\mathcal{E}} - \right. \\ &\left. - \frac{2\sqrt{3}}{\Gamma} \sin \omega \left[(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^2 \cdot \delta \hat{\mathcal{E}} - \frac{1}{6} \Gamma^2 \delta j_1 \right] \right\} \quad (3.4.9) \end{aligned}$$

*) В обозначениях п. 1.13 этот инвариант обозначался Γ^2 ; этим объясняется различие в численных коэффициентах равенств (3.4.1) и (1.13.15).

и для преобразования входящих в это равенство выражений полагаем

$$\delta \hat{\mathcal{E}} = \delta \text{Dev } \hat{\mathcal{E}} + \frac{1}{3} \hat{g} \delta j_1.$$

Тогда

$$\text{Dev } \hat{\mathcal{E}} \cdot \delta \hat{\mathcal{E}} = I_1 (\text{Dev } \hat{\mathcal{E}} \cdot \delta \hat{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2} \delta I_1 [(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^2],$$

$$(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^2 \cdot \delta \hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{3} \delta I_1 [(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^3] + \frac{1}{3} I_1 [(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^2] \delta j_1.$$

Но, сославшись на (I. 11.17), имеем

$$I_1 [(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^2] = \frac{1}{2} \Gamma^2,$$

$$I_1 [(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^3] = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \Gamma^3 \sin 3\psi, \quad \delta I_1 [(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^2] = \Gamma \delta \Gamma,$$

$$\delta I_1 [(\text{Dev } \hat{\mathcal{E}})^3] = -\frac{\sqrt{3}}{4} (\Gamma^2 \sin 3\psi \delta \Gamma + \Gamma^3 \cos 3\psi \delta \psi),$$

и подстановка в (3.4.9) приводит к достаточно простому выражению — обобщению формулы (2.4.1) гл. III линейной теории

$$\delta A = \sqrt{\frac{G}{g}} (k j_1 \delta j_1 + \mu \cos \omega \Gamma \delta \Gamma + \mu \Gamma^2 \sin \omega \delta \psi). \quad (3.4.10)$$

Из него следуют энергетические определения «обобщенных модулей» k , μ , ω

$$\frac{\partial A}{\partial j_1} = \sqrt{\frac{G}{g}} k j_1, \quad \frac{\partial A}{\partial \Gamma} = \sqrt{\frac{G}{g}} \mu \Gamma \cos \omega, \quad \frac{\partial A}{\partial \psi} = \sqrt{\frac{G}{g}} \mu \Gamma^2 \sin \omega \quad (3.4.11)$$

и дифференциальные соотношения, их связывающие,

$$\left. \begin{aligned} j_1 \frac{\partial}{\partial \Gamma} \sqrt{\frac{G}{g}} k &= \Gamma \frac{\partial}{\partial j_1} \sqrt{\frac{G}{g}} \mu \cos \omega, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \sqrt{\frac{G}{g}} \mu \cos \omega &= 2 \sqrt{\frac{G}{g}} \mu \sin \omega + \Gamma \frac{\partial}{\partial \Gamma} \sqrt{\frac{G}{g}} \mu \sin \omega, \\ j_1 \frac{\partial}{\partial \psi} \sqrt{\frac{G}{g}} k &= \Gamma^2 \frac{\partial}{\partial j_1} \left(\sqrt{\frac{G}{g}} \mu \sin \omega \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.4.12)$$

В линейной теории упругости k и μ представляют соответственно модуль объемного сжатия и модуль сдвига; аналога угла подобия ω в ней нет.

Связь инвариантов Γ , ψ с главными инвариантами j_1 , j_2 , j_3 тензора деформации устанавливается с помощью формул (I. 11.6), (I. 11.7), а также (I. 11.14), (I. 11.15) с заменой обозначения Γ на $\frac{1}{2}\Gamma$:

$$\frac{\Gamma^2}{4} = \frac{1}{3} j_1^2 - j_2, \quad \frac{\Gamma^3}{12\sqrt{3}} \sin 3\psi = -j_3 + \frac{1}{3} j_1 j_2 - \frac{2}{27} j_1^3, \quad (3.4.13)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \delta\Gamma &= \frac{4}{3} j_1 \delta j_1 - 2\delta j_2, \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} (\Gamma^2 \sin 3\psi \delta\Gamma + \Gamma^3 \cos 3\psi \delta\psi) &= \\ &= -\delta j_3 + \left(\frac{1}{3} j_2 - \frac{2}{9} j_1^2 \right) \delta j_1 + \frac{1}{3} j_1 \delta j_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.14)$$

С помощью этих формул и соотношения (3.4.10) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial j_3} &= -\sqrt{\frac{G}{g}} \frac{4}{3} \sqrt{3} \frac{\mu \sin \omega}{\Gamma \cos 3\psi}, \\ \frac{\partial A}{\partial j_2} &= -2 \sqrt{\frac{G}{g}} \mu \cos \omega - \frac{\partial A}{\partial j_3} \left(\frac{1}{3} j_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \Gamma \sin 3\psi \right), \\ \frac{\partial A}{\partial j_1} &= \sqrt{\frac{G}{g}} \left(k j_1 + \frac{4}{3} \mu j_1 \cos \omega \right) + \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{\partial A}{\partial j_3} \left(\frac{1}{3} j_1^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}} j_1 \Gamma \sin 3\psi \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.4.15)$$

Удельная потенциальная энергия деформации материалов с углом подобия девиаторов, равным нулю ($\omega = 0$), не зависит от третьего главного инварианта j_3 . Для таких материалов

$$A = A(j_1, j_2), \quad \frac{\partial A}{\partial j_1} = \sqrt{\frac{G}{g}} \left(k + \frac{4}{3} \mu \right) j_1, \quad \frac{\partial A}{\partial j_2} = -2 \sqrt{\frac{G}{g}} \mu, \quad (3.4.16)$$

а уравнение состояния имеет квазилинейную структуру:

$$\hat{Q} = k j_1 \hat{g} + 2\mu \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}} = \left(k - \frac{2}{3} \mu \right) j_1 \hat{g} + 2\mu \hat{\mathcal{E}}. \quad (3.4.17)$$

Ее отличие от обобщенного закона Гука линейной теории [см. (1.3.9), (3.1.1) гл. III] состоит не только в замене линейного тензора деформации $\hat{\epsilon}$ тензором $\hat{\mathcal{E}}$, но и в замене постоянных модулей k , μ «обобщенными», зависящими от всех трех инвариантов тензора $\hat{\mathcal{E}}$ (в том числе от j_3 через посредство G). Следует принять

$$k \sqrt{\frac{G}{g}} = {}_0k(j_1, j_2), \quad \mu \sqrt{\frac{G}{g}} = {}_0\mu(j_1, j_2). \quad (3.4.18)$$

Тогда уравнение состояния (3.4.17) примет вид

$$\sqrt{\frac{G}{g}} \hat{Q} = {}_0\hat{Q} = {}_0k j_1 \hat{g} + 2_0\mu \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}} = \left({}_0k - \frac{2}{3} {}_0\mu \right) j_1 \hat{g} + 2_0\mu \hat{\mathcal{E}}. \quad (3.4.19)$$

Здесь ${}_0\hat{Q}$, согласно п. 3.4 гл. I, энергетический тензор напряжений, рассчитанных на единицу площади в начальном состоянии.

Выражение тензора деформации Коши через энергетический тензор напряжений — обращение формулы (3.4.1) — имеет по (1.13.15) вид

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{9k} I_1(\hat{Q}) \hat{g} + \frac{1}{2\mu \cos 3\chi} \left\{ \cos(3\chi - \omega) \operatorname{Dev} \hat{Q} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{\tau_Q} \sin \omega \left[(\operatorname{Dev} \hat{Q})^2 - \frac{2}{3} \hat{g} \tau_Q^2 \right] \right\}. \quad (3.4.20)$$

Совершенно очевидно, что в записи, аналогичной (3.4.1), может быть представлен закон состояния, связывающий тензор напряжений \hat{T} с соосным ему тензором деформации Альманзи:

$$\hat{T} = \tilde{k} j_1' \hat{G} + \frac{2\tilde{\mu}}{\cos 3\tilde{\varphi}} \left\{ \cos(\tilde{\omega} + 3\tilde{\varphi}) \operatorname{Dev} \hat{\tilde{\mathcal{E}}} - \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{3}}{\tilde{\Gamma}} \sin \tilde{\omega} \left[(\operatorname{Dev} \hat{\tilde{\mathcal{E}}})^2 - \frac{1}{6} \hat{G} \tilde{\Gamma}^2 \right] \right\}. \quad (3.4.21)$$

Здесь величины, снабженные знаком тильды (\sim), составлены по тензорам $\hat{\tilde{\mathcal{E}}}$, \hat{T} с помощью формул, повторяющих (3.4.2) — (3.4.6). Однако усложняется вычисление вариации удельной потенциальной энергии

$$\delta A = \sqrt{\frac{G}{g}} (\tilde{\nabla} r)^* \cdot \hat{T} \cdot \tilde{\nabla} r \dots \delta \hat{\mathcal{E}}$$

и энергетические определения модулей \tilde{k} , $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\omega}$ представляются громоздкими формулами.

3.5. Применение логарифмической меры деформации. Этот тензор соосен с тензором $\hat{M}^{1/2}$, а его главные значения равны логарифмам главных значений $(1 + \delta_s)$ тензора $\hat{M}^{1/2}$:

$$\hat{N} = \sum_{s=1}^3 v_s \tilde{e} \tilde{e}, \quad v_s = \ln(1 + \delta_s), \quad \hat{M}^{1/2} = \sum_{s=1}^3 (1 + \delta_s) \tilde{e} \tilde{e} = \sum_{s=1}^3 e^{v_s} \tilde{e} \tilde{e}, \quad (3.5.1)$$

и при этом

$$\sqrt{I_3} = (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) = e^{I_1(\hat{N})}, \quad I_1(\hat{N}) = v_1 + v_2 + v_3.$$

Основываясь на соотношении (2.6.8), имеем

$$t_s = \frac{1 + \delta_s}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial A}{\partial \delta_s} = e^{-I_1(\hat{N})} \frac{\partial A}{\partial v_s}, \quad \delta A = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial A}{\partial v_s} \delta v_s = e^{I_1(\hat{N})} \sum_{s=1}^3 t_s \delta v_s. \quad (3.5.2)$$

В тензорах \hat{T} , \hat{N} выделяются шаровые и девиаторные части *)

$$\hat{T} = \frac{1}{3} \hat{E} I_1(\hat{T}) + \text{Dev } \hat{T}, \quad \hat{N} = \frac{1}{3} \hat{E} I_1(\hat{N}) + \text{Dev } \hat{N},$$

и в рассмотрение вводятся вторые и третьи инварианты девиаторов (см. п. I. 11)

$$\tau^2 = -I_2(\text{Dev } \hat{T}) = \frac{1}{6} [(t_1 - t_2)^2 + (t_2 - t_3)^2 + (t_3 - t_1)^2],$$

$$I_3(\text{Dev } \hat{T}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \tau^3 \sin 3\chi,$$

$$\frac{\Gamma^2}{4} = -I_2(\text{Dev } \hat{N}) = \frac{1}{6} [(v_1 - v_2)^2 + (v_2 - v_3)^2 + (v_3 - v_1)^2],$$

$$I_3(\text{Dev } \hat{N}) = -\frac{1}{12\sqrt{3}} \Gamma^3 \sin 3\psi.$$

Главные компоненты девиаторов определяются по формулам (I. 11.16):

$$\left. \begin{aligned} t'_s &= \frac{2\tau}{\sqrt{3}} \sin \chi_s, \quad \chi_1 = \chi, \quad \chi_2 = \chi + \frac{2\pi}{3}, \quad \chi_3 = \chi + \frac{4\pi}{3} \\ &\quad \left(|\chi| < \frac{\pi}{6} \right), \\ v'_s &= \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \psi_s, \quad \psi_1 = \psi, \quad \psi_2 = \psi + \frac{2\pi}{3}, \quad \psi_3 = \psi + \frac{4\pi}{3} \\ &\quad \left(|\psi| < \frac{\pi}{6} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.5.3)$$

причем, конечно,

$$t_s = \frac{1}{3} I_1(\hat{T}) + t'_s, \quad \sum_{s=1}^3 t'_s = 0; \quad v_s = \frac{1}{3} I_1(\hat{N}) + v'_s, \quad \sum_{s=1}^3 v'_s = 0.$$

Возвращаясь теперь к формуле (3.5.2), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 t_s \delta v_s &= \sum_{s=1}^3 \left[\frac{1}{3} I_1(\hat{T}) + t'_s \right] \left[\frac{1}{3} \delta I_1(\hat{N}) + \delta v'_s \right] = \\ &= \frac{1}{3} I_1(\hat{T}) \delta I_1(\hat{N}) + \sum_{s=1}^3 t'_s \delta v'_s \end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 t'_s \delta v'_s &= \frac{2\tau}{3} \sum_{s=1}^3 \sin \chi_s (\sin \psi_s \delta \Gamma + \Gamma \cos \psi_s \delta \psi_s) = \\ &= \tau (\cos \omega \delta \Gamma + \Gamma \sin \omega \delta \psi), \end{aligned}$$

*) \hat{E} — единичный тензор.

где $\omega = (\chi - \psi)$ — угол подобия девиаторов. Приходим к соотношению

$$\delta A = e^{I_1(\hat{N})} \left[\frac{1}{3} I_1(\hat{T}) \delta I_1(\hat{N}) + \tau (\cos \omega \delta \Gamma + \Gamma \sin \omega \delta \psi) \right] \quad (3.5.4)$$

и, рассматривая A как функцию инвариантных величин $I_1(\hat{N})$, Γ , ψ , получаем

$$\frac{\partial A}{\partial I_1(\hat{N})} = \frac{1}{3} e^{I_1(\hat{N})} I_1(\hat{T}), \quad \frac{\partial A}{\partial \Gamma} = e^{I_1(\hat{N})} \tau \cos \omega, \quad \frac{\partial A}{\partial \psi} = e^{I_1(\hat{N})} \tau \Gamma \sin \omega. \quad (3.5.5)$$

При обозначениях

$$\frac{1}{3} I_1(\hat{T}) = k I_1(\hat{N}), \quad \tau = \mu \Gamma \quad (3.5.6)$$

возвращаемся к формулам (3.4.11), с той разницей, что теперь в рассмотрение введены инварианты логарифмической меры деформации.

Дифференциальные зависимости между инвариантами $I_1(\hat{T})$, τ , ω тензора напряжений теперь записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\partial I_1(\hat{T})}{\partial \Gamma} &= \tau \cos \omega + \frac{\partial \tau \cos \omega}{\partial I_1(\hat{N})}, \\ \frac{\partial \tau \cos \omega}{\partial \psi} &= \tau \sin \omega + \Gamma \frac{\partial \tau \sin \omega}{\partial \Gamma}, \\ \frac{1}{3} \frac{\partial I_1(\hat{T})}{\partial \psi} &= \Gamma \left(\tau \sin \omega + \frac{\partial \tau \sin \omega}{\partial I_1(\hat{N})} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.5.7)$$

Они упрощаются для материалов с равной нулю фазой подобия девиаторов: исчезает зависимость A от параметра ψ , но величины τ , $I_1(\hat{T})$ остаются связанными соотношением

$$\frac{1}{3} \frac{\partial I_1(\hat{T})}{\partial \Gamma} = \tau + \frac{\partial \tau}{\partial I_1(\hat{N})} = e^{-I_1(\hat{N})} \frac{\partial}{\partial I_1(\hat{N})} (e^{I_1(\hat{N})} \tau). \quad (3.5.8)$$

Ему можно удовлетворить, полагая

$$\tau = e^{-I_1(\hat{N})} f(\Gamma) = \frac{f(\Gamma)}{\sqrt{I_3}}. \quad (3.5.9)$$

Тогда $I_1(\hat{T})$ оказывается зависящим только от первого инварианта логарифмической меры деформации (отношения объемов тела в деформированном и начальном состояниях). Второй инвариант девиатора напряжений (значит, и модуль μ) оказывается зависящим не только от Γ , но и от упомянутого отношения объемов.

Уравнение состояния материала с равной нулю фазой подобия в соответствии с (3.5.3), (3.5.6) записывается в форме Генки:

$$t_s = k I_1(\hat{N}) + 2\mu \nu'_s, \quad \hat{T} = k I_1(\hat{N}) \hat{E} + 2\mu \text{Dev } \hat{N}, \quad (3.5.10)$$

и при экспериментальном определении «модулей сжатия и сдвига» k и μ следует (для идеально-упругого тела) руководствоваться соотношениями

$$k = k(\sqrt{I_3}), \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \frac{f(\Gamma)}{\Gamma}. \quad (3.5.11)$$

В случае несжимаемого материала,

$$I_1(\hat{N}) = v_1 + v_2 + v_3 = 0, \quad \hat{N} = \text{Dev } \hat{N}, \quad (3.5.12)$$

выражение вариации удельной потенциальной энергии деформации (3.5.4) представляется в виде

$$\delta A = \tau (\cos \omega \delta \Gamma + \Gamma \sin \omega \delta \psi),$$

причем величина $I_1(\hat{T}) = 3\rho$ остается неопределенной. Для материала с равной нулю фазой подобия девиаторов ($\omega = 0$)

$$A = A(\Gamma), \quad \tau = \frac{\partial A}{\partial \Gamma}, \quad \mu = \frac{\tau}{\Gamma} = \mu(\Gamma) \quad \left(\frac{\Gamma^2}{4} = v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2 \right) \quad (3.5.13)$$

и выражение тензора напряжений имеет вид

$$\hat{T} = \rho \hat{E} + 2\mu(\Gamma) \hat{N}. \quad (3.5.14)$$

§ 4. Аппроксимации законов состояния

4.1. Квадратичный закон состояния Синьорини. Общие законы состояния нелинейно-упругой среды конкретизируются или заданием явного выражения удельной потенциальной энергии деформации через инварианты мер либо тензоров деформации, или совместимых с ее существованием явных выражений этих законов. Рассмотрение простейших напряженных состояний, использующее эти выражения с априорно вводимыми коэффициентами, приводит к соотношениям, допускающим сравнение с данными измерений и позволяющим дать числовые оценки этих коэффициентов.

Синьорини рассмотрел закон состояния с квадратичной зависимостью компонент тензора напряжения от компонент соосного с ним тензора деформации Альманзи $\hat{\mathcal{E}}$. Вместо последнего вводится мера деформации \hat{g}^x , а общее выражение такой зависимости записывается в виде

$$\hat{T} = (m_1 I'_2 + m_2 I'^2_1 + m_3 I'_1 + m_4) \hat{G} - (m_5 I'_1 + m_6) \hat{g}^x + m_7 \hat{g}^{x^2}, \quad (4.1.1)$$

причем m_k — постоянные, $I'_k = I_k(\hat{g}^x)$. Сравнивая его с (2.4.2) и используя формулы (2.4.4), приходим к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial I'_1} &= \frac{1}{2\sqrt{I'_3}} [(m_5 - m_7)I'_1 + m_6], & \frac{\partial A}{\partial I'_2} &= \frac{1}{2\sqrt{I'_3}} m_7, \\ \frac{\partial A}{\partial I'_3} &= -\frac{1}{2} (I'_3)^{-3/2} (m_1 I'_2 + m_2 I'^2_1 + m_3 I'_1 + m_4), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.2)$$

и далее подлежат рассмотрению два из трех условий интегрируемости (третье удовлетворяется тождественно):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial I'_2 \partial I'_3} &= -\frac{1}{4} (I'_3)^{-3/2} m_7 = -\frac{1}{2} (I'_3)^{-3/2} m_1, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial I'_3 \partial I'_1} &= -\frac{1}{4} (I'_3)^{-3/2} [(m_5 - m_7)I'_1 + m_6] = -\frac{1}{2} (I'_3)^{-3/2} (2m_2 I'_1 + m_3). \end{aligned}$$

Приходим к равенствам

$$m_7 = 2m_1, \quad m_5 = 2m_1 + 4m_2, \quad m_6 = 2m_3,$$

так что закон состояния оказывается зависящим от четырех постоянных:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= (m_1 I'_2 + m_2 I'^2_1 + m_3 I'_1 + m_4) \hat{G} - \\ &\quad - [(2m_1 + 4m_2) I'_1 + 2m_3] \hat{g}^x + 2m_1 \hat{g}^{x^2}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Удельная потенциальная энергия деформации теперь дается равенством

$$A = \frac{1}{\sqrt{I'_3}} (m_1 I'_2 + m_2 I'^2_1 + m_3 I'_1 + m_4) + \text{const}, \quad (4.1.4)$$

что легко проверить по (4.1.2).

Постоянную m_4 можно выразить через значение всестороннего растяжения в начальном состоянии (тогда $I'_1 = I'_2 = 3$, $I'_3 = 1$, $\hat{g}^x = \hat{G}$). В этом состоянии

$$\hat{T}_0 = q\hat{G} = (-m_1 - 3m_2 + m_3 + m_4) \hat{G}, \quad (4.1.5)$$

и, возвращаясь к (4.1.3), (4.1.4), имеем

$$\begin{aligned} \hat{T} &= [q + m_1 (I'_2 + 1) + m_2 (I'^2_1 + 3) + m_3 (I'_1 - 1)] \hat{G} - \\ &\quad - [(2m_1 + 4m_2) I'_1 + 2m_3] \hat{g}^x + 2m_1 \hat{g}^{x^2}, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{I'_3}} [m_1 (I'_2 + 1) + m_2 (I'^2_1 + 3) + m_3 (I'_1 - 1) + q] + \text{const}. \quad (4.1.7)$$

Если начальным состоянием служит натуральное, то $q = 0$ и закон состояния определяется тремя лишь коэффициентами. С целью сопоставить его с обобщенным законом Гука линейной теории заменим меру деформации тензором $\hat{\mathcal{E}}$, а инварианты $I'_k = I'_k(\hat{g}^{\times})$ инвариантами $j'_k = I_k(\hat{\mathcal{E}})$. Это вычисление проводится по формулам (4.3.3), (5.4.6) гл. II. Тогда при обозначениях

$$4m_1 = c, \quad 4m_2 = \frac{1}{2} \left(\lambda + \mu - \frac{c}{2} \right), \quad 4m_1 + 12m_2 + 2m_3 = \mu + \frac{c}{2} \quad (4.1.8)$$

можно записать (4.1.6), (4.1.7) в виде

$$\hat{T} = \left[\lambda j'_1 + c j'_2 + \frac{1}{2} \left(\lambda + \mu - \frac{c}{2} \right) j_1'^2 \right] \hat{G} + \\ + 2 \left[\mu - \left(\lambda + \mu + \frac{c}{2} \right) j'_1 \right] \hat{\mathcal{E}} + 2c \hat{\mathcal{E}}^2, \quad (4.1.9)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{I'_3}} \left[c j'_2 + \frac{1}{2} \left(\lambda + \mu - \frac{c}{2} \right) j_1'^2 + \left(\mu + \frac{c}{2} \right) (1 - j'_1) \right] - \left(\mu + \frac{c}{2} \right), \quad (4.1.10)$$

причем аддитивная постоянная выбрана так, что в натуральном состоянии $A = 0$.

З а м е ч а н и я. 1. Квадратичный закон состояния идеально-упругого тела, содержащий пять постоянных, предложенный Н. В. Зволинским и П. М. Ризом (1939), записывается в виде

$$\hat{T} = \left[\lambda' j'_1 + \left(B + \frac{\lambda'}{2} \right) j_1'^2 - (C + 3\lambda') j_2' \right] \hat{G} + \\ + [2\mu' + (C + \lambda' - 2\mu') j'_1] \hat{\mathcal{E}} + (A + 5\mu') \hat{\mathcal{E}}^2 \quad (4.1.11)$$

и может быть согласован с энергетически допустимым законом состояния Синьорини (4.1.9), если принять

$$\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \mu, \quad A = 2c - 5\mu, \quad B = \frac{1}{2} \left(\mu - \frac{c}{2} \right), \quad C = -c - 3\lambda, \quad (4.1.12)$$

где λ, μ, c — постоянные, входящие в (4.1.9). Отсюда следует, что предложение считать A, B, C нулями приводит к противоречию с предпосылкой о существовании удельной потенциальной энергии деформации.

2. Сетх рассмотрел большое число нелинейных задач, основываясь на законе состояния

$$\hat{T} = \lambda j'_1 \hat{G} + 2\mu \hat{\mathcal{E}}, \quad (4.1.13)$$

представляющем, казалось бы, естественное обобщение закона Гука линейной теории упругости, в который он вырождается

при $\hat{\mathcal{E}} = \hat{\varepsilon}$, $j'_1 = \varnothing$. Этот закон энергетически неприемлем, что видно из сравнения с (4.1.9). Но он позволяет учесть некоторые особенности нелинейной теории, например конечность растягивающей силы, вызывающей разрыв образца, необходимость приложения нормальных усилий для осуществления простого сдвига (см. далее пп. 4.4, 4.5). При малых относительных удлинениях и сдвигах количественные результаты применения квазилинейного закона (4.1.3) не могут заметно отличаться от получаемых по закону состояния Синьорини; вместе с тем квазилинейный закон не накладывает ограничений на перемещения и повороты и поэтому приложим к задачам, недоступным для рассмотрения с помощью закона Гука.

4.2. Зависимость коэффициентов квадратичного закона от начального состояния. Как в п. 2.3, рассматриваются два начальных состояния — натуральное v_0 и получаемое из него преобразованием подобия (2.3.1) состояние v_* . Инварианты $I'_k = I_k(\hat{g}^x)$ связываются при этом второй группой формул (5.6.3) гл. II, а соотношение (2.3.4) теперь должно быть записано в виде

$$A(I'_1, I'_2, I'_3) = K^3 A_*(I'_{1*}, I'_{2*}, I'_{3*}) = K^3 A_*(I'_1 K^2, I'_2 K^4, I'_3 K^6). \quad (4.2.1)$$

Этому равенству можно удовлетворить, приняв

$$A_* = \frac{1}{\sqrt{I'_{3*}}} [m_1^*(I'_{2*} + K^4) + m_2^*(I'^2_{1*} + 3K^4) + m_3^*(I'_{1*} - K^2)], \quad (4.2.2)$$

причем

$$m_1^* = \frac{m_1}{K^4}, \quad m_2^* = \frac{m_2}{K^4}, \quad m_3^* = \frac{m_3}{K^2}. \quad (4.2.3)$$

Действительно, заменив m_k^* , I'_{k*} их значениями через m_k , I'_k , придем к соотношению (4.2.1).

Выражение тензора напряжений, когда начальным состоянием является v_* -объем, составляется по формулам (2.4.3), (2.4.4):

$$\hat{T} = [m_1^*(I'_{2*} + K^4) + m_2^*(I'^2_{1*} + 3K^4) + m_3^*(I'_{1*} - K^2)] \hat{G} - \\ - [(2m_1^* + 4m_2^*) I'_{1*} + 2m_3^*] \hat{g}^x_{1*} + 2m_1^* \hat{g}^{x^2}_{1*}. \quad (4.2.4)$$

Переходя теперь к тензору деформации $\hat{\mathcal{E}}$ и вводя аналогичные (4.1.8) обозначения

$$4m_1^* = c^*, \quad 4m_2^* = \frac{1}{2} \left(\lambda^* + \mu^* - \frac{c^*}{2} \right), \quad 4m_1^* + 12m_2^* + 2m_3^* = \mu^* + \frac{c^*}{2}, \quad (4.2.5)$$

придем к выражению тензора напряжений, во всем повторяющему (4.1.9), но содержащему слагаемое, не обращающееся в нуль в v_* -объеме (когда $\hat{\mathcal{E}}_* = 0$, $j'_{k*} = 0$):

$$\hat{T} = q\hat{G} + \left[\lambda^* j'_{1*} + c^* j'_{2*} + \frac{1}{2} \left(\lambda^* + \mu^* - \frac{c^*}{2} \right) \right] \hat{G} + \\ + 2 \left[\mu^* - \left(\lambda^* + \mu^* + \frac{c^*}{2} \right) j'_{1*} \right] \hat{\mathcal{E}}_* + 2c^* \hat{\mathcal{E}}_*^2, \quad (4.2.6)$$

где обозначено

$$q = \frac{1}{8} (K^2 - 1) \left[(1 + K^2) \left(3\lambda^* + 3\mu^* + \frac{c^*}{2} \right) - c^* + 2\mu^* + 6\lambda^* \right], \quad (4.2.7)$$

а связь измененных постоянных λ^* , μ^* , c^* с λ , μ , c , получаемая сопоставлением (4.2.3), (4.2.5), (4.1.8), дается равенствами

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= K^4 \lambda^* + \frac{1}{2} K^2 (1 - K^2) \left(3\lambda^* + \mu^* - \frac{c^*}{2} \right), \\ \mu &= K^4 \mu^* - \frac{1}{2} K^2 (1 - K^2) \left(3\lambda^* + \mu^* - \frac{c^*}{2} \right), \\ c &= K^4 c^*. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.8)$$

Процесс деформирования при повышении температуры можно считать происходящим в два этапа: температура кубика, мысленно выделенного из среды с (условно) нулевой температурой, повышается до θ ; это сопровождается сообщением деформации $\hat{\mathcal{E}}^0$, задаваемой преобразованием подобия с коэффициентом подобия

$$K^0 = 1 + \alpha\theta, \quad (4.2.9)$$

причем не возникает напряженного состояния. Последнее создается реактивными воздействиями окружающей кубик среды и определяется порождаемой им деформацией $\hat{\mathcal{E}}'$, так что $\hat{T} = \hat{T}(\hat{\mathcal{E}}') = \hat{T}(\hat{\mathcal{E}} - \hat{\mathcal{E}}^0)$. Здесь $\hat{\mathcal{E}}$ — тензор деформации, равной нулю в среде с нулевой температурой, а $\hat{T}^0 = \hat{T}(-\hat{\mathcal{E}}^0)$ — шаровой тензор напряжения, определяющий всестороннее сжатие, которое должно быть сообщено кубiku, чтобы при температуре θ сообщить ему размеры, соответствующие нулевой температуре.

Из сказанного следует, что в вышеприведенных формулах следует считать натуральным (v_0 -объемом) состояние мысленно выделенного кубика при температуре θ (тогда $\hat{T} = 0$), а подобно преобразованным с коэффициентом

$$K = \frac{1}{K^0} = \frac{1}{1 + \alpha\theta} \quad (4.2.10)$$

(v_* -объемом) — состояние при температуре $\theta = 0$; тензор напряжений $\hat{T}(-\hat{\mathcal{E}}^0)$ в этом состоянии по (4.2.6) равен

$$\hat{T}^0 = q\hat{G} = \frac{1}{8} \frac{1 - K_0^2}{K_0^2} \left[\frac{1 + K_0^2}{K_0^2} \left(3\lambda^* + 3\mu^* - \frac{c^*}{2} \right) - c^* + 2\mu^* + 6\lambda^* \right] \hat{G}, \quad (4.2.11)$$

причем λ^* , μ^* , c^* — значения модулей при $\theta = 0$; их значения λ , μ , c при температуре θ определяются по (4.2.8), (4.2.10).

При пренебрежении степенями $\alpha\theta$ выше первой по (4.2.11) имеем

$$\hat{T}^0 = - (3\lambda^* + 2\mu^*) \alpha\theta \hat{G}. \quad (4.2.12)$$

Такое температурное слагаемое добавляется в выражение тензора напряжений линейной теории упругости — формула (3.4.8) гл. III.

4.3. Знак удельной потенциальной энергии деформации. Далее рассматривается «упрощенный» закон состояния Синьорици с постоянной $c = 0$; ее удержание привело бы к значительному усложнению последующих рассмотрений. Теперь по (4.1.9), (4.1.10)

$$\hat{T} = \left[\lambda j_1' + \frac{1}{2} (\lambda + \mu) j_1'^2 \right] \hat{G} + 2 \left[\mu - (\lambda + \mu) j_1' \right] \hat{\mathcal{E}}, \quad (4.3.1)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{I_3'}} \left[\frac{1}{2} (\lambda + \mu) j_1'^2 + \mu (1 - j_1') - \mu \sqrt{I_3'} \right], \quad (4.3.2)$$

причем входящая в это выражение аддитивная постоянная определена условием, что $A = 0$, когда деформация отсутствует (при $I_3' = 1$, $I_1' = 3$).

Упрощенный закон Синьорици содержит, подобно закону Гука линейной теории, две постоянные (λ , μ), но существенно отличается от него не только заменой линейного тензора деформации тензором $\hat{\mathcal{E}}$, но и вхождением подчеркнутых в формуле (4.3.1) слагаемых.

Требуется установить область изменения параметров (λ , μ), в которой удельная потенциальная энергия деформации A положительна в любом состоянии, отличном от натурального (при любых положительных I_1' , I_3'). Необходимые условия (2.9.7) гарантируют положительность A лишь при малых деформациях (при I_1' , I_3' близких к 3 и к 1); рассмотрение более трудной задачи построения критериев положительности A при любых деформациях требует оценки I_3' при заданном I_1' . Обозначив через g_s главные значения меры деформации \hat{g}^\times , имеем

$$I_1' = g_1 + g_2 + g_3, \quad I_3' = g_1 g_2 g_3.$$

Но известно, что произведение нескольких положительных чисел с заданной суммой достигает максимума, когда эти числа равны, так что

$$I_3' = g_1 g_2 g_3 \leq \left[\frac{1}{3} (g_1 + g_2 + g_3) \right]^3 = \frac{I_1'^3}{27}.$$

Имея в виду, что

$$I_1'^2 (3 - I_1')^2 = I_1'^2 (3 + I_1')^2 - 12 I_1'^3 \geq 0,$$

можно усилить предыдущее неравенство:

$$I_1'^2 (3 + I_1')^2 \geq 27 \cdot 12 I_3', \quad \sqrt{I_3'} \leq \frac{1}{18} (3 + I_1') I_1'. \quad (4.3.3)$$

В частности, при $I_1' = 3$, $I_3' \leq 1$, причем знак равенства достигается только в натуральном состоянии, так что условие

$$A(I_1', I_3')_{I_1'=3} = \frac{\mu}{\sqrt{I_3'}} (1 - \sqrt{I_3'}) \geq 0$$

приводит к уже известному критерию

$$\mu > 0. \quad (4.3.4)$$

Входящие в выражение (4.3.2) слагаемые представляются теперь в виде

$$\begin{aligned} (\mu + \lambda) I_1'^2 &= \frac{4}{9} \mu I_1'^2 + \frac{1}{9} (9\lambda + 5\mu) I_1'^2, \\ -2(3\lambda + \mu) I_1' &= \frac{4}{3} \mu I_1' - \frac{2}{3} (9\lambda + 5\mu) I_1', \end{aligned}$$

и поэтому

$$8A \sqrt{I_3'} = \frac{4}{9} \mu [(I_1' + 3) I_1' - 18 \sqrt{I_3'}] + (9\lambda + 5\mu) \left(\frac{I_1'}{3} - 1 \right)^2. \quad (4.3.5)$$

Слагаемое в квадратных скобках по (4.3.3) неотрицательно, и достаточным условием положительности A служит неравенство

$$9\lambda + 5\mu > 0. \quad (4.3.6)$$

Критерии (4.3.6), (4.3.4), гарантирующие положительность удельной потенциальной энергии деформации A во всей области главных относительных удлинений $-1 \leq \delta_s \leq \infty$ (или главных значений $-\infty < \tilde{\mathcal{E}}_s < 1/2$ тензора деформации $\hat{\mathcal{E}}$), превышают нижнюю границу (2.9.7) значений параметра λ ($\lambda > -5/9$ вместо $\lambda > -2/3\mu$). Этого уменьшения области допустимых параметров (λ, μ) можно было ожидать, поскольку необходимый критерий (2.9.7) обеспечивает положительность A только при достаточно малых δ_s .

С помощью величины ν , связанной с λ , μ соотношением

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad \lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}, \quad (4.3.7)$$

определяющим в линейной теории коэффициент Пуассона, критерий (4.3.6) записывается в виде

$$\frac{5+8\nu}{1-2\nu} > 0, \quad (4.3.8)$$

так что ν может изменяться в пределах

$$-\frac{5}{8} \leq \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (4.3.9)$$

4.4. Применение к задачам об одноосном растяжении. При растяжении стержня $\hat{T} = t_{11}i_1i_1$. По (4.3.1), (4.3.7) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{t_{11}}{2\mu} &= \frac{\nu}{1-2\nu} j_1' + \frac{1}{1-2\nu} \frac{j_1'^2}{4} + \left(1 - \frac{1}{1-2\nu} j_1'\right) \tilde{\mathcal{E}}_{11}, \\ \frac{t_{kk}}{2\mu} &= \frac{\nu}{1-2\nu} j_1' + \frac{1}{1-2\nu} \frac{j_1'^2}{4} + \left(1 - \frac{1}{1-2\nu} j_1'\right) \tilde{\mathcal{E}}_{kk} = 0 \\ &\quad (k=2, 3), \\ \frac{t_{ks}}{2\mu} &= \left(1 - \frac{1}{1-2\nu} j_1'\right) \tilde{\mathcal{E}}_{ks} = 0 \quad (k \neq s), \end{aligned} \right\} \quad (4.4.1)$$

так что

$$\tilde{\mathcal{E}}_{ks} = 0 \quad (s \neq k), \quad \tilde{\mathcal{E}}_{22} = \tilde{\mathcal{E}}_{33}, \quad j_1' = \tilde{\mathcal{E}}_{11} + 2\tilde{\mathcal{E}}_{22}. \quad (4.4.2)$$

Подставив это значение j_1' во второе уравнение (4.4.1) для $k=2$, придем к квадратному уравнению

$$\tilde{\mathcal{E}}_{22}^2 - \tilde{\mathcal{E}}_{22} - \nu \tilde{\mathcal{E}}_{11} - \frac{1}{4} \tilde{\mathcal{E}}_{11}^2 = 0. \quad (4.4.3)$$

Его дискриминант

$$\frac{1}{4} (\tilde{\mathcal{E}}_{11}^2 + 4\nu \tilde{\mathcal{E}}_{11} + 1) = \frac{1}{4} \Delta$$

неотрицателен для значений ν в промежутке (4.3.9) и для допустимых значений

$$-\infty \leq \tilde{\mathcal{E}}_{11} \leq \frac{1}{2}, \quad (4.4.4)$$

соответствующих относительным удлинениям [см. (4.2.2), (4.3.3) гл. II]

$$-1 \leq \delta_1 \leq \infty. \quad (4.4.5)$$

Корень уравнения (4.4.3), меньший $1/2$, равен

$$\tilde{\mathcal{E}}_{22} = \frac{1}{2} \left[1 - (1 + 4\nu \tilde{\mathcal{E}}_{11} + \tilde{\mathcal{E}}_{11}^2)^{1/2} \right], \quad 1 - 2\tilde{\mathcal{E}}_{22} = (1 + 4\nu \tilde{\mathcal{E}}_{11} + \tilde{\mathcal{E}}_{11}^2)^{1/2}. \quad (4.4.6)$$

Сославшись на равенство

$$(1 + \delta_k)^{-2} = 1 - 2\tilde{\mathcal{E}}_{kk}, \quad \delta_k = (1 - 2\tilde{\mathcal{E}}_{kk})^{-1/2} - 1, \quad (4.4.7)$$

имеем

$$-\tilde{\nu} = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\Delta^{-1/4} - 1}{(1 - 2\tilde{\mathcal{E}}_{11})^{-1/2} - 1} \approx -\nu - \frac{1}{4} \tilde{\mathcal{E}}_{11} (1 - 6\nu - 10\nu^2) + \dots \quad (4.4.8)$$

В этом приближении отношение $\tilde{\nu}$ поперечного сжатия стержня к его удлинению оказывается линейной функцией удлинения.

По (4.4.6), (4.4.2), (4.4.1) имеем также

$$\frac{t_{11}}{\mu} (1 - 2\nu) = 1 + 2\nu + \tilde{\mathcal{E}}_{11} - \tilde{\mathcal{E}}_{11}^2 - \Delta^{1/2} (1 + 2\nu - \tilde{\mathcal{E}}_{11}). \quad (4.4.9)$$

Площадь S поперечного сечения растянутого стержня связана с ее начальным значением равенством

$$S = S_0 (1 + \delta_2)^2 = S_0 \Delta^{-1/2},$$

позволяющим представить выражение растягивающей силы в виде

$$Q = t_{11} S = \frac{\mu S_0}{1 - 2\nu} \left[\tilde{\mathcal{E}}_{11} - 1 - 2\nu + \frac{1 + 2\nu + \tilde{\mathcal{E}}_{11} - \tilde{\mathcal{E}}_{11}^2}{(1 + 4\nu\tilde{\mathcal{E}}_{11} + \tilde{\mathcal{E}}_{11}^2)^{1/2}} \right]. \quad (4.4.10)$$

Сохранив лишь вторую степень разложения правой части в ряд по $\tilde{\mathcal{E}}_{11}$, придем к равенству

$$Q = ES_0 \tilde{\mathcal{E}}_{11} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{(1 + 2\nu)^2}{1 + \nu} \tilde{\mathcal{E}}_{11} \right], \quad E = 2\mu (1 + \nu), \quad (4.4.11)$$

причем E — модуль Юнга линейной теории.

При бесконечном удлинении ($\delta_1 \rightarrow \infty$, $\tilde{\mathcal{E}}_{11} \rightarrow 1/2$) растягивающая сила остается конечной; эта сопровождаемая разрывом образца сила оказывается в теории Синьорини равной

$$Q_\infty = \frac{\mu S_0}{2(1 - 2\nu)} [\sqrt{5 + 8\nu} - (1 + 4\nu)] \quad (4.4.12)$$

и остается конечной при всех допустимых ν :

$$-\frac{5}{8} \leq \nu \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3} \mu S_0 \leq Q_\infty \leq \frac{2}{3} \mu S_0. \quad (4.4.13)$$

В противоположность этому сжимающее усилие, доводящее длину стержня до нуля ($\delta_1 \rightarrow -1$, $\tilde{\mathcal{E}}_{11} \rightarrow -\infty$), бесконечно.

4.5. Простой сдвиг. Это деформированное состояние определяется тензором (п. 6.3 гл. II)

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) s - \frac{1}{2} s^2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2, \quad j'_1 = -\frac{1}{2} s^2, \quad (4.5.1)$$

и компоненты тензора напряжений в упрощенной теории Синьорини по (4.3.1) оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} t_{11} = t_{33} &= -\frac{1}{2} \mu \frac{s^2 \left(2\nu - \frac{1}{4} s^2 \right)}{1 - 2\nu}, \\ t_{22} &= -\frac{\mu s^2}{1 - 2\nu} \left(1 - \nu + \frac{3}{8} s^2 \right), \\ t_{12} = t_{21} &= \mu s + \frac{1}{2} \mu \frac{s^3}{1 - 2\nu}, \quad t_{23} = t_{31} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.2)$$

Осуществление сдвига требует приложения нормальных усилий по всем граням испытуемого кубика; это — одно из существенных отличий нелинейной теории от линейной; в последней присутствует только касательное напряжение $t_{12} = \mu s$.

4.6. Закон состояния Мурнагана. Удельная потенциальная энергия деформации представляется рядом по степеням инвариантов тензора деформации Коши с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} A &= \alpha j_1 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) j_1^2 - 2\mu j_2 + \frac{1}{3} (\lambda + 2m) j_1^3 - 2m j_1 j_2 + n j_3 + \dots = \\ &= \left(\alpha - \frac{n}{4} \right) j_1 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) j_1^2 - \left(2\mu + \frac{n}{2} \right) j_2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} (\lambda + 2m) j_1^3 - 2m j_1 j_2 + \frac{n}{8} (\Theta^2 - 1) + \dots \quad (4.6.1) \end{aligned}$$

Обозначения согласованы с принятыми Мурнаганом. Сохранив только представленные в этой записи слагаемые, по (2.5.7) приходим к таким выражениям модулей $\overset{k}{m}$, входящих в определение повернутого тензора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \overset{0}{m} &= \alpha + \lambda j_1 + l j_1^2 - (2m - n) j_2 + 2n j_3, \\ \overset{1}{m} &= 2 \left[\mu + \alpha + \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) j_1 + l j_1^2 - 2m j_2 \right], \\ \overset{2}{m} &= 2 \left(2\mu + \frac{n}{2} + 2m j_1 \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.6.2)$$

причем $\alpha = 0$, если начальное состояние является натуральным. При удержании в выражении A лишь «классических» слагаемых линейной теории

$$A = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) j_1^2 - 2\mu j_2 \quad (4.6.3)$$

получили бы закон состояния, отличающийся от закона Гука:

$$\hat{T} = \frac{1}{6} [\lambda j_1 \hat{g} + 2(\mu + \lambda j_1) \hat{\mathcal{E}} + 4\mu \hat{\mathcal{E}}^2]. \quad (4.6.4)$$

Данные о коэффициентах l , m , n в формулах Мурнагана немногочисленны и малодостоверны. Приводим небольшую таблицу для нескольких материалов ($\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$).

Т а б л и ц а 15*)

Коэффициенты Мурнагана $\times 10^{-11}$ дн/см²

Материал	ν	λ	l	m	n
Полистирол (1)	0,338	0,138	-1,89	-1,33	-1,00
Железо армо (1, 2)	0,32	8,20	-3,48	-103	110
Стекло (пирекс) (1, 2)	0,165	2,75	1,40	92	42
Никелевая сталь 535 (1, 3)	0,28	7,8	-4,6	-59	-73
Медь (4)	0,34	4,9	-16	-62	-159
Сталь 60С2Н2А (5)	0,3	8,1	-34	-63	-76

4.7. Поведение материала при сверхвысоких давлениях. Как и выше, в п. 2.3, рассмотрим натуральное состояние (v_0 -объем) и состояние, получающееся из него преобразованием подобия с коэффициентом подобия K (v_* -объем). Коэффициенты законов состояния V -объема при первом и втором выборе начальных состояний обозначаются соответственно

$$\alpha = 0, \lambda, \mu, l, m, n; \quad \alpha^*, \lambda^*, \mu^*, l^*, m^*, n^*,$$

и, основываясь на (2.3.4), запишем равенство

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) j_1^2 - 2\mu j_2 + \frac{1}{3}(l + 2m) j_1^3 - 2m j_1 j_2 + n j_3 = \\
 &= K^3 \left[\alpha^* j_1^* + \frac{1}{2}(\lambda^* + 2\mu^*) j_1^{*2} - 2\mu^* j_2^* \right] + \frac{1}{3}(l^* + 2m^*) j_1^{*3} - \\
 &\quad - 2m^* j_1^* j_2^* + n^* j_3^*. \quad (4.7.1)
 \end{aligned}$$

*) Данные этой таблицы взяты из перечисленных ниже работ:

1. А. К. Зарембо и Б. А. Красильников, Введение в нелинейную акустику. Изд-во «Наука», 1966.
2. D. S. Hughes, J. L. Kelly, Second-order elastic deformation of solids, Phys. Rev., 92, стр. 1145, 1953.
3. D. J. Crecraft, Ultrasonic wave velocities on stressed nickel steel, Nature, 95, № 4847, стр. 1193, 1962.
4. A. Seeger, O. Buck, Die experimentelle Ermittlung der elastischen Konstanten höherer Ordnung, Z. Natur., 15a, 12, 1960.
5. С. С. Секоян, Н. Е. Еремеев, Измерение констант упругости третьего порядка для стали ультразвуковым методом. Измерительная техника 7, 1966.

После замены j_k^* их выражениями через j_k по формулам (5.6.4) гл. II и сравнения коэффициентов слагаемых с одинаковыми степенями j_k приходим к равенствам (Бриллуэн)

$$n^* = nK^3, \quad m^* = mK^3, \quad l^* = lK^3,$$

$$2\mu^* = K \left[2\mu + (1 - K^2) \left(\frac{n}{2} - 3m \right) \right],$$

$$\lambda^* + 2\mu^* = K [\lambda + 2\mu + (1 - K^2)(2m + 3l)], \quad (4.7.2)$$

$$K\alpha^* = (1 - K^2) \left[-\frac{1}{2}(3\lambda + 2\mu) + \frac{1}{4}(1 - K^2)(n + 9l) \right]. \quad (4.7.3)$$

Последняя формула определяет напряженное состояние v_* объема при всестороннем сжатии:

$$\hat{T}_0 = \hat{T}_0 = -p\hat{g} = \alpha^*\hat{g} = \frac{1}{K}(1 - K^2) \left[-\frac{3}{2}k + \frac{1}{4}(1 - K^2)(n + 9l) \right] \hat{g}, \quad (4.7.4)$$

где введено обозначение модуля объемного сжатия линейной теории

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (4.7.5)$$

Учитывая теперь, что

$$K^3 = \frac{V_*}{V_0} = 1 - \frac{\Delta V}{V_0} = 1 - \Theta,$$

где V_* , V_0 — объемы образца в сжатом и натуральном состоянии, Θ — относительное объемное сжатие, приходим к соотношению

$$p \left(\frac{V_*}{V_0} \right)^{1/3} = \frac{3}{2}k \left[1 - \left(\frac{V_*}{V_0} \right)^{2/3} \right] - \frac{1}{4}(n + 9l) \left[1 - \left(\frac{V_*}{V_0} \right)^{2/3} \right]^2. \quad (4.7.6)$$

В опытах Бриджмена давление доводилось до 100 000 атм. Результаты этих опытов над натрием Мурнаган представил формулой вида (4.7.6) с численными значениями

$$k = 0,628 \cdot 10^4 \text{ атм}, \quad n + 9l = -406,2 \cdot 10^4 \text{ атм}.$$

Они подбирались по условию совпадения измеренных и вычисленных значений Θ при $p = 2,5 \cdot 10^4$ атм и $p = 10^5$ атм, причем погрешность для промежуточных значений p от 10^4 до 10^5 атм не превышала 1%; относительное объемное сжатие Θ при возрастании давления от $2,5 \cdot 10^4$ до 10^5 атм возрастало от 0,211 до 0,394. Интересно отметить, что $|n + 9l| \gg k$. Это указывает на необходимость учета слагаемых третьей степени в выражении удельной потенциальной энергии деформации.

Сохранив в формуле (4.7.6) только квадратичные по Θ слагаемые, получим

$$p = k\Theta + \frac{1}{2} \left(k - l - \frac{1}{9}n \right) \Theta^2. \quad (4.7.7)$$

Линейное приближение при $k = 11,85 \cdot 10^4$ атм, что соответствует измеренному $\Theta = 0,211$ при $p = 2,5 \cdot 10^4$ атм, уклоняется весьма сильно от результатов измерения при $5 \cdot 10^4$ атм — вычисление дает $\Theta = 0,422$ при измеренном $\Theta = 0,292$. Не улучшает существенно дела учет второго слагаемого в (4.7.7), если входящие в него коэффициенты определить по двум измерениям при $p = 2,5 \cdot 10^4$ и $p = 5 \cdot 10^4$ атм.

Здесь речь шла о «сверхвысоких» давлениях и податливом материале. Для давлений до 10^4 атм и технически применяемых металлов формула (4.7.7) уже в линейном приближении дает вполне надежные результаты.

4.8. Одноосное растяжение. В задаче о растяжении призматического стержня силами, имеющими направление его оси (X_3), тензоры \hat{G}^\times и \hat{g}^\times соосны, так что $\hat{T}^1 = \hat{T}$. Представив тензор деформации $\hat{\mathcal{E}}$ в виде

$$\hat{\mathcal{E}} = (i_1 i_1 + i_2 i_2) \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 i_3 i_3 = \mathcal{E}_1 \hat{E} + (\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1) i_3 i_3, \quad (4.8.1)$$

где \mathcal{E}_k — его главные значения, E — единичный тензор, имеем [см. (I. 10.10)]

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}^2 &= \mathcal{E}_1^2 \hat{E} + (\mathcal{E}_3^2 - \mathcal{E}_1^2) i_3 i_3, \quad j_1 = 2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3, \quad j_2 = \mathcal{E}_1^2 + 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3, \\ j_3 &= \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3. \end{aligned}$$

Пользуясь законом состояния Мурнагана и потребовав обращения в нуль компонент тензора напряжений, отличных от t_{33} , приходим к соотношениям

$$2(\lambda + \mu) \mathcal{E}_1 + \lambda \mathcal{E}_3 + l(4\mathcal{E}_1^2 + 4\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_3^2) + 2m\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) + n\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3 = 0, \quad (4.8.2)$$

$$t_{33} = \frac{2}{\Theta} (\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1) (1 + 2\mathcal{E}_3) \left[\mu + m(2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3) - \frac{1}{2} n\mathcal{E}_1 \right], \quad (4.8.3)$$

причем

$$\Theta = (1 + 2\mathcal{E}_1) \sqrt{1 + 2\mathcal{E}_3} = (1 + \delta_1)^2 \sqrt{1 + 2\mathcal{E}_3}.$$

Усилие t_3 , рассчитанное на единицу площади поперечного сечения стержня в натуральном состоянии, оказывается равным

$$t_3 = t_{33} (1 + \delta_1)^2 = 2(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1) \sqrt{1 + 2\mathcal{E}_3} \left[\mu + m(2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3) - \frac{1}{2} n\mathcal{E}_1 \right]. \quad (4.8.4)$$

Следуя Мурнагану, представим результаты опыта по растяжению образца в виде

$$x_1 = (1 - \nu c + \beta c^2) a_1, \quad x_2 = (1 - \nu c + \beta c^2) a_2, \quad x_3 = (1 + c + \delta c^2) a_3, \quad (4.8.5)$$

где β , δ — эмпирически подбираемые коэффициенты, c — параметр малости, в линейной теории совпадающий с относительным удлинением стержня. Сохранив лишь квадраты c , по формулам (3.6.4) гл. II имеем

$$\mathcal{E}_1 = -\nu c + \left(\frac{1}{2}\nu^2 + \beta\right)c^2, \quad \mathcal{E}_3 = c + \left(\frac{1}{2} + \delta\right)c^2$$

и после подстановки в (4.8.2), (4.8.4) из рассмотрения линейных по c слагаемых находим

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad t_3^* = 2c\mu(1 + \nu) = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\mu c = Ec. \quad (4.8.6)$$

Итак, ν , E выражается через λ , μ , как коэффициент Пуассона и модуль Юнга линейной теории упругости. Приравнявая нулю остающиеся слагаемые второй степени по c , приходим к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu)\beta + \lambda\delta &= -\lambda\left(\frac{1}{2} + \nu^2\right) - \mu\nu^2 - l(1 - 2\nu)^2 - 2m\nu(1 + \nu) + n\nu, \\ \mu(\delta - \beta) &= -\mu\left(\frac{3}{2} + \nu - \frac{1}{2}\nu^2\right) - m(1 + \nu)(1 - 2\nu) - \frac{1}{2}n, \end{aligned}$$

связывающим коэффициенты l , m , n закона состояния с эмпирически определяемыми коэффициентами δ , β .

4.9. Несжимаемый материал. Для несжимаемых материалов

$$I_3(\hat{G}^\times) = G_1 G_2 G_3 = 1, \quad (4.9.1)$$

где G_s — главные значения меры деформации Коши \hat{G}^\times , выражение удельной потенциальной энергии, предложенное Муни (1940), представляется в виде

$$A = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (4.9.2)$$

причем C_1, C_2 — неотрицательные постоянные:

$$C_1 \geq 0, \quad C_2 \geq 0. \quad (4.9.3)$$

Нетрудно убедиться, что неравенства (4.9.3) являются необходимыми и достаточными условиями положительности A во всех состояниях, отличных от начального (когда $A = 0$). Действительно, вспоминая, что

$$I_1 = G_1 + G_2 + G_3, \quad I_2 = G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_3 G_1, \quad G_s \geq 0,$$

можно представить (4.9.2) в виде

$$A = C_1(G_1 + G_2 + G_3 - 3) + C_2\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} - 3\right). \quad (4.9.4)$$

Но сумма трех положительных чисел, произведение которых равно единице, имеет минимум, когда эти числа равны и, значит, каждое из них равно 1. Итак, при условии (4.9.1)

$$G_1 + G_2 + G_3 - 3 \geq 0, \quad \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} - 3 \geq 0 \quad (4.9.5)$$

и неравенства (4.9.3) — достаточные условия положительности A . Они также необходимы; действительно, по крайней мере одна из постоянных C_1, C_2 (пусть C_1) должна быть положительна, а приняв $C_2 < 0$, всегда можно подобрать положительные числа G_1, G_2, G_3 , произведение которых равно единице, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{C_1}{|C_2|} < \frac{I_2 - 3}{I_1 - 3} = \frac{G_1^{-1} + G_2^{-1} + G_3^{-1} - 3}{G_1 + G_2 + G_3 - 3}, \quad A < 0. \quad (4.9.6)$$

Тензор напряжений для материала Муни представляется, например, формулой Фингера (2.4.6), принимающей здесь вид

$$\hat{T} = 2[(C_1 + I_1 C_2) \hat{M} - C_2 \hat{M}^2 + c \hat{G}]. \quad (4.9.7)$$

Другим представлением удельной потенциальной энергии деформации в форме Муни через меру деформации Альманзи служит

$$A = C_1(I'_2 - 3) + C_2(I'_1 - 3) \quad [I'_k = I_k(\hat{g}^\times)] \quad (4.9.8)$$

[см. (5.2.4) гл. II]. При этом тензор напряжения согласно (2.4.2) представляется равенством

$$\hat{T} = 2[e \hat{G} - (C_2 + C_1 I'_1) \hat{g}^\times + C_1 \hat{g}^{\times^2}]. \quad (4.9.9)$$

Конечно, уравнения состояния (4.9.7), (4.9.9) — формы записи одного и того же соотношения; в этом можно убедиться, заменив \hat{g}^\times тензором $\hat{M} = \hat{g}^{\times^{-1}}$.

Энергетический тензор напряжений \hat{Q} по (2.4.6) дается выражением

$$\hat{Q} = 2[(C_1 + I_1 C_2) \hat{g} - C_2 \hat{G}^\times + c \hat{G}^{\times^{-1}}]. \quad (4.9.10)$$

Было бы ошибкой, основываясь на записи (4.9.2), считать производную $\partial A / \partial I_3$ равной нулю; она является неизвестной наперед функцией инвариантов I_1, I_2 , определяемой по уравнениям статики и условию $I_3 = 1$. Формула (4.9.2) дает значение A на плоскости $I_3 = 1$ пространства параметров I_1, I_2, I_3 , а $\partial A / \partial I_3$ — производная по нормали от $A(I_1, I_2, I_3)$ на этой плоскости. Возвращаясь к определениям (2.1.7), (2.4.3), имеем

$$\left. \frac{\partial A}{\partial I_3} \right|_{I_3=1} = \overset{-1}{c} = \overset{0}{e} - C_1 I_1 - C_2 I_2. \quad (4.9.11)$$

Представлению удельной потенциальной энергии деформации в форме Муни (4.9.2) предшествовала упрощенная его форма

$$A = C_1(I_1 - 3). \quad (4.9.12)$$

Она была предложена (Треолар) на основании рассмотрения конструктивной модели резины как системы связанных друг с другом длинных молекулярных цепочек. Эта же форма зависимости («неогуково тело») была использована в первых работах Ривлина (1948).

Формула Муни в известной мере сокращает разрыв теории с экспериментом; однако при измерениях в большом диапазоне деформаций была обнаружена зависимость отношения $\frac{\partial A}{\partial I_1} / \frac{\partial A}{\partial I_2}$ от I_2 (Ривлин и Сондерс, 1951). Это дало основание корректировать формулу Муни соотношением более общего вида:

$$A = C_1(I_1 - 3) + f(I_2 - 3). \quad (4.9.13)$$

4.10. Материалы с углом подобия девиаторов, равным нулю. Следуя определению (3.4.1) гл. I, введем в рассмотрение измененный энергетический тензор напряжений

$${}_0\hat{Q} = \sqrt{\frac{G}{g}} \hat{Q}. \quad (4.10.1)$$

Можно сохранить для тензора ${}_0\hat{Q}$ выражение закона состояния в форме (3.4.1), условившись в замене k, μ величинами

$${}_0k = \frac{1}{3} \frac{I_1({}_0\hat{Q})}{j_1} = \sqrt{\frac{G}{g}} k, \quad {}_0\mu = \left[\frac{I_2(\text{Dev}_0 \hat{Q})}{4I_2(\text{Dev} \hat{E})} \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{G}{g}} \mu. \quad (4.10.2)$$

Формулы (3.4.11) теперь запишутся в виде

$$\frac{\partial A}{\partial j_1} = {}_0k j_1, \quad \frac{\partial A}{\partial \Gamma} = {}_0\mu \Gamma \cos \omega, \quad \frac{\partial A}{\partial \Phi} = {}_0\mu \Gamma^2 \sin \omega \quad (4.10.3)$$

и для материалов с фазой подобия ω , равной нулю,

$$\frac{\partial A}{\partial j_1} = {}_0k j_1, \quad \frac{\partial A}{\partial \Gamma} = {}_0\mu \Gamma, \quad \frac{\partial A}{\partial \Phi} = 0. \quad (4.10.4)$$

Для таких материалов

$$A = A(j_1, j_2) = A(j_1, \Gamma), \quad \frac{\partial A}{\partial j_2} = 8 \frac{\partial A}{\partial I_3} = 0, \quad (4.10.5)$$

и они не являются несжимаемыми. Заметим еще, что, рассматривая A как функцию j_1, j_2 , имеем по (3.4.16)

$$\frac{\partial A}{\partial j_1} = \left({}_0k + \frac{4}{3} {}_0\mu \right) j_1, \quad \frac{\partial A}{\partial j_2} = -2 {}_0\mu. \quad (4.10.6)$$

Уравнение состояния (3.4.1) приобретает классическую структуру закона Гука:

$${}_0\hat{Q} = {}_0k j_1 \hat{g} + 2{}_0\mu \operatorname{Dev} \hat{\mathcal{E}} = \left({}_0k - \frac{2}{3} {}_0\mu \right) j_1 \hat{g} + 2{}_0\mu \hat{\mathcal{E}}, \quad (4.10.7)$$

причем ${}_0k, {}_0\mu$ — функции j_1, Γ (или j_1, j_2).

Тело Генки представляет частный пример материала с равным нулю углом подобия при постоянном ${}_0k$; тогда ${}_0\mu = {}_0\mu(\Gamma)$, что следует из требования совместности соотношений (4.10.4):

$${}_0k = \text{const}, \quad \frac{\partial {}_0A}{\partial \Gamma \partial j_1} = 0 = \Gamma \frac{\partial {}_0\mu}{\partial j_1}; \quad {}_0\mu = {}_0\mu(\Gamma). \quad (4.10.8)$$

Другим частным примером может служить закон состояния, рассмотренный Нейбером. Используя классические обозначения (4.3.9), (4.7.5):

$${}_0k - \frac{2}{3} {}_0\mu = {}_0\lambda = {}_0\mu \frac{2\nu}{1-2\nu}, \quad (4.10.9)$$

примем в законе состояния (4.10.7)

$${}_0\hat{Q} = 2{}_0\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} j_1 \hat{g} + \hat{\mathcal{E}} \right) \quad (4.10.10)$$

постоянным «коэффициент Пуассона» ν . Тогда по (4.10.4), (4.10.9)

$$\frac{\partial A}{\partial j_1^2} = \frac{1}{2} {}_0k = \frac{1}{3} {}_0\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu}, \quad \frac{\partial A}{\partial \Gamma^2} = \frac{1}{2} {}_0\mu,$$

так что

$$\frac{\partial A}{\partial j_1^2} - \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{\partial A}{\partial \Gamma^2} = 0, \quad (4.10.11)$$

и общее решение этого уравнения в частных производных первого порядка может быть записано в форме

$$\begin{aligned} A &= {}_0\mu f(A_+), \quad A_+ = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \frac{1+\nu}{1-2\nu} j_1^2 + \Gamma^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1-2\nu} j_1^2 - j_2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} I_1(\mathcal{E}) + I_1(\mathcal{E}^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.10.12)$$

Здесь ${}_0\mu$ — постоянная, A_+ — классическое (гуково) выражение удельной потенциальной энергии упругого тела с коэффициентом Пуассона ν и с модулем сдвига, равным половине.

Для тела Нейбера «модулем сдвига» является функция от A_+ , определяемая в соответствии с (4.10.4), (4.10.12):

$${}_0\mu = 2 \frac{\partial A}{\partial \Gamma^2} = 4{}_0\mu \frac{\partial f(A_+)}{\partial \Gamma^2} = {}_0\mu \frac{\partial f(A_+)}{\partial A_+}. \quad (4.10.13)$$

Для построения закона состояния в форме Нейбера должна быть известна экспериментальная зависимость сообщенной удельной потенциальной энергии деформации от вычисляемой по измеренным деформациям величины A_+ .

§ 5. Вариационные теоремы статики нелинейно-упругого тела

5.1. Принцип виртуальных перемещений. Формулировка этого принципа в применении к сплошной среде была дана в п. 3.5 гл. I. Равенство (3.5.6) гл. I, определяющее элементарную работу внешних сил $\delta' a_{(e)}$, в ходе которого использовались уравнения статики V -объема (3.3.1) гл. I, было получено с помощью этого принципа. Здесь будет показано обратное: уравнения статики в V -объеме и на его поверхности O заключены в принципе виртуальных перемещений, если предположить выражение элементарной работы (3.5.6) гл. I известным.

Действительно, по (3.5.3), (3.5.5) гл. I имеем

$$\delta' a_{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{t}^{st} \delta G_{st} d\tau = \iiint_V \rho K \cdot \delta R d\tau + \int_O F \cdot \delta R dO \quad (5.1.1)$$

или, переходя к интегрированию по v -объему и его поверхности o ,

$$\begin{aligned} \delta' a_{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_v \sqrt{\frac{\bar{G}}{g}} \bar{t}^{st} \delta G_{st} d\tau_0 = \iiint_v \rho_0 K \cdot \delta R d\tau_0 + \\ + \int_o \sqrt{\frac{\bar{G}}{g}} \sqrt{G^{ik} n_i n_k} F \cdot \delta R do. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Здесь использовано равенство (3.5.4) гл. II, связывающее площадки dO на O с do на o . Теперь, замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{G}}{g}} \bar{t}^{st} \delta G_{st} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{G}}{g}} \bar{t}^{st} (R_s \cdot \delta R_t + R_t \cdot \delta R_s) = \sqrt{\frac{\bar{G}}{g}} \bar{t}^{st} R_s \cdot \delta R_t = \\ = \frac{1}{Vg} \left[\frac{\partial}{\partial q^t} \sqrt{\bar{G}} \bar{t}^{st} R_s \cdot \delta R - \delta R \cdot \frac{\partial}{\partial q^t} \sqrt{\bar{G}} \bar{t}^{st} R_s \right], \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

и используя преобразование объемного интеграла в поверхностный (V. 8.1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_v \sqrt{\frac{\bar{G}}{g}} \bar{t}^{st} \delta G_{st} d\tau_0 = \\ = \int_o \sqrt{\frac{\bar{G}}{g}} \bar{t}^{st} n_t R_s \cdot \delta R do - \int_v \frac{d\tau_0}{Vg} \delta R \cdot \frac{\partial}{\partial q^t} \sqrt{\bar{G}} \bar{t}^{st} R \end{aligned}$$

и, возвращаясь к (5.1.2), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \iiint_v \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\rho_0 \sqrt{g} K + \frac{\partial}{\partial q^t} \sqrt{G} \dot{r}^{st} R_s \right) \cdot \delta R d\tau_0 + \\ + \iint_o \sqrt{\frac{G}{g}} \left(\sqrt{G^{ik} n_i n_k} F - \dot{r}^{st} R_s n_t \right) \cdot \delta R do = 0. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Требование обращения в нуль объемного интеграла, вследствие произвольности поля виртуальных перемещений $\delta u = \delta R$ в объеме тела, возвращает к уравнениям статики в объеме

$$\frac{\partial}{\partial q^t} \sqrt{G} \dot{r}^{st} R_s + \rho_0 \sqrt{g} K = 0. \quad (5.1.5)$$

В поверхностном интеграле $\delta R = \delta u = 0$ на той части o_1 поверхности o , на которой задан и, значит, не варьируется вектор перемещения u ; на той же ее части o_2 , где заданы поверхностные силы F , вектор $\delta R = \delta u$ произвольный, и требование обращения в нуль поверхностного интеграла (по o_2) приводит к уравнениям статики на поверхности (3.3.6) гл. I:

$$\dot{r}^{st} R_s n_t = \sqrt{G^{ik} n_i n_k} F. \quad (5.1.6)$$

5.2. Стационарность потенциальной энергии системы. В идеально-упругой среде элементарная работа внешних сил $\delta' a_{(e)}$ равна вариации потенциальной энергии деформации. Вспомнив ее определение (1.2.13) и возвращаясь к (5.1.1), имеем

$$\delta \iiint_v A d\tau_0 - \iiint_v \rho K \cdot \delta R d\tau - \iint_o F \cdot \delta R dO = 0, \quad (5.2.1)$$

причем A — удельная потенциальная энергия деформации.

Далее принимается, что массовые и поверхностные силы потенциальны. Элементарная работа потенциальной массовой силы может быть определена соотношением

$$K \cdot \delta R = -\delta \omega(x_1, x_2, x_3) = -\tilde{\nabla} \omega \cdot \delta R, \quad (5.2.2)$$

где $\omega(x_1, x_2, x_3)$ — потенциальная энергия силового поля; например, в поле силы тяжести $\omega = gx_3$, $\tilde{\nabla} \omega = kg$ (k — вектор восходящей вертикали). Поэтому

$$\begin{aligned} \iiint_v \rho K \cdot \delta R d\tau &= - \iiint_v \rho \delta \omega d\tau = - \iiint_v \rho_0 \delta \omega d\tau_0 = \\ &= - \delta \iiint_v \rho_0 \omega d\tau_0; \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

знак вариации здесь вынесен за знак интеграла, так как ни объем v , ни плотность ρ_0 в нем не варьируются,

Случай потенциального распределения поверхностных сил имеет место, когда усилие на элементарной площадке сохраняет величину и направление («мертвая нагрузка»):

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) dO = \mathbf{F}^0(a_1, a_2, a_3) do. \quad (5.2.4)$$

Здесь a_s — координаты на o точки M , переходящей при деформировании в точку $M'(x_s)$ на O . Поскольку вектор \mathbf{F}^0 остается неизменным,

$$\int_O \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R} dO = \int_{o_2} \mathbf{F}^0 \cdot \delta \mathbf{R} do = \int_{o_2} \mathbf{F}^0 \cdot \delta \mathbf{u} do = \delta \int_{o_2} \mathbf{F}^0 \cdot \mathbf{u} do, \quad (5.2.5)$$

причем, как выше, o_2 — часть поверхности o , на которой заданы силы.

Другим примером поверхностных сил, которым можно сопоставить потенциал, служит равномерно распределенное по O нормальное давление. Тогда

$$\int_O \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R} dO = -p_0 \int_O \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{R} dO = -p_0 \int_V \tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{R} d\tau.$$

Но по определению набла-оператора в V -объеме

$$\tilde{\nabla} \cdot \delta \mathbf{R} = \mathbf{R}^s \cdot \frac{\partial}{\partial q^s} \delta \mathbf{R} = \mathbf{R}^s \cdot \delta \mathbf{R}_s,$$

и предшествующее равенство переписывается в виде

$$\int_O \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R} dO = -p_0 \int_V \int_V \sqrt{\frac{G}{g}} \mathbf{R}^s \cdot \delta \mathbf{R}_s d\tau_0. \quad (5.2.6)$$

Вариация величины \sqrt{G} может быть представлена в виде (\sqrt{g} не варьируется)

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{G} &= \frac{1}{2\sqrt{G}} \delta G = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial G_{st}} \delta G_{st} = \frac{1}{2} \sqrt{G} G^{st} \delta G_{st} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{G} \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{R}^t (\mathbf{R}_t \cdot \delta \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s \cdot \delta \mathbf{R}_t) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{G} (\mathbf{R}^s \cdot \delta \mathbf{R}_s + \mathbf{R}^t \cdot \delta \mathbf{R}_t) = \sqrt{G} \mathbf{R}^s \cdot \delta \mathbf{R}_s, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

так как $\mathbf{R}^t \mathbf{R}_t = \hat{G}$ представляет единичный тензор V -объема. Равенство (5.2.6) теперь преобразуется к ожидаемому виду

$$\begin{aligned} \int_O \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R} dO &= -p_0 \int_V \int_V \delta \sqrt{\frac{G}{g}} d\tau_0 = -p_0 \delta \int_V \int_V \sqrt{\frac{G}{g}} d\tau_0 = \\ &= -p_0 \delta \int_V \int_V d\tau = -p_0 \delta V, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

причем V — объем тела в деформированном состоянии.

Выражение (5.2.1) принципа возможных перемещений приобретает вид

$$\delta \left[\iiint_v \left(A + \rho_0 \omega + p_0 \sqrt{\frac{G}{g}} \right) d\tau_0 - \iint_{o_1} \mathbf{F}^0 \cdot \mathbf{u} d\sigma \right] = \delta \Pi = 0, \quad (5.2.9)$$

где Π — функционал над вектором перемещения \mathbf{u} :

$$\Pi = \iiint_v \left(A + \rho_0 \omega + p_0 \sqrt{\frac{G}{g}} \right) d\tau_0 - \iint_{o_1} \mathbf{F}^0 \cdot \mathbf{u} d\sigma, \quad (5.2.10)$$

называемый потенциальной энергией системы (упругого тела и силового поля). Равенством (5.2.9) доказывается стационарность этого функционала: из всех мыслимых (то есть принимающих на o_1 наперед заданные значения) полей перемещений в состоянии равновесия идеально-упругого тела осуществляется поле перемещений, в котором потенциальная энергия системы сохраняет стационарное значение.

Напомним, что стационарным значением функционала называется такое его значение, которое при задании вектору \mathbf{u} вариации $\delta \mathbf{u}$ приобретает приращение $\Delta \Pi$ порядка более высокого, чем $|\delta \mathbf{u}|$. В линейной теории упругости доказывалось (п. 2.2 гл. IV), что

$$\Delta \Pi > 0,$$

так что стационарное значение функционала Π было его минимумом. В нелинейной теории столь общее утверждение не имеет места.

З а м е ч а н и я. 1. Дифференциальные уравнения и натуральные краевые условия вариационной задачи о стационарности функционала Π представляют уравнения статики в объеме и на поверхности, в которых тензор напряжений заменен его представлением через закон состояния.

Действительно, повторив преобразование п. 5.1, имеем

$$\begin{aligned} \delta \iiint_v A d\tau_0 &= 2 \iint_o \frac{\partial A}{\partial G_{st}} \mathbf{R}_t \cdot \delta \mathbf{R}_s d\sigma - \\ &- 2 \iiint_v \frac{d\tau_0}{\sqrt{g}} \delta \mathbf{R} \cdot \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{g} \frac{\partial A}{\partial G_{st}} \mathbf{R}_t. \end{aligned}$$

Элементарная работа внешних (массовых и поверхностных) сил представляется в виде (5.1.2). Приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &- \iiint_v \frac{d\tau_0}{\sqrt{g}} \delta \mathbf{R} \cdot \left(2 \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{g} \frac{\partial A}{\partial G_{st}} \mathbf{R}_t + \rho_0 \sqrt{g} \mathbf{K} \right) + \\ &+ \iint_o \delta \mathbf{R} \cdot \left(2 \sqrt{\frac{g}{G}} \frac{\partial A}{\partial G_{st}} n_s \mathbf{R}_t - \sqrt{G^{ik} n_i n_k} \mathbf{F} \right) \sqrt{\frac{G}{g}} d\sigma = 0 \quad (5.2.11) \end{aligned}$$

и вследствие произвольности $\delta \mathbf{R}$ в объеме и на той части поверхности O_2 , на которой заданы силы, приходим к дифференциальным уравнениям

$$2 \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{g} \frac{\partial A}{\partial G_{st}} \mathbf{R}_t + \rho_0 \sqrt{g} \mathbf{K} = 0 \quad (5.2.12)$$

с краевыми условиями на O_2

$$2 \sqrt{\frac{g}{G}} \frac{\partial A}{\partial G_{st}} n_s \mathbf{R}_t = \sqrt{G^{ik} n_i n_k} \mathbf{F}, \quad (5.2.13)$$

и достаточно вспомнить соотношения (1.2.10), чтобы вернуться к уравнениям статики (3.3.3), (3.3.6) гл. I.

Уравнения равновесия в перемещениях изотропного упругого тела приводятся к виду

$$2 \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{g} \mathbf{R}_t \left[\left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) g^{st} - \frac{\partial A}{\partial I_2} G_{mn} g^{mt} g^{ns} + \right. \\ \left. + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} G^{st} \right] + \rho_0 \sqrt{g} \mathbf{K} = 0, \quad (5.2.14)$$

$$2 \sqrt{\frac{g}{G}} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) g^{st} - \frac{\partial A}{\partial I_2} G_{mn} g^{mt} g^{ns} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} G^{st} \right] \mathbf{R}_t n_s = \\ = \sqrt{G^{ik} n_i n_k} \mathbf{F}. \quad (5.2.15)$$

Их представления через контравариантные компоненты внешних сил даются равенствами [см. (V. 2.2)]

$$\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{g} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) g^{sq} - \frac{\partial A}{\partial I_2} G_{mn} g^{mq} g^{ns} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} G^{sq} \right] + \\ + 2 \left[\left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) g^{st} - \frac{\partial A}{\partial I_2} G_{mn} g^{mt} g^{ns} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} G^{st} \right] \left\{ \widetilde{q}_{st}^q \right\} + \\ + \rho_0 K^q = 0, \quad (5.2.16)$$

$$\left[\left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) g^{sq} - \frac{\partial A}{\partial I_2} G_{mn} g^{mq} g^{ns} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} G^{sq} \right] n_s = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G}{g}} G^{ik} n_i n_k F^q. \quad (5.2.17)$$

2. В случае несжимаемого тела варьирование функционала Π проводится при добавочном условии

$$I_3 - 1 = 0, \quad (5.2.18)$$

а удельная потенциальная энергия зависит лишь от инвариантов I_1, I_2 . Варьируемый интеграл при введении лагранжева множителя $p(q^1, q^2, q^3)$ принимает вид

$$\delta \int \int \int_v [A + p(I_3 - 1)] d\tau_0 = \int \int \int_v \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} \delta I_1 + \frac{\partial A}{\partial I_2} \delta I_2 + p \delta I_3 \right) d\tau_0. \quad (5.2.19)$$

В уравнениях равновесия в перемещениях следует заменить слагаемое

$$I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} G^{sq} \quad \text{на} \quad p G^{sq}.$$

Для тела Муни они значительно упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^s} [(C_1 + I_1 C_2) g^{sq} - C_2 G_{mn} g^{mq} g^{ns} + p G^{sq}] \sqrt{g} + \\ & + 2 [(C_1 + I_1 C_2) g^{st} - C_2 G_{mn} g^{mt} g^{ns} + p G^{st}] \left\{ \widetilde{q} \right\}_{st} + \rho_0 K^q = 0, \\ & [(C_1 + I_1 C_2) g^{sq} - C_2 G_{mn} g^{mq} g^{ns} + p G^{sq}] n_s = \frac{1}{2} \sqrt{G^{ik} n_i n_k} F^q. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.20)$$

Напомним, что по теореме Риччи [см. (V.3)] производные компонент метрических тензоров выражаются через эти компоненты и символы Кристоффеля; например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{mn}}{\partial q^r} &= \left\{ \widetilde{q} \right\}_{rm} G_{qn} + \left\{ \widetilde{q} \right\}_{rn} G_{mq}, \\ \frac{\partial g^{sq}}{\partial q^r} &= - \left\{ s \right\}_{rt} g^{tq} - \left\{ q \right\}_{rt} g^{st} \end{aligned}$$

и т. д.

5.3. Дополнительная работа деформации. Будем исходить из уравнений статики в объеме и на поверхности (2.8.4), (2.8.5), выраженных через тензор Пиола — Кирхгоффа

$$\nabla \cdot \hat{D} + \rho_0 \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \hat{D} d\mathbf{o} = \mathbf{F} d\mathbf{O} = \mathbf{N} \cdot \hat{T} d\mathbf{O}. \quad (5.3.1)$$

Вариация потенциальной энергии деформации δa , равная работе внешних сил на возможном перемещении $\delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{u}$ из состояния равновесия, дается выражением

$$\begin{aligned} \delta a &= \int_V \int \rho \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{R} d\mathbf{O} = \int_V \int \rho_0 \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{R} d\tau_0 + \\ &+ \int_O \int \mathbf{n} \cdot \hat{D} \cdot \delta \mathbf{R} d\mathbf{o} = \int_V \int (\rho_0 \mathbf{K} + \nabla \cdot \hat{D}) \cdot \delta \mathbf{R} d\tau_0 + \\ &+ \int_V \int \hat{D} \cdot (\nabla \delta \mathbf{R})^* d\tau_0 = \int_V \int \hat{D} \cdot \delta \nabla \mathbf{R}^* d\tau_0. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Здесь использованы уравнение равновесия в объеме (5.3.1), преобразование поверхностного интеграла в объемный, известная формула дивергенции произведения тензора на вектор (II. 3.10), а также переставимость операций ∇ и δ .

Величина под знаком интеграла (5.3.2) представляет вариацию удельной потенциальной энергии деформации

$$\delta A = \hat{D} \cdot \delta \nabla \mathbf{R}^*. \quad (5.3.3)$$

Отсюда, сославшись на определение градиента скаляра по тензору (I. 12.7), имеем

$$\hat{D} = \frac{\partial A}{\partial \nabla R}. \quad (5.3.4)$$

Выражение (5.3.3) переписывается в виде

$$\delta A = \delta(\hat{D} \cdot \nabla R^*) - \delta \hat{D} \cdot \nabla R^*, \quad (5.3.5)$$

и в рассмотрение вводятся величины, называемые удельной дополнительной работой и дополнительной работой деформации

$$B \doteq \hat{D} \cdot \nabla R^* - A, \quad b = \int \int \int_v B \, d\tau_0. \quad (5.3.6)$$

Из (5.3.5) и (5.3.6) имеем

$$\delta B = \delta \hat{D} \cdot \nabla R^* = \nabla R \cdot \delta \hat{D}^*. \quad (5.3.7)$$

Предполагая теперь, что B выражено через тензор \hat{D} и, снова сославшись на (I. 12.7), придем к соотношениям, обратным (5.3.4):

$$\nabla R = \frac{\partial B}{\partial \hat{D}}. \quad (5.3.8)$$

В проведенном здесь преобразовании Лежандра удельная потенциальная энергия деформации играет роль производящей функции преобразования $\nabla R \rightarrow \hat{D}$; производящей функцией обратного преобразования $\hat{D} \rightarrow \nabla R$ служит удельная дополнительная работа деформации.

Соотношение (5.3.4) является уравнением состояния нелинейно-упругого тела, выражающим тензор \hat{D} через ∇R . Из этой, в общем случае, системы девяти уравнений требуется определить тензор ∇R . Ее разрешимость требует необращения в нуль гессиана

$$H = \left| \frac{\partial^2 A}{\partial u_s \partial q^t} \frac{\partial u_s}{\partial q^r} \right| \neq 0 \quad (s, t, r = 1, 2, 3),$$

где $\nabla u = \nabla R - \hat{E}$, $\partial u_s / \partial q^t$ — компоненты ∇u . Конечно, эта задача трудна. Ее решение для полулинейного материала (п. 2.8) приведено ниже в п. 5.5.

5.4. Стационарность дополнительной работы. Рассматривается статически возможное состояние равновесия нелинейно-упругого тела, близкое к его истинному состоянию равновесия под действием тех же «мертвых» массовых и поверхностных сил.

Тогда в варьированном состоянии уравнения равновесия в объеме и на поверхности записываются в виде

$$\nabla \cdot (\hat{D} + \delta \hat{D}) + \rho_0 K = 0, \quad n \cdot (\hat{D} + \delta \hat{D}) d\sigma = \begin{cases} F dO & \dots \text{ на } o_2, \\ (F + \delta F) dO & \dots \text{ на } o_1, \end{cases} \quad (5.4.1)$$

так как по условию $Kdm = K_0 dm$ в объеме тела, а $FdO = PdO$ на части поверхности, на которой заданы поверхностные силы K_0, P — значения сил в начальном состоянии тела). На o_1 задан вектор $R = r + u$. Здесь в варьированном напряженном состоянии возникают добавочные (неизвестные) реактивные силы $\delta F dO$, создаваемые приспособлениями, осуществляющими задание предписанного вектора R . По (5.3.1), (5.4.1) имеем

$$\nabla \cdot \delta \hat{D} = 0, \quad n \cdot \delta \hat{D} d\sigma = \begin{cases} 0 & \dots \text{ на } o_2, \\ \delta F dO & \dots \text{ на } o_1. \end{cases} \quad (5.4.2)$$

Учитывая эти соотношения по (5.3.6) и (5.3.7), имеем

$$\begin{aligned} \delta b &= \int_V \int \delta \hat{D} \cdot \nabla R^* d\tau_0 = \int_V \int [\nabla \cdot (\delta \hat{D} \cdot R) - (\nabla \cdot \delta \hat{D}) \cdot R] d\tau_0 = \\ &= \int_{o_1} \int n \cdot \delta \hat{D} \cdot R d\sigma = \delta \int_{o_1} \int n \cdot \hat{D} \cdot R d\sigma. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Знак вариации вынесен за знак интеграла, так как вектор R на o_1 задан.

Пришли к соотношению

$$\delta \left(b - \int_{o_1} \int n \cdot \hat{D} \cdot R d\sigma \right) = 0, \quad (5.4.4)$$

выражающему принцип стационарности дополнительной работы: фактически реализуемое равновесное состояние в нелинейно-упругом теле отличается от любого статически возможного тем, что в нем величина

$$b_* = b - \int_{o_1} \int n \cdot \hat{D} \cdot \hat{R} d\sigma, \quad (5.4.5)$$

называемая дополнительной работой, имеет стационарное значение.

В фактически реализуемом напряженном состоянии обеспечивается сплошность среды — вычисляемый с помощью формул (5.3.8) по тензору \hat{D} тензор $\hat{C} = \nabla R$ должен быть интегрируем, т. е. должен действительно представлять градиент вектора R . По (II.6.7) отсюда следует, что ротор этого тензора должен быть равным нулю

$$\nabla \times \hat{C} = 0. \quad (5.4.6)$$

Это условие эквивалентно принципу стационарности дополнительной работы, иными словами, оно представляет уравнения Эйлера вариационной задачи о стационарности функционала b_* при условиях (5.4.2). Это доказывается способом, указанным в п. 2.5 гл. IV. Введя лагранжев вектор λ , имеем

$$\begin{aligned} \delta b &= \int \int \int_v [\delta B + (\nabla \cdot \delta \hat{D}) \cdot \lambda] d\tau_0 = \\ &= \int \int \int_v [\delta \hat{D} \cdot \hat{C}^* + \nabla \cdot (\delta \hat{D} \cdot \lambda) - \delta \hat{D} \cdot \nabla \lambda^*] d\tau_0 = \\ &= \int \int \int_v \delta \hat{D} \cdot (\hat{C}^* - \nabla \lambda^*) d\tau_0 + \int \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \delta \hat{D} \cdot \lambda d\sigma \end{aligned}$$

и по принципу стационарности дополнительной работы

$$\delta b_* = \int \int \int_v \delta \hat{D} \cdot (\hat{C}^* - \nabla \lambda^*) d\tau_0 - \int \int_{o_1} \mathbf{n} \cdot \hat{D} \cdot (\mathbf{R} - \lambda) d\sigma = 0. \quad (5.4.7)$$

Вариацию $\delta \hat{D}$ при надлежащем выборе λ можно считать в объеме и на o_1 произвольной, поэтому тензор \hat{C} будет в v градиентом некоторого вектора λ и сам этот вектор равен \mathbf{R} на o_1 . Пришли к соотношению (5.4.6), выражающему условие сплошности, записанное через тензор Пиола \hat{D} .

5.5. Удельная дополнительная работа деформации для полунейного материала. Удельная потенциальная энергия деформации задается равенством (2.8.7)

$$A = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2, \quad (5.5.1)$$

в котором s_1 и s_2 по (2.7.3), (2.6.4) представляются через инварианты тензора $\hat{G}^{\times 1/2}$

$$I_1(\hat{G}^{\times 1/2}) = s_1 + 3, \quad I_1(\hat{G}^{\times}) = s_2 + 2s_1 + 3. \quad (5.5.2)$$

Закон состояния задается формулой (2.8.8)

$$\hat{D} = [(\lambda s_1 - 2\mu) \hat{G}^{\times -1/2} + 2\mu \hat{E}] \cdot \nabla \mathbf{R}. \quad (5.5.3)$$

Из нее получаем представления симметричных тензоров

$$\hat{D} \cdot \hat{D}^* = [(\lambda s_1 - 2\mu) \hat{E} + 2\mu \hat{G}^{\times 1/2}]^2, \quad (\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{1/2} = (\lambda s_1 - 2\mu) \hat{E} + 2\mu \hat{G}^{\times 1/2}. \quad (5.5.4)$$

Их первые инварианты, обозначаемые f_2, f_1 , если учесть (5.5.2),

оказываются равными

$$f_1 = I_1[(\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{1/2}] = (3\lambda + 2\mu) s_1, \quad f_2 = I_1(\hat{D} \cdot \hat{D}^*) = \lambda(3\lambda + 4\mu) s_1^2 + 4\mu^2 s_2, \quad (5.5.5)$$

так что выражения s_1, s_2 через инварианты f_1, f_2 можно записать в виде

$$s_1 = \frac{f_1}{3\lambda + 2\mu}, \quad s_2 = \frac{1}{4\mu^2} \left(f_2 - \frac{\lambda(3\lambda + 4\mu)}{(3\lambda + 2\mu)^2} f_1^2 \right). \quad (5.5.6)$$

Подстановка в (5.5.1) позволяет выразить удельную потенциальную энергию деформации через инварианты тензоров (5.5.4)

$$A = \frac{1}{4\mu} \left(f_2 - \frac{\nu}{1+\nu} f_1^2 \right) \quad \left(\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right). \quad (5.5.7)$$

Имеем также, снова обратившись к (5.5.2), (5.5.6),

$$\begin{aligned} \hat{D} \cdot \nabla \mathbf{R}^* &= I_1(\hat{D} \cdot \nabla \mathbf{R}^*) = I_1[(\lambda s_1 - 2\mu) \hat{G}^{\times 1/2} + 2\mu \hat{G}^{\times}] = \\ &= (\lambda s_1 - 2\mu)(s_1 + 3) + 2\mu(s_2 + 2s_1 + 3) = \lambda s_1^2 + 2\mu s_2 + (3\lambda + 2\mu) s_1 = 2A + f_1 \end{aligned}$$

и удельная дополнительная работа деформации в соответствии с определением (5.3.6), выраженная через тензор \hat{D} , оказывается равной

$$B = A + f_1 = \frac{1}{4\mu} \left(f_2 - \frac{\nu}{1+\nu} f_1^2 \right) + f_1. \quad (5.5.8)$$

Для определения тензора $\nabla \mathbf{R}$ по (5.3.4) следует вычислить производные по \hat{D} инвариантов f_2, f_1 . Имеем

$$\delta f_2 = \delta(\hat{D} \cdot \hat{D}^*) = \hat{D} \cdot \delta \hat{D}^* + \delta \hat{D} \cdot \hat{D}^* = 2\hat{D} \cdot \delta \hat{D}^*$$

и в соответствии с определением (1.12.7)

$$\frac{\partial f_2}{\partial \hat{D}} = 2\hat{D}. \quad (5.5.9)$$

Для вычисления δf_1 предварительно отметим, что производная первого инварианта любого симметричного тензора \hat{Q} по \hat{Q}^2 равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}^2} &= \frac{1}{2} \hat{Q}^{-1}, \\ \delta I_1(\hat{Q}) &= \frac{1}{2} \hat{Q}^{-1} \cdot \delta \hat{Q}^2 = \frac{1}{2} \hat{Q}^{-1} \cdot \hat{Q} \cdot \delta \hat{Q} + \frac{1}{2} \hat{Q}^{-1} \cdot \delta \hat{Q} \cdot \hat{Q}, \end{aligned}$$

так как $\hat{Q}^{-1} \cdot \delta \hat{Q} \cdot \hat{Q} = (\hat{Q}^{-1})^* \cdot \hat{Q}^* \cdot \delta \hat{Q}^* = \hat{E} \cdot \delta \hat{Q}^* = \delta I_1(\hat{Q})$, поскольку \hat{Q} — симметричный тензор.

В приложении к симметричному тензору $(\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{1/2}$ получаем

$$\delta f_1 = \frac{1}{2} (\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{-1/2} \cdot \delta (\hat{D} \cdot \hat{D}^*) =$$

$$= \frac{1}{2} [(\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{-1/2} \cdot \hat{D} \cdot \delta \hat{D}^* + (\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{-1/2} \cdot \delta \hat{D} \cdot \hat{D}^*]$$

и во втором слагаемом в скобках можно тензор $\delta \hat{D} \cdot \hat{D}^*$ заменить на $(\delta \hat{D} \cdot \hat{D}^*)^* = \hat{D} \cdot \delta \hat{D}^*$, поскольку тензор $(\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{-1/2}$ симметричен. Получаем

$$\delta f_1 = (\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{-1/2} \cdot \hat{D} \cdot \delta \hat{D}^*, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \hat{D}} = (\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{-1/2} \cdot \hat{D}. \quad (5.5.10)$$

Теперь, обратившись к (5.5.8), получим

$$\nabla R = \frac{\partial B}{\partial \hat{D}} = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \hat{D}} - \frac{2\nu}{1+\nu} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \hat{D}} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial \hat{D}}$$

и по (5.5.9), (5.5.10)

$$\nabla R = \frac{1}{2\mu} \left[\hat{E} + \left(2\mu - \frac{\nu}{1+\nu} f_1 \right) (\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{-1/2} \right] \cdot \hat{D}. \quad (5.5.11)$$

Вектор R в соответствии с (5.4.6) определяется интегралом

$$R = \frac{1}{2\mu} \int_{M^0}^M \left\{ dr \cdot \left[E + \left(2\mu - \frac{\nu}{1+\nu} f_1 \right) (\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{-1/2} \right] \cdot \hat{D} \right\} + R(M^0) \quad (5.5.12)$$

по любой кривой, соединяющей точки M^0 , M . Базисные векторы в деформированном объеме представляются теперь выражениями

$$R_s = \frac{1}{2\mu} r_s \cdot \left[\hat{E} + \left(2\mu - \frac{\nu}{1+\nu} f_1 \right) (\hat{D} \cdot \hat{D}^*)^{-1/2} \right] \cdot \hat{D}. \quad (5.5.13)$$

З а м е ч а н и я 1. Напряженное состояние, удовлетворяющее уравнению статики (5.3.1) в ν -объеме (при отсутствии массовых сил) можно задать, полагая

$$\hat{D} = \nabla \times \hat{\Phi}, \quad (5.5.14)$$

где $\hat{\Phi}$ — любой, дважды дифференцируемый тензор. Он должен быть выбран так, чтобы выполнялось краевое условие на ∂_2

$$n \cdot \hat{D} = F \frac{dO}{do} = P. \quad (5.5.15)$$

Принцип дополнительной работы не может быть обобщен на случай произвольного (не «мертвого») нагружения, так как задание K , F требует знания геометрии деформированного тела.

2. Применение тензора Пиола, задаваемого в векторном базисе начального состояния среды, позволило в случае «мертвого» нагружения выразить принцип стационарности дополнительной работы только через статические величины; здесь преодолена трудность исключения из формулировки принципа градиентов вектора перемещения. Изложение в пп. 5.3—5.5 основано на работе Л. М. Зубова *).

*) Л. М. З у б о в, Принцип стационарности в нелинейной теории упругости (Прикл. матем. и механика, 34, № 2, 1970).

Г Л А В А IX

ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Напряженное состояние при аффинном преобразовании

1.1. Тензор напряжений при аффинном преобразовании. В §§ 1—3 этой главы будут рассматриваться задачи нелинейной теории упругости, решение которых можно получить, не специализируя формы задания удельной потенциальной энергии от инвариантов деформации. Эта специализация, конечно, становится неизбежной для достижения числовых результатов.

Решение строится «обратным методом» и состоит из нескольких этапов: 1) задаемся формой осуществляемого преобразования v - в V -объем, 2) составляется выражение меры (или тензора) деформации, 3) записывается закон состояния, и осуществляется проверка, что определяемый им тензор напряжений удовлетворяет уравнениям статики в V -объеме, 4) определяются поверхностные силы, требующиеся для поддержания этого напряженного состояния. Получаемые при этом порядке построения решения содержательны, если распределение так найденных поверхностных сил (массовые считаются отсутствующими или наперед заданными) достаточно просто реализуемо, а также если постановка задачи допускает замену найденного распределения статически эквивалентной системой поверхностных сил.

Аффинное преобразование было определено в п. 6.1 гл. II; в принятых там обозначениях мера деформации $\hat{M} = \hat{g}^{x-1}$ задается выражением (6.1.3):

$$\hat{M} = \hat{\Lambda} \cdot \hat{\Lambda}^*, \quad (1.1.1)$$

где $\hat{\Lambda}$ — тензор, осуществляющий преобразование. Тензор напряжений, определяемый здесь законом состояния в форме Фингера (2.4.1) гл. VIII, записывается в виде

$$\hat{T} = \frac{2}{V\sqrt{I_3}} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) \hat{\Lambda} \cdot \hat{\Lambda}^* - \frac{\partial A}{\partial I_2} (\hat{\Lambda} \cdot \hat{\Lambda}^*)^2 + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \hat{E} \right]. \quad (1.1.2)$$

Здесь $\hat{E} = i_s i_s$ — единичный тензор (в декартовой системе осей), $I_k(\hat{M}) = I_k(\hat{G}^\times)$.

При обозначениях пп. 5.2, 5.3 гл. II

$$\begin{aligned} I_1 \hat{\Lambda} \cdot \hat{\Lambda}^* - (\hat{\Lambda} \cdot \hat{\Lambda}^*)^2 &= I_1 \hat{M} - \hat{M}^2 = \\ &= (G_1 + G_2 + G_3) (\overset{1}{G} \overset{1}{e} \overset{1}{e} + \overset{2}{G} \overset{2}{e} \overset{2}{e} + \overset{3}{G} \overset{3}{e} \overset{3}{e}) - (G_1^2 \overset{1}{e} \overset{1}{e} + G_2^2 \overset{2}{e} \overset{2}{e} + G_3^2 \overset{3}{e} \overset{3}{e}) = \\ &= G_1 G_2 G_3 \left[\left(\frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} \right) \overset{1}{e} \overset{1}{e} + \left(\frac{1}{G_3} + \frac{1}{G_1} \right) \overset{2}{e} \overset{2}{e} + \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \overset{3}{e} \overset{3}{e} \right] = \\ &= I_3 [I_1 (\hat{G}^\times) \hat{E} - \hat{G}^\times], \end{aligned}$$

так как $\hat{G}^\times = \hat{M}^{-1}$. Пришли к соотношению

$$I_1 (\hat{G}^\times) \hat{M} - \hat{M}^2 = I_2 (\hat{G}^\times) \hat{E} - I_3 (\hat{G}^\times) \hat{G}^\times,$$

причем выражения инвариантов даются формулами (6.1.8) гл. II, в частности,

$$\sqrt{I_3(\hat{G})} = |\lambda_{st}| = \lambda.$$

Подстановка в (1.1.2) приводит теперь к следующему (указанному Трусделлом) представлению тензора напряжений:

$$\frac{1}{2} \hat{T} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial A}{\partial I_1} \hat{M} - \lambda \frac{\partial A}{\partial I_2} \hat{M}^{-1} + \left(\frac{1}{\lambda} I_2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + \lambda \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \hat{E}. \quad (1.1.3)$$

Уравнения статики при отсутствии массовых сил, конечно, удовлетворяются, так как \hat{T} — постоянный тензор:

$$\tilde{\nabla} \cdot \hat{T} = 0.$$

Для несжимаемой среды $\lambda = 1$; тогда

$$\hat{T} = 2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} \hat{M} - \frac{\partial A}{\partial I_2} \hat{M}^{-1} \right) - p \hat{E}, \quad A = A(I_1, I_2), \quad (1.1.4)$$

где p — неизвестное всестороннее давление:

$$p = - \left[I_2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{\partial A}{\partial I_3} \Big|_{I_3=1} \right]. \quad (1.1.5)$$

Главные значения тензора \hat{M} легко выражаются через главные относительные удлинения $\delta_q = \sqrt{G_q} - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \overset{1}{e} \overset{1}{e} (1 + \delta_1)^2 + \overset{2}{e} \overset{2}{e} (1 + \delta_2)^2 + \overset{3}{e} \overset{3}{e} (1 + \delta_3)^2, \\ \hat{M}^{-1} &= \overset{1}{e} \overset{1}{e} (1 + \delta_1)^{-2} + \overset{2}{e} \overset{2}{e} (1 + \delta_2)^{-2} + \overset{3}{e} \overset{3}{e} (1 + \delta_3)^{-2}. \end{aligned}$$

Выражения инвариантов записываются в виде

$$I_1 = (1 + \delta_1)^2 + (1 + \delta_2)^2 + (1 + \delta_3)^2,$$

$$I_2 = (1 + \delta_1)^2 (1 + \delta_2)^2 + (1 + \delta_2)^2 (1 + \delta_3)^2 + (1 + \delta_3)^2 (1 + \delta_1)^2,$$

$$I_3 = \lambda^2 = [(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3)]^2.$$

Тензор напряжений соосен с \hat{M} , то есть имеет те же главные направления \hat{e} ; обозначая через t_q его главные значения:

$$\hat{T} = t_1 \hat{e} \hat{e} + t_2 \hat{e} \hat{e} + t_3 \hat{e} \hat{e},$$

имеем

$$\frac{1}{2} t_1 = (1 + \delta_1) \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} \frac{1}{(1 + \delta_2)(1 + \delta_3)} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \left(\frac{1 + \delta_2}{1 + \delta_3} + \frac{1 + \delta_3}{1 + \delta_2} \right) + \frac{\partial A}{\partial I_3} (1 + \delta_2)(1 + \delta_3) \right] \quad (1.1.6)$$

и две аналогичные формулы с круговой заменой индексов относительных удлинений δ_q . Эти формулы представляют лишь измененную запись общего соотношения (2.6.6) гл. VIII.

Для несжимаемой среды по (1.1.4)

$$(1 + \delta_1)(1 + \delta_2)(1 + \delta_3) = 1, \quad t_s = 2 \frac{\partial A}{\partial I_1} (1 + \delta_s)^2 - 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} (1 + \delta_s)^{-2} - p. \quad (1.1.7)$$

1.2. Всестороннее сжатие. Аффинное преобразование вырождается в преобразование подобия с коэффициентом подобия

$$K = 1 + \delta = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3}, \quad (\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta), \quad (1.2.1)$$

и по (1.1.6)

$$t_1 = t_2 = t_3 = 2 \left(\frac{1}{K} \frac{\partial A}{\partial I_1} + 2K \frac{\partial A}{\partial I_2} + K^3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) = \frac{p}{K} - p, \quad (1.2.2)$$

где p — всестороннее давление. Вместе с тем

$$I_1 = 3K^2, \quad I_2 = 3K^4, \quad I_3 = K^6,$$

так что

$$\frac{dA}{dK} = 6K^2 \left(\frac{1}{K} \frac{\partial A}{\partial I_1} + 2K \frac{\partial A}{\partial I_2} + K^3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right).$$

Приходим к соотношению

$$p = - \frac{1}{3K^2} \frac{dA}{dK} = f(p), \quad (1.2.3)$$

указывающему, что при всестороннем сжатии любая форма

связи давления с плотностью совместима с соотношениями нелинейной теории упругости.

1.3. Одноосное растяжение. Ось растягиваемого стержня совместим с осью X_3 ; тогда $t_1 = t_2 = 0$, $\delta_1 = \delta_2$ и по (1.1.6) имеем

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} \frac{1}{(1 + \delta_3)(1 + \delta_1)} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \left(\frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_3} + \frac{1 + \delta_3}{1 + \delta_1} \right) + \frac{\partial A}{\partial I_3} (1 + \delta_1)(1 + \delta_3) = 0, \quad (1.3.1)$$

$$\frac{1}{2} t_3 = (1 + \delta_3) \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} (1 + \delta_1)^{-2} + 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{\partial A}{\partial I_3} (1 + \delta_1)^2 \right]. \quad (1.3.2)$$

Из первого уравнения δ_1 выражается через δ_3 , после чего по второму уравнению строится диаграмма растяжения $t_3 = t_3(\delta_3)$. Но уравнение (1.3.1) может и не иметь вещественных решений; это укажет на необходимость приложения поверхностных сил на боковой поверхности ($t_1, t_2 \neq 0$) для осуществления простого растяжения ($\delta_1 = \delta_2$). Уравнение (1.3.1) может иметь и не единственное решение, так что не исключена возможность неоднозначной зависимости растягивающего усилия от относительного удлинения δ_3 .

Эти усложнения не имеют места в случае несжимаемой среды. Тогда для определения трех неизвестных t_3 , p , δ_1 имеем три уравнения: два уравнения (1.1.7)

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial A}{\partial I_1} (1 + \delta_1)^2 - 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} (1 + \delta_1)^{-2} - p &= 0, \\ t_3 &= 2 \frac{\partial A}{\partial I_1} (1 + \delta_3)^2 - 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} (1 + \delta_3)^{-2} - p \end{aligned} \right\} \quad (1.3.3)$$

и уравнение сохранения объема

$$1 + \delta_3 = (1 + \delta_1)^{-2}. \quad (1.3.4)$$

Находим

$$t_3 (1 + \delta_1)^2 = t_3^* = 2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{1}{1 + \delta_3} \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) [1 + \delta_3 - (1 + \delta_3)^{-2}], \quad (1.3.5)$$

где t_3^* — усилие, отнесенное к единице площади начального поперечного сечения растягиваемого стержня.

Для материала Муни (п. 4.9 гл. VIII) первая производная t_3^* по δ_3 остается положительной при $-1 < \delta_3 < \infty$, поскольку $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$ — растягивающая сила монотонно растет вместе с δ_3 ; ее рост замедляется при возрастании δ_3 . Но, в противоположность материалу в упрощенной теории Синьорини (п. 4.4 гл. VIII), диаграмма растяжения не имеет асимптоты — растягивающая сила, разрывающая стержень ($\delta_3 \rightarrow \infty$), растет неограниченно.

1.4. Простой сдвиг. Тензоры $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Lambda}^*$ задаются формулами (6.3.2) гл. II, так что

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \hat{\Lambda} \cdot \hat{\Lambda}^* = (\hat{E} + s i_1 i_2) \cdot (\hat{E} + s i_2 i_1) = \hat{E} + s (i_1 i_2 + i_2 i_1) + s^2 i_1 i_1, \\ \hat{M}^{-1} &= \hat{\Lambda}^{*-1} \Lambda^{-1} = (\hat{E} - s i_2 i_1) \cdot (\hat{E} - s i_1 i_2) = \hat{E} - s (i_1 i_2 + i_2 i_1) + s^2 i_2 i_2, \\ I_1 &= I_2 = 3 + s^2, \quad I_3 = \lambda^2 = 1.\end{aligned}$$

По (1.1.4) находим выражение тензора напряжений

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \hat{T} &= \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + (2 + s^2) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{\partial A}{\partial I_3} \right] \hat{E} + \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) (i_1 i_2 + i_2 i_1) s + \\ &\quad + s^2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} i_1 i_1 - \frac{\partial A}{\partial I_2} i_2 i_2 \right). \quad (1.4.1)\end{aligned}$$

Его компоненты (в осях декартовой системы $OXYZ$) равны

$$\left. \begin{aligned}\frac{1}{2} t_{11} &= \frac{\partial A}{\partial I_1} (1 + s^2) + \frac{\partial A}{\partial I_2} (2 + s^2) + \frac{\partial A}{\partial I_3}, \\ \frac{1}{2} t_{22} &= \frac{\partial A}{\partial I_1} + (1 + s^2) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{\partial A}{\partial I_3}, \\ \frac{1}{2} t_{12} &= \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) s, \quad \frac{1}{2} t_{33} = \frac{\partial A}{\partial I_1} + (2 + s^2) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{\partial A}{\partial I_3}, \\ t_{23} &= t_{31} = 0.\end{aligned} \right\} \quad (1.4.2)$$

Единичный вектор нормали N площадки $a_1 = \text{const}$ определяется по формуле (3.5.5) гл. II; в ней

$$n = i_1, \quad n \cdot \hat{G}^{\times -1} \cdot n = G^{11} = 1 + s^2, \quad \nabla R = \hat{E} + i_2 i_1 s, \quad (\nabla R)^{-1} = \hat{E} - i_2 i_1 s,$$

так что

$$N = \frac{i_1 - i_2 s}{\sqrt{1 + s^2}}$$

и нормальное напряжение на этой площадке равно

$$\sigma_N = N \cdot \hat{T} \cdot N = \frac{2}{1 + s^2} \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + (2 + s^2) \frac{\partial A}{\partial I_2} + (1 + s^2) \frac{\partial A}{\partial I_3} \right]. \quad (1.4.3)$$

Если начальное состояние является натуральным, то по (2.2.3) гл. VIII

$$(\sigma_N)_0 = 2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{\partial A}{\partial I_3} \right)_0 = 0,$$

откуда следует, что нормальное напряжение, которое должно быть распределено по граням $a_1 = \text{const}$, чтобы осуществлялась деформация простого сдвига, пропорционально s^2 .

Касательное напряжение по этим граням равно

$$\tau_{Nt} = N \cdot \hat{T} \cdot t = \frac{2s}{1 + s^2} \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \right), \quad (1.4.4)$$

где t — единичный вектор касательной линии $a_1 = \text{const}$:

$$t = \left| \frac{\partial R}{\partial a_2} \right|^{-1} \frac{\partial R}{\partial a_2} = \frac{i_2 + i_1 s}{\sqrt{1 + s^2}}.$$

В линейной теории упругости простой сдвиг создается только касательными напряжениями на гранях $a_1 = \text{const}$, $a_2 = \text{const}$. В нелинейной теории осуществление простого сдвига требует приложения нормальных напряжений на всех гранях параллелепипеда — на грани $a_3 = \text{const}$, чтобы предотвратить изменение объема (эффект, предсказанный Кельвином), а в плоскости сдвига, чтобы обеспечить сохранение размера по оси OY (это — одно из проявлений эффекта Пойнтинга). Прилагаемые нормальные напряжения пропорциональны s^2 , но их значения на различных гранях отличны друг от друга. Касательные напряжения, равные τ_{N1} и t_{12} на гранях $a_1 = \text{const}$ и соответственно $a_2 = \text{const}$, отличаются слагаемыми порядка s^3 .

З а м е ч а н и е. В линейном приближении для материала Муни (п. 4.9 гл. VIII) в соответствии с (1.4.2)

$$t_{12} = 2(C_1 + C_2)s, \quad (1.4.5)$$

а по (1.3.5)

$$t_3 = 6(C_1 + C_2)\delta_3. \quad (1.4.6)$$

Этим дается основание назвать $2(C_1 + C_2)$ модулем сдвига, $6(C_1 + C_2)$ — модулем Юнга:

$$2(C_1 + C_2) = \mu, \quad 6(C_1 + C_2) = E. \quad (1.4.7)$$

«Коэффициент Пуассона» оказывается равным $1/2$:

$$\frac{E}{\mu} = 2(1 + \nu) = 3, \quad \nu = 1/2,$$

чего следовало ожидать, поскольку материал несжимаем.

Ривлин, сохранив в формуле Муни лишь первое слагаемое ($C_2 = 0$), ввел в рассмотрение «неогуково» тело. Уравнения состояния этого тела по (1.4.7), (1.1.7) представляются равенствами (в главных осях)

$$t_s = 2C_1(1 + \delta_3)^2 - p = \frac{1}{3}E(1 + \delta_s)^2 - p. \quad (1.4.8)$$

Варга, принимая упрощенный вариант этих соотношений

$$t_s = \frac{2}{3}E\delta_s - p^*, \quad (1.4.9)$$

указывает на приемлемое совпадение получаемых по ним расчетных формул с результатами некоторых измерений на образцах из резины.

§ 2. Упругий слой

2.1. Цилиндрический изгиб прямоугольной плиты. Эта деформация плиты из несжимаемого материала была описана в п. 6.5 гл. II. Компоненты мер деформации \hat{G} , $\hat{G}^{\times-1}$ и главные инварианты $I_k(\hat{G})$ по (6.5.5), (6.5.6) гл. II задаются формулами

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \frac{b^2}{\alpha^2 e^2} C^{-2}(a), & G_{22} &= \frac{\alpha^2}{b^2} C^2(a), & G_{33} &= e^2, & G_{sk} &= 0 \quad (s \neq k), \\ G^{11} &= \frac{\alpha^2 e^2}{b^2} C^2(a), & G^{22} &= \frac{b^2}{\alpha^2} C^{-2}(a), & G^{33} &= \frac{1}{e^2}, & G^{sk} &= 0 \quad (s \neq k), \\ I_1 &= \frac{b^2}{\alpha^2 e^2} C^{-2}(a) + \frac{\alpha^2}{b^2} C^2(a) + e^2, & I_2 &= C^2 \frac{\alpha^2 e^2}{b^2} + \frac{b^2}{\alpha^2} C^{-2} + \frac{1}{e^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

причем материальными координатами служат декартовы координаты $a_1 = a$, a_2 , a_3 v -объема (начального состояния).

Компоненты в осях декартовой ортогональной системы энергетического тензора напряжений в соответствии с (2.1.5), (2.1.16) гл. VIII даются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} t^{11} &= \frac{\partial A}{\partial I_1} + e^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + C^2(a) \frac{\alpha^2}{b^2} \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + e^2 c^{-1} \right), \\ \frac{1}{2} t^{22} &= \frac{\partial A}{\partial I_1} + e^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{b^2}{\alpha^2 e^2} C^{-2}(a) \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + e^2 c^{-1} \right), \\ \frac{1}{2} t^{33} &= \frac{\partial A}{\partial I_1} + \left(\frac{b^2}{\alpha^2 e^2} C^{-2}(a) + \frac{\alpha^2}{b^2} C^2 \right) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{c^{-1}}{e^2}, & t^{sk} &= 0 \quad (s \neq k). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

Удельную потенциальную энергию деформации $A(I_1, I_2)$ можно рассматривать здесь как функцию от $C(a)$:

$$\frac{\partial A}{\partial C} = \frac{\partial A}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C},$$

причем

$$\frac{\partial I_1}{\partial C} = 2C \left(\frac{\alpha^2}{b^2} - \frac{b^2}{\alpha^2 e^2} C^{-4} \right) = \frac{1}{e^2} \frac{\partial I_2}{\partial C}. \quad (2.1.3)$$

Поэтому

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} + e^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} = \frac{\partial A}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial I_1}.$$

и теперь исключение из первых двух уравнений (2.1.2) слагаемого, содержащего неизвестную c , приводит к равенству

$$\frac{1}{2} t^{11} \frac{b^2}{a^2 e^2} C^{-2} - \frac{1}{2} t^{22} C^2 \frac{a^2}{b^2} = \\ = \frac{\partial A}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial I_1} \left(\frac{b^2}{a^2 e^2} C^{-2} - C^2 \frac{a^2}{b^2} \right) = -\frac{1}{2} C \frac{\partial A}{\partial C}. \quad (2.1.4)$$

Здесь использована также формула (2.1.3). Еще одно соотношение связи между t^{11} , t^{22} дается уравнениями статики. Имея в виду, что здесь по (6.5.1) гл. II

$$\sqrt{G} = 1, \quad R_1 = \frac{\partial x_1}{\partial a_1} i_1 + \frac{\partial x_2}{\partial a_1} i_2 + \frac{\partial x_3}{\partial a_1} i_3 = \\ = C'(a) \left(i_1 \cos \frac{a a_2}{b} + i_2 \sin \frac{a a_2}{b} \right) = C'(a) e_r, \\ R_2 = \frac{\partial x_1}{\partial a_2} i_1 + \frac{\partial x_2}{\partial a_2} i_2 + \frac{\partial x_3}{\partial a_2} i_3 = \\ = C(a) \frac{a}{b} \left(-i_1 \sin \frac{a a_2}{b} + i_2 \cos \frac{a a_2}{b} \right) = C(a) \frac{a}{b} e_\theta, \\ R_3 = e i_3,$$

записываем векторное уравнение статики в виде

$$\frac{\partial}{\partial a_1} t^{11} C'(a) e_r + \frac{\partial}{\partial a_2} t^{22} C(a) \frac{a}{b} e_\theta + \frac{\partial}{\partial a_3} t^{33} e i_3 = 0$$

или

$$e_r \left[\frac{\partial}{\partial a} t^{11} C'(a) - \frac{a^2}{b^2} t^{22} C(a) \right] + \frac{a}{b} e_\theta C(a) \frac{\partial t^{22}}{\partial a_2} + e i_3 \frac{\partial t^{33}}{\partial a_3} = 0.$$

Существенно только первое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial a} t^{11} C'(a) - \frac{a^2}{b^2} t^{22} C(a) = 0, \quad (2.1.5)$$

так как два других удовлетворяются тождественно, поскольку напряжения по (2.1.2) зависят лишь от переменной $a_1 = a$.

Из (2.1.4) и (2.1.5) после исключения t^{22} приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial a} t^{11} C'(a) - \frac{b^2}{a^2 e^2} C^{-3} t^{11} = \frac{\partial A}{\partial C}. \quad (2.1.6)$$

Вспоминая теперь, что по (6.5.6) гл. II

$$C' C = \frac{b}{a e}, \quad C'^2 + C C'' = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a} = C' \frac{\partial}{\partial C}, \quad (2.1.7)$$

и переходя к независимой переменной C , приходим к дифференциальному уравнению

$$C \frac{\partial t^{11}}{\partial C} - 2 t^{11} = C^3 \frac{\partial A}{\partial C} \frac{a^2 e^2}{b^2}. \quad (2.1.8)$$

Его легко находимое общее решение имеет вид

$$t^{11} = \frac{e^2 \alpha^2}{b^2} C^2 (A + D), \quad (2.1.9)$$

где D — постоянная интегрирования. Теперь по (2.1.5), (2.1.2) легко определяются остающиеся контравариантные компоненты тензора напряжений \hat{T} в векторном базисе R_1, R_2, R_3 :

$$\left. \begin{aligned} t^{22} &= \frac{b^2}{\alpha^2 C^2} \left(A + D + C \frac{\partial A}{\partial C} \right) = \frac{b^2}{\alpha^2 C^2} \frac{d}{dC} C (A + D), \\ t^{33} &= \frac{1}{e^2} (A + D) + 2 \left(1 - \frac{b^2}{\alpha^2 e^4 C^2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial l_1} + \frac{\alpha^2}{b^2} C^2 \frac{\partial A}{\partial l_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.10)$$

Сославшись на приведенные выше выражения базисных векторов, а также на соотношения (2.1.7), получаем

$$\begin{aligned} \hat{T} &= t^{11} R_1 R_1 + t^{22} R_2 R_2 + t^{33} R_3 R_3 = \\ &= e_r e_r (A + D) + e_\theta e_\theta \frac{d}{dC} C (A + D) + e^2 i_3 i_3 t^{33}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Здесь e_r, e_θ — единичные векторы нормалей к цилиндрическим поверхностям $a = \text{const}$ и к меридиональным сечениям $a_2 = \text{const}$.

Через I_k^0, I_k^1 назовем значения инвариантов на цилиндрических поверхностях радиусов: r_0, r_1 , ограничивающих тело в деформированном состоянии. По (6.5.3) гл. II

$$r_0 = C(a^0), \quad r_1 = C(a^0 + h),$$

и по (2.1.1) имеем

$$\begin{aligned} I_1^0 - I_1^1 &= (r_0^2 - r_1^2) \left(\frac{\alpha^2}{b^2} - \frac{b^2}{\alpha^2 e^2 r_0^2 r_1^2} \right), \\ I_2^0 - I_2^1 &= (r_0^2 - r_1^2) e^2 \left(\frac{\alpha^2}{b^2} - \frac{b^2}{\alpha^2 e^2 r_0^2 r_1^2} \right), \end{aligned}$$

так что при $r_0 r_1 = b^2 / \alpha^2 e^2$

$$I_1^0 = I_1^1, \quad I_2^0 = I_2^1, \quad A(I_1^0, I_2^0) = A(I_1^1, I_2^1). \quad (2.1.12)$$

Эти соотношения позволяют подчинить выбор одной лишь постоянной D условиям отсутствия нагружения на обеих поверхностях $r = r_0, r = r_1$:

$$(e_r \cdot \hat{T} \cdot e_r)_{r=r_0} = A(I_1^0, I_2^0) + D = 0, \quad (e_r \cdot \hat{T} \cdot e_r)_{r=r_1} = A(I_1^1, I_2^1) + D = 0. \quad (2.1.13)$$

Приходим к следующим выражениям физических компонент тензора напряжений (в цилиндрической системе координат r, θ, z):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A(I_1, I_2) - A(I_1^0, I_2^0), \\ \sigma_\theta &= \frac{d}{dr} r A(I_1, I_2) - A(I_1^0, I_2^0), \\ \sigma_z &= A(I_1, I_2) - A(I_1^0, I_2^0) + 2 \left(e^2 - \frac{r_0 r_1}{e r^2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{\alpha^2 r^2}{b^2} \frac{\partial A}{\partial I_2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.14)$$

где обозначение $C(a)$ заменено на r , причем напомним, что по (6.5.8) гл. II

$$r = C(a) = \sqrt{(r_1^2 - r_0^2) \frac{a - a^0}{h} + r_0^2}. \quad (2.1.15)$$

Главный вектор сил в любом меридиональном сечении ($\theta = \alpha a_2 = \text{const}$) цилиндра, отнесенный к единице длины, в осевом направлении оказывается, в согласии с (2.1.13), равным нулю:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_0} \left[\frac{d}{dr} r A(I_1, I_2) - A(I_1^0, I_2^0) \right] dr = \\ = r_0 A(I_1^0, I_2^0) - r_1 A(I_1^0, I_2^0) - (r_0 - r_1) A(I_1^0, I_2^0) = 0, \end{aligned}$$

что можно было предвидеть из соображений симметрии. Их главный момент относительно оси цилиндра определяется равенством

$$\begin{aligned} M &= \int_{r_1}^{r_0} \left[\frac{d}{dr} r A(I_1, I_2) - A(I_1^0, I_2^0) \right] r dr = \\ &= \frac{1}{2} (r_0^2 - r_1^2) A(I_1^0, I_2^0) - \int_{r_0}^{r_1} r A(I_1, I_2) dr. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Дальнейшее вычисление требует задания зависимости удельной потенциальной энергии деформации от инвариантов в явном виде.

2.2. Сжатие и растяжение упругой полосы*). Рассматривается упругий слой из несжимаемого материала, в начальном состоянии заполняющий область $|a_1| < l$, $|a_2| < h$ плоскости XOY и неограниченно простирающийся по оси Z . По граням

*) W. W. Klingbeil and R. T. Shield, Large-Deformation Analysis of Bonded Elastic Mounts, Zeitsch. für angew. Math. und Physik 17, 2 (1966), 281—305.

$a_2 = \pm h$ слой спаян с абсолютно твердыми плитами, тогда как торцевые поверхности $a_1 = \pm l$ свободны от нагружения. Плитам сообщаются направленные в противоположные стороны, параллельные оси OY одинаковые перемещения, причем толщина слоя $2h$ становится равной $2H$, так что $H > h$ при растяжении слоя, а при сжатии $H < h$ (рис. 46).

Декартовы координаты a_1, a_2, a_3 точки слоя в начальном состоянии вводятся в качестве материальных координат. Искомые величинами являются ее декартовы координаты x_1, x_2 в деформированном состоянии (V -объеме); при этом предполагается, что x_2 не зависит от a_1 — материальные плоскости $a_2 = \text{const}$ остаются параллельными плоскостями в V -объеме:

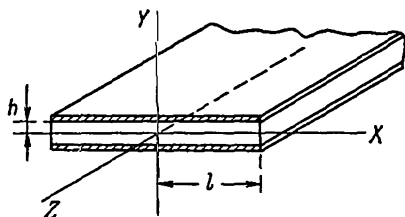


Рис. 46.

$$x_1 = x_1(a_1, a_2),$$

$$x_2 = x_2(a_2), \quad x_3 = a_3. \quad (2.2.1)$$

Эти функции подчинены геометрическим краевым условиям

$$x_1(a_1, \pm h) = a_1, \quad x_2(\pm h) = \pm H \quad (2.2.2)$$

и требованию статической эквивалентности нулю системы напряжений на поверхностях $a_1 = \pm l$.

Вследствие несжимаемости материала

$$\sqrt{G} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial a_1} \frac{\partial x_2}{\partial a_2} = 1, \quad (2.2.3)$$

так что x_1 только линейно зависит от a_1 и вместо (2.2.1) можно принять

$$x_1 = a_1 f(a_2) + k(a_2), \quad x_2 = g(a_2), \quad x_3 = a_3,$$

причем

$$g'(a_2) f(a_2) = 1. \quad (2.2.4)$$

Из постановки задачи следуют еще свойства симметрии искомых функций: x_1 нечетна по a_1 и четна по a_2 , x_2 нечетна по a_2 . Поэтому $k(a_2) = 0$, так что рассматриваемая деформация определяется двумя функциями $f(a_2), g(a_2)$:

$$x_1 = a_1 f(a_2), \quad x_2 = g(a_2), \quad x_3 = a_3, \quad (2.2.5)$$

связанными условием (2.2.4).

Координатный базис V -объема задается векторами

$$\mathbf{R}_1 = i_1 f(a_2), \quad \mathbf{R}_2 = i_1 a_1 f'(a_2) + i_2 g'(a_2), \quad \mathbf{R}_3 = i_3, \quad (2.2.6)$$

и вычисляемые по нему ко- и контравариантные компоненты метрического тензора \hat{G} оказываются равными

$$\left\| \begin{array}{lll} G_{11} = f^2 & G_{12} = a_1 f f' & G_{13} = 0 \\ & G_{22} = a_1^2 f'^2 + g'^2 & G_{23} = 0 \\ & & G_{33} = 1 \end{array} \right\|, \quad (2.2.7)$$

$$\left\| \begin{array}{lll} G^{11} = a_1^2 f'^2 + g'^2 & G^{12} = -a_1 f f' & G^{13} = 0 \\ & G^{22} = f^2 & G^{23} = 0 \\ & & G^{33} = 1 \end{array} \right\|, \quad (2.2.8)$$

и равные друг другу главные инварианты будут

$$I_1 = I_2 = 1 + f^2 + a_1^2 f'^2 + g'^2 = 1 + f^2 + f'^{-2} + a_1^2 f'^2. \quad (2.2.9)$$

Удельная потенциальная энергия предполагается заданной в форме Муни (4.9.2) гл. VIII, и контравариантные компоненты $\hat{\tau}^{st}$ тензора напряжений по (2.1.5), (2.1.4) гл. VIII будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\tau}^{11} &= C_1 + C_2 + (C_2 + c)^{-1} (a_1^2 f'^2 + f'^{-2}), \\ \frac{1}{2} \hat{\tau}^{22} &= C_1 + C_2 + (C_2 + c)^{-1} f^2, \\ \frac{1}{2} \hat{\tau}^{33} &= (C_1 + I_1 C_2) - C_2 + c^{-1}, \\ \frac{1}{2} \hat{\tau}^{12} &= \frac{1}{2} \hat{\tau}^{21} = - (C_2 + c)^{-1} a_1 f f', \quad \hat{\tau}^{23} = \hat{\tau}^{31} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.10)$$

Его физические компоненты определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \hat{\mathbf{i}}_1 \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_1 = \hat{\tau}^{11} f^2 + \hat{\tau}^{22} a_1 f'^2 + 2 \hat{\tau}^{12} a_1 f f', \\ \sigma_y &= \hat{\mathbf{i}}_2 \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_2 = \hat{\tau}^{22} g'^2, \\ \tau_{xy} &= \hat{\mathbf{i}}_1 \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_2 = \hat{\tau}^{22} a_1 f' g' + \hat{\tau}^{12} f g', \\ \sigma_z &= \hat{\tau}^{33}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.11)$$

2.3. Уравнения статики. Векторное уравнение статики представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial a_1} (\hat{\tau}^{11} \mathbf{R}_1 + \hat{\tau}^{12} \mathbf{R}_2) + \frac{\partial}{\partial a_2} (\hat{\tau}^{12} \mathbf{R}_1 + \hat{\tau}^{22} \mathbf{R}_2) = 0. \quad (2.3.1)$$

Сославшись на (2.2.6), приходим к двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} (\hat{\tau}^{11} f + \hat{\tau}^{12} a_1 f') + \frac{\partial}{\partial a_2} (\hat{\tau}^{21} f + \hat{\tau}^{22} a_1 f') &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \hat{\tau}^{12} g' + \frac{\partial}{\partial a_2} \hat{\tau}^{22} g' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

приводимым с помощью соотношения несжимаемости (2.2.4) к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}^{11}}{\partial a_1} + \frac{\partial \bar{f}^{12}}{\partial a_2} + 2 \frac{f'}{f} \bar{f}^{12} + a_1 \frac{f'^2 + f f''}{f^2} \bar{f}^{22} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{f}^{12}}{\partial a_1} + \frac{\partial \bar{f}^{22}}{\partial a_2} - \frac{f'}{f} \bar{f}^{22} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

Подставив сюда значения компонент напряжения (2.2.10) и используя формулы (2.2.7) — (2.2.9), после несложного вычисления приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial a_1} \left(a_1^2 f'^2 + \frac{1}{f^2} \right) - \frac{\partial c}{\partial a_2} a_1 f f' &= - \frac{f'^2 + f f''}{f^2} a_1 (C_1 + C_2), \\ - \frac{\partial c}{\partial a_1} a_1 f' + f \frac{\partial c}{\partial a_2} &= \frac{f'}{f^2} (C_1 + C_2). \end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

Из нее имеем

$$\frac{\partial c}{\partial a_1} = - (C_1 + C_2) a_1 f f'', \quad \frac{\partial c}{\partial a_2} = - (C_1 + C_2) \left(a_1^2 f' f'' - \frac{f'}{f^3} \right), \quad (2.3.5)$$

и условие совместности

$$\frac{\partial^2 c}{\partial a_2 \partial a_1} = \frac{\partial^2 c}{\partial a_1 \partial a_2}, \quad a_1 \{ f' f'' + f f''' \} = 2 a_1 f' f''$$

приводит к дифференциальному уравнению для неизвестной функции f :

$$f f''' = f' f'', \quad \frac{f'''}{f''} = \frac{f'}{f}, \quad (\ln f'')' = (\ln f)', \quad \frac{f''}{f} = c, \quad (2.3.6)$$

где c — постоянная.

Функция c легко определяемая по (2.3.5) с учетом условия интегрируемости (2.3.6), представляется в виде

$$\begin{aligned} c &= - \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left(a_1^2 f f'' + \frac{1}{f^2} \right) + c_0 - C_2 = \\ &= - \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left(a_1^2 c f^2 + \frac{1}{f^2} \right) + c_0 - C_2, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

причем через $c_0 - C_2$ обозначена постоянная интегрирования.

Тензор напряжений теперь определяется формулами (2.2.10) с точностью до аддитивной постоянной; последнюю находим по условию обращения в нуль главного вектора \mathbf{P} сил на поверхности $a_1 = l$ деформированного тела; их главный момент обращается в нуль вследствие симметрии этой поверхности относительно плоскости $a_2 = 0$.

Сославшись на формулу (3.2.3) гл. I и учитывая, что нормаль \mathbf{n} сонаправлена с \mathbf{i}_1 , имеем

$$\mathbf{P} = \int_{-h}^h (\tilde{t}^{11} \mathbf{R}_1 + \tilde{t}^{12} \mathbf{R}_2) \Big|_{a_1=l} da_2 = \mathbf{i}_1 \int_{-h}^h (\tilde{t}^{11} f + \tilde{t}^{12} l f') da_2 = 0, \quad (2.3.8)$$

причем слагаемое, направленное по \mathbf{i}_2 , вследствие симметрии отпадает:

$$\int_{-h}^h \tilde{t}^{12} \frac{da_2}{f} = 2 \int_{-h}^h \left[-c_0^{-1} + \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \left(l^2 c f^2 + \frac{1}{f^3} \right) \right] l f' da_2 = 0,$$

так как функция $f(a_2)$ четна.

Уравнение (2.3.8) после подстановки в него значений компонент напряжения и при использовании соотношений (2.2.4), (2.2.2) дает

$$c_0^{-1} = \frac{C_1 + C_2}{2H} \left[(l^2 c - 2) \int_0^h f da_2 + \int_0^h \frac{da_2}{f^3} \right]. \quad (2.3.9)$$

Силы \mathbf{Q} , сообщаемые спаянным с упругим телом плитам перемещения, рассчитываемые на единицу длины по оси Z , определяются по (3.2.3) гл. I равенством

$$\mathbf{Q} = \int_{-l}^l (\tilde{t}^{21} \mathbf{R}_1 + \tilde{t}^{22} \mathbf{R}_2) da_1 = \mathbf{i}_2 \int_{-l}^l \tilde{t}^{22} g'(h) da_1 = \mathbf{i}_2 \int_{-l}^l \tilde{t}^{22} da_1,$$

так как слагаемые, направленные по \mathbf{i}_1 , отпадают вследствие их нечетности по a_1 и $g'(h) = [f(h)]^{-1} = 1$. Заменив \tilde{t}^{22} его выражением, получим

$$\mathbf{Q} = 2\mathbf{i}_2 l \left\{ 2c_0^{-1} \left(1 + \frac{1}{3} l^2 f'^2(h) \right) + (C_1 + C_2) \left[1 - \frac{1}{3} l^2 (c + f'^2(h)) - \frac{1}{5} l^4 c f'^2(h) \right] \right\}. \quad (2.3.10)$$

В точке $a_1 = l$, $a_2 = 0$ по (2.2.5) и вследствие четности функции $f(a_2)$

$$x_1(l, 0) = l f(0), \quad \frac{\partial x_1(l, a_2)}{\partial a_2} \Big|_{a_2=0} = l f'(0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x_1(l, a_2)}{\partial a_2^2} \Big|_{a_2=0} = l f''(0) = c l f(0)$$

и $x_1(l, a_2)$ имеет при $a_2 = 0$ минимум при $c > 0$, максимум при $c < 0$; в первом случае материал в окрестности этой точки

«втягивается» внутрь слоя, во втором — «выпучивается» наружу. Поэтому $c > 0$ соответствует растяжению, $c < 0$ — сжатию слоя.

2.4. Сжатие слоя. Полагая $c = -\alpha^2$ в (2.3.6) и учитывая (2.2.2), имеем

$$f(a_2) = \frac{\cos \alpha a_2}{\cos \alpha h}, \quad x_1 = a_1 \frac{\cos \alpha a_2}{\cos \alpha h}. \quad (2.4.1)$$

По (2.2.4) и вследствие нечетности функции $g(a_2)$ получаем

$$g(a_2) = \frac{\cos \alpha h}{\alpha} \Lambda(\alpha a_2). \quad (2.4.2)$$

Здесь $\Lambda(x)$ обозначает известную лямбда-функцию:

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \int_0^x \frac{dx}{\cos x}. \quad (2.4.3)$$

Постоянная α определяется теперь по краевому условию (2.2.2):

$$\frac{H}{h} = \frac{\cos \alpha h}{\alpha h} \Lambda(\alpha h). \quad (2.4.4)$$

2.5. Растяжение слоя. Решения, аналогичные полученным в п. 2.4, выражаются теперь через гиперболические функции. Полагая $c = \alpha^2$, имеем

$$f(a_2) = \frac{\operatorname{ch} \alpha a_2}{\operatorname{ch} \alpha h}, \quad x_1 = a_1 \frac{\operatorname{ch} \alpha a_2}{\operatorname{ch} \alpha h}. \quad (2.5.1)$$

Функция $g(a_2)$ представляется в виде

$$g(a_2) = \frac{\operatorname{ch} \alpha h}{\alpha} \Lambda^*(\alpha a_2), \quad \Lambda^*(x) = \operatorname{arctgsh} x, \quad (2.5.2)$$

причем для определения постоянной α служит уравнение

$$\frac{H}{h} = \frac{\operatorname{ch} \alpha h}{\alpha h} \Lambda^*(\alpha h). \quad (2.5.3)$$

Расчетные формулы для напряжений, получаемые из соотношений п. 2.3, не приводятся здесь вследствие их громоздкости*).

На рис. 47 приведены изображения деформированных полос для случаев растяжения и сжатия для значений отношения нагруженной площади к ненагруженной

$$S = \frac{l}{2h}$$

и для относительных удлинений (сжатий)

$$e = \frac{H - h}{h} = 0,25 \text{ (} -0,25 \text{)}.$$

*) См. упомянутую в сноске на стр. 695 статью Кулингбейля и Шилда,

Одна из кривых нагружения, рассчитанных по приведенным формулам (для того же значения S), приведена на рис. 48.

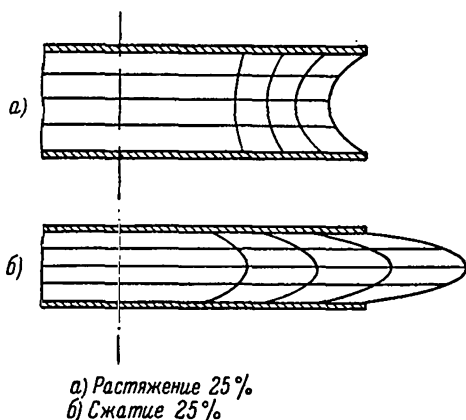


Рис. 47.

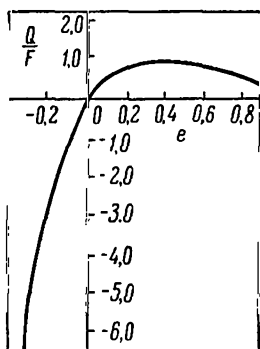


Рис. 48.

Видно, что при относительном удлинении $e > 40\%$ величина силы уменьшается с ростом e ; это может быть объяснено уменьшением площади поперечного сечения вследствие втягивания материала внутри слоя *).

§ 3. Упругий цилиндр, упругая сфера

3.1. Цилиндрическая труба под давлением (задача Ляме для нелинейно-упругого несжимаемого материала). В качестве материальных координат $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = z$ рассматриваются цилиндрические координаты точки начального объема (v -объема). Деформация предполагается происходящей с сохранением осевой симметрии; поэтому положение в V -объеме точки $M(r, \theta, z)$, остающейся в той же меридиональной плоскости, может быть задано в той же цилиндрической системе величинами

$$R = R(r), \quad \theta = \theta, \quad z' = \alpha z, \quad (3.1.1)$$

причем $\alpha = \text{const}$.

Вектор-радиусы начального и конечного положения точки M и базисные векторы в v - и V -объемах представляются в виде

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_2 = r\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{i}_3, \quad (3.1.2)$$

$$\mathbf{R} = R(r)\mathbf{e}_r + \alpha z\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{R}_1 = R'(r)\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{R}_2 = R\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{R}_3 = \alpha\mathbf{i}_3. \quad (3.1.3)$$

*) Рис. 47 и 48 взяты из упомянутой статьи, содержащей большое число расчетных результатов, сопоставляемых с экспериментальными данными других авторов.

Только диагональные компоненты метрических тензоров \hat{g} и \hat{G} отличны от нуля; в v -объеме

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{22} &= r^2, & g_{33} &= 1 & (g = r^2), \\ g^{11} &= 1, & g^{22} &= \frac{1}{r^2}, & g^{33} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4)$$

и в V -объеме

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= R'^2, & G_{22} &= R^2, & G_{33} &= \alpha^2 & (G = R'^2 R^2 \alpha^2), \\ G^{11} &= \frac{1}{R'^2}, & G^{22} &= \frac{1}{R^2}, & G^{33} &= \frac{1}{\alpha^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.5)$$

По условию несжимаемости материала

$$I_3 = \frac{G}{g} = 1, \quad R' R \alpha = r. \quad (3.1.6)$$

Через r_0 , r_1 назовем внутренний и наружный радиусы цилиндра в начальном состоянии; R_0 , R_1 — значения величин r_0 , r_1 в деформированном цилиндре, так что

$$\alpha(R^2 - R_0^2) = r^2 - r_0^2, \quad \alpha(R_1^2 - R^2) = r_1^2 - r^2. \quad (3.1.7)$$

Поскольку $r_0 \leq r \leq r_1$, то $R_0 \leq R \leq R_1$ при $\alpha > 0$ и R_0 , R_1 — внутренний и наружный радиусы деформированного цилиндра. При $\alpha < 0$, $R_1 \leq R \leq R_0$, так что в деформированном цилиндре R_1 становится внутренним, R_0 — наружным радиусом; цилиндр «вывернут наизнанку».

Теперь выражения ковариантных и контравариантных компонент метрического тензора \hat{G} представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \frac{r^2}{\alpha^2 R^2}, & G_{22} &= R^2, & G_{33} &= \alpha^2, \\ G^{11} &= \frac{\alpha^2 R^2}{r^2}, & G^{22} &= \frac{1}{R^2}, & G^{33} &= \frac{1}{\alpha^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

а главными инвариантами меры деформации Коши \hat{G}^\times будут

$$I_1 = \frac{r^2}{\alpha^2 R^2} + \frac{R^2}{r^2} + \alpha^2, \quad I_2 = \frac{\alpha^2 R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{\alpha^2}, \quad I_3 = 1. \quad (3.1.9)$$

Из этих равенств и из (3.1.6) следует соотношение

$$\frac{dI_1}{dr} = \alpha^{-2} \frac{\partial I_2}{\partial r} = \frac{2}{r} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha R^2} \right) \left(\frac{r^2}{\alpha^2 R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (3.1.10)$$

3.2. Напряжения. По (2.1.5) гл. VIII приходим к следующим выражениям отличных от нуля контравариантных компонент тензора напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{t}^{11} &= c - c \frac{r^2}{a^2 R^2} + c^{-1} \frac{a^2 R^2}{r^2}, \\ \frac{1}{2} \tilde{t}^{22} &= \frac{c}{r^2} - c \frac{R^2}{r^4} + c^{-1} \frac{1}{R^2}, \\ \frac{1}{2} \tilde{t}^{33} &= c - c \alpha^2 + \frac{c}{a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

Исключив из двух первых неизвестную (для несжимаемого материала) величину c , придем к соотношению, связывающему \tilde{t}^{11} , \tilde{t}^{22} :

$$\frac{1}{2} \left(\tilde{t}^{11} \frac{r^2}{a^2 R^2} - \tilde{t}^{22} R^2 \right) = \left(\frac{r^2}{a^2 R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) \left[c - c^{-1} \left(\frac{r^2}{a^2 R^2} + \frac{R^2}{r^2} \right) \right]. \quad (3.2.2)$$

Его правая часть по (2.1.7) гл. VIII и по (3.1.9) преобразуется к виду

$$\left(\frac{r^2}{a^2 R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \alpha^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right).$$

Вместе с тем по (3.1.10)

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= \frac{\partial A}{\partial I_1} \frac{dI_1}{dr} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \frac{dI_2}{dr} = \frac{dI_1}{dr} \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \alpha^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) = \\ &= \frac{2}{r} \left(1 - \frac{r^2}{a^2 R^2} \right) \left(\frac{r^2}{a^2 R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \alpha^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

и соотношение (3.2.2) оказывается возможным записать в виде

$$\tilde{t}^{11} \frac{r^2}{a^2 R^2} - \tilde{t}^{22} R^2 = \frac{\alpha r R^2}{a R_0^2 - r_0^2} \frac{dA}{dr}. \quad (3.2.4)$$

Исключив c из первого и третьего уравнений (3.2.1), получим

$$\tilde{t}^{33} = \tilde{t}^{11} \frac{r^2}{a^4 R^2} + 2 \left(1 - \frac{r^2}{a^4 R^2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial A}{\partial I_2} \right). \quad (3.2.5)$$

Обратимся теперь к уравнениям статики. Их запись в векторном виде, если учесть (3.1.6), (3.1.3), при отсутствии массовых сил дается равенством

$$\frac{\partial}{\partial q^s} r \tilde{t}^{st} \mathbf{R}_t = \frac{\partial}{\partial r} \tilde{t}^{11} \frac{r^2}{a R} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial \theta} r R \tilde{t}^{22} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} r a \tilde{t}^{33} \mathbf{i}_3 = 0. \quad (3.2.6)$$

Здесь только \mathbf{e}_θ зависит от θ , причем

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r,$$

а остальные величины зависят только от r . Приходим к двум уравнениям:

$$\frac{d}{dr} \frac{r^2}{\alpha R} \tilde{t}^{11} - rR \tilde{t}^{22} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{t}^{33}}{\partial z} = 0, \quad (3.2.7)$$

причем второе удовлетворяется тождественно.

Перейдем от контравариантных к физическим компонентам тензора напряжения; имеем

$$\hat{T} = \tilde{t}^{11} R_1 R_1 + \tilde{t}^{22} R_2 R_2 + \tilde{t}^{33} R_3 R_3 = \tilde{t}^{11} R^2 \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \tilde{t}^{22} R^2 \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \tilde{t}^{33} \alpha^2 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$$

и поэтому

$$\sigma_r = R^2 \tilde{t}^{11} = \frac{r^2}{\alpha^2 R^2} \tilde{t}^{11}, \quad \sigma_\theta = R^2 \tilde{t}^{22}, \quad \sigma_z = \alpha^2 \tilde{t}^{33}. \quad (3.2.8)$$

Это позволяет представить уравнения (3.2.4), (3.2.5), (3.2.7) в виде

$$\sigma_\theta = \sigma_r - \frac{\alpha r R^2}{\alpha R_0^2 - r_0^2} \frac{dA}{dr}, \quad (3.2.9)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + 2 \left(\alpha^2 - \frac{r^2}{\alpha^2 R^2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial l_1} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial A}{\partial l_2} \right), \quad (3.2.10)$$

$$\frac{d}{dr} \alpha R \sigma_r - \frac{r}{R} \sigma_\theta = 0. \quad (3.2.11)$$

После исключения σ_θ из (3.2.9), (3.2.11) приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dr} \alpha R \sigma_r - \frac{r}{R} \sigma_r = - \frac{\alpha r^2 R}{\alpha R_0^2 - r_0^2} \frac{dA}{dr}, \quad (3.2.12)$$

которое легко преобразуется при переходе к независимой переменной R ; имея в виду, что

$$\alpha R dR = r dr,$$

получим

$$\frac{d\sigma_r}{dR} = - \frac{r^2}{\alpha R_0^2 - r_0^2} \frac{dA}{dR},$$

так что

$$\sigma_r = - \frac{1}{\alpha R_0^2 - r_0^2} \left(\int_{R_0}^R r^2 \frac{dA}{dR} dR + C \right) = - \frac{1}{\alpha R_0^2 - r_0^2} \left(\int_{r_0}^r r^2 \frac{dA}{dr} dr + C \right). \quad (3.2.13)$$

3.3. Определение постоянных. Кроме постоянной интегрирования C неизвестными являются величины, определяющие геометрические размеры деформированного цилиндра, — постоянные α , R_0 , R_1 , связанные соотношением (3.1.7):

$$\alpha (R_1^2 - R_0^2) = r_1^2 - r_0^2. \quad (3.3.1)$$

Для определения C , α , R_0 служат задания давлений q_0 , q_1 на поверхностях $r = r_0$, $r = r_1$ (в V -объеме) и осевой силы на торцах. Первые два условия записываются в виде

$$(\sigma_r)_{r=r_0} = -q_0, \quad (\sigma_r)_{r=r_1} = -q_1, \quad (3.3.2)$$

так что по (3.2.13)

$$C = q_0 (\alpha R_0^2 - r_0^2), \quad (3.3.3)$$

$$(q_0 - q_1)(\alpha R_0^2 - r_0^2) = - \int_{r_0}^{r_1} r^2 \frac{dA}{dr} dr. \quad (3.3.4)$$

Выражения физических компонент напряжения по (3.2.13), (3.2.3), (3.2.9), (3.2.10) теперь представляются в виде

$$\sigma_r = -q_0 + \frac{q_0 - q_1}{\int_{r_0}^{r_1} r^2 \frac{dA}{dr} dr} \int_{r_0}^r r^2 \frac{dA}{dr} dr, \quad (3.3.5)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r - 2 \left(\frac{\partial A}{\partial l_1} + \alpha^2 \frac{\partial A}{\partial l_2} \right) \left(\frac{r^2}{\alpha^2 R^2} - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad (3.3.6)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + 2 \left(\alpha^2 - \frac{r^2}{\alpha^2 R^2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial l_1} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial A}{\partial l_2} \right). \quad (3.3.7)$$

Сила, действующая на площадку dO поперечного сечения цилиндра, определяемая формулой (3.2.3) гл. I (при $n = i_3$), равна

$$t dO = t^{33} R_3 r dr d\theta = \frac{1}{\alpha} \sigma_z r dr d\theta i_3,$$

и выражение осевой силы Z может быть записано в виде

$$Z = \frac{2\pi}{\alpha} \left[\int_{r_0}^r \sigma_r r dr + 2 \int_{r_1}^r \left(\alpha^2 - \frac{r^2}{\alpha^2 R^2} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial l_1} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial A}{\partial l_2} \right) r dr \right]. \quad (3.3.8)$$

Это уравнение совместно с (3.3.4), (3.3.1) определяет постоянные α , R_0 , R_1 . В случае, когда торцы свободны, $Z = 0$. Если же цилиндр помещен между двумя твердыми плитами, не допускающими изменения его длины, $\alpha = 1$; тогда уравнение (3.3.8) служит для определения осевой силы, а неизвестные R_0 , R_1 находятся из уравнений (3.3.4), (3.3.1).

Входящую в приведенные выше формулы производную по r от удельной потенциальной энергии деформации следует заменить через ее производные по инвариантам — «обобщенные

модули упругости». Для этого служит формула (3.2.3), преобразуемая к виду

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{2c^2(2r^2+c)}{\alpha(r^2+c)^2 r^3} \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \alpha^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right). \quad (3.3.9)$$

Здесь и далее принимается для краткости обозначение

$$c = \alpha R_0^2 - r_0^2 = \alpha R_1^2 - r_1^2 = \alpha R^2 - r^2, \quad (3.3.10)$$

причем по (3.3.4)

$$\frac{q_0 - q_1}{\int_{r_0}^{r_1} r^2 \frac{dA}{dr} dr} = -\frac{1}{c}. \quad (3.3.11)$$

3.4. Материал Муни. В приводимом далее вычислении предполагается задание удельной потенциальной энергии в форме Муни (4.9.2) гл. VIII. Уравнение (3.3.4) записывается в виде

$$\frac{q_0 - q_1}{2c} \alpha = (C_1 + \alpha^2 C_2) \int_{r_0}^{r_1} \frac{2r^2 + c}{r(r^2 + c)^2} dr,$$

а входящий в него интеграл равен

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{2r^2 + c}{r(r^2 + c)^2} dr = \frac{1}{2c} \left[\ln \frac{r_1^2}{r_0^2} \frac{R_0^2}{R_1^2} + \left(\frac{r_1^2}{\alpha R_1^2} - \frac{r_0^2}{\alpha R_0^2} \right) \right]. \quad (3.4.1)$$

Это позволяет при обозначении

$$f_*(x) = x + \ln x \quad (3.4.2)$$

представить уравнение (3.3.4) в виде

$$\alpha(q_0 - q_1) = \left[f_* \left(\frac{r_1^2}{\alpha R_1^2} \right) - f_* \left(\frac{r_0^2}{\alpha R_0^2} \right) \right] (C_1 + \alpha^2 C_2). \quad (3.4.3)$$

Аналогичное представление выражения осевой силы (3.3.8) требует вычисления двойного интеграла

$$\int_{r_0}^{r_1} r dr \int_{r_0}^r \frac{\partial A}{\partial \rho} \rho^2 d\rho = \frac{1}{2} r_1^2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial A}{\partial r} r^2 dr - \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial A}{\partial r} r^4 dr.$$

По (3.3.5) получаем

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} \sigma_r r dr &= \frac{1}{2} (q_0 r_0^2 - q_1 r_1^2) + \frac{1}{2c} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial A}{\partial r} r^4 dr = \\ &= \frac{1}{2} (q_0 r_0^2 - q_1 r_1^2) - \frac{c}{2\alpha} (C_1 + \alpha^2 C_2) \left(2 \ln \frac{R_1^2}{R_0^2} + \frac{r_0^2}{\alpha R_0^2} - \frac{r_1^2}{\alpha R_1^2} \right), \end{aligned}$$

и выражение осевой силы приводится к виду

$$\frac{\alpha Z}{2\pi} = \frac{1}{2} (q_0 r_0^2 - q_1 r_1^2) - \frac{c}{2\alpha} (C_1 + \alpha^2 C_2) \left(2 \ln \frac{R_1^2}{R_0^2} + \frac{r_0^2}{\alpha R_0^2} - \frac{r_1^2}{\alpha R_1^2} \right) + \\ + (r_1^2 - r_0^2) \left[C_1 \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} \right) + C_2 \left(\alpha - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] + \frac{c}{\alpha} \left(C_1 \ln \frac{R_1^2}{R_0^2} + C_2 \alpha^2 \ln \frac{r_1^2}{r_0^2} \right). \quad (3.4.4)$$

3.5. Цилиндр, «вывернутый наизнанку». Внутренний и наружный радиусы в начальном состоянии, как выше, обозначены r_0, r_1 ; в конечном состоянии, в вывернутом «наизнанку» цилиндре, R_0 является наружным, R_1 — внутренним радиусом; внешние силы в конечном состоянии отсутствуют:

$$q_0 = q_1 = 0, \quad Z = 0. \quad (3.5.1)$$

Постоянная $\alpha < 0$, равно как и постоянная c ; вводятся обозначения

$$-\alpha = \beta, \quad -c = K r_0^2, \quad \frac{R_0^2}{r_0^2} = \mu_0^2, \quad \frac{R_1^2}{r_1^2} = \mu_1^2, \quad \frac{r_1^2}{r_0^2} = n > 1, \quad (3.5.2)$$

позволяющие записать соотношение (3.3.10) в виде

$$K = \beta \mu_0^2 + 1 = n (\beta \mu_1^2 + 1). \quad (3.5.3)$$

Из него следует, что

$$\beta (\mu_0^2 - n \mu_1^2) = n - 1 > 0, \quad \mu_0^2 > n \mu_1^2, \quad \mu_0^2 > \mu_1^2.$$

Напряжение σ_r , определяемое по (3.3.3), (3.3.4) и (3.3.8), равно

$$\sigma_r = \frac{1}{K r_0^2} \int_{r_0}^r \frac{\partial A}{\partial r} r^2 dr = \frac{1}{\beta} (C_1 + \beta^2 C_2) \left(\ln \frac{R^2}{\mu_0^2 r_0^2} + \frac{r^2}{\beta R^2} - \frac{1}{\beta \mu_0^2} \right). \quad (3.5.4)$$

Оно обращается в нуль при $r = r_0$, а также при $r = r_1$:

$$\ln \frac{\mu_1^2}{\mu_0^2} + \frac{1}{\beta \mu_1^2} - \frac{1}{\beta \mu_0^2} = \left(\frac{1}{\beta \mu_1^2} - \ln \frac{1}{\beta \mu_1^2} \right) - \left(\frac{1}{\beta \mu_0^2} - \ln \frac{1}{\beta \mu_0^2} \right) = 0. \quad (3.5.5)$$

Это соотношение, записываемое также в виде

$$f \left(\frac{1}{\beta \mu_0^2} \right) = f \left(\frac{1}{\beta \mu_1^2} \right), \quad f(x) = x - \ln x, \quad (3.5.6)$$

представляет при обозначениях (3.5.2) другую форму записи условия (3.4.3).

По изображенному на рис. 49 графику функции $f(x)$ для $x > 0$, имеющей равный единице минимум при $x = 1$, сразу же видно, что уравнение (3.5.6) определяет для любого $\beta\mu_0^2 > 1$ единственное значение $\beta\mu_1^2 < 1$.

Меридиональные напряжения σ_θ , определяемые по (3.3.6), на наружной ($R = R_0$, $r = r_0$) и внутренней ($R = R_1$, $r = r_1$) сторонах вывернутого цилиндра оказываются равными

$$\begin{aligned}\sigma_\theta|_{r=r_0} &= \frac{2}{\beta} (C_1 + \beta^2 C_2) \left(\beta\mu_0^2 - \frac{1}{\beta\mu_0^2} \right), \\ \sigma_\theta|_{r=r_1} &= \frac{2}{\beta} (C_1 + \beta^2 C_2) \left(\beta\mu_1^2 - \frac{1}{\beta\mu_1^2} \right);\end{aligned}\quad (3.5.7)$$

как и следовало ожидать, они являются растягивающими на наружной стороне и сжимающими на внутренней.

Условие обращения в нуль растягивающей силы представляется по (3.4.4) теперь в виде

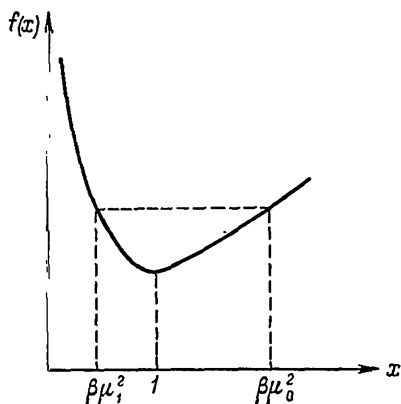


Рис. 49.

$$\begin{aligned}2(n-1) \frac{1+\beta^3}{\beta^2} \left(C_1 - \frac{C_2}{\beta} \right) + \\ + (1 + \beta\mu_0^2) \left[2C_2 \ln \frac{\mu_0^2}{\mu_1^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{\beta\mu_1^2} - \frac{1}{\beta\mu_0^2} \right) (C_1 + \beta^2 C_2) \right] = 0.\end{aligned}\quad (3.5.8)$$

Это соотношение, сославшись на (3.5.5), можно преобразовать также к виду

$$2(n-1) \frac{C_1\beta - C_2}{C_1 - \beta^2 C_2} \frac{1+\beta^3}{\beta} = (1 + \beta\mu_0^2) \left(\frac{1}{\beta\mu_1^2} - \frac{1}{\beta\mu_0^2} \right). \quad (3.5.9)$$

По заданному n неизвестные $\beta\mu_0^2$, $\beta\mu_1^2$ определяются уравнениями (3.5.3), (3.5.6); тогда по измеренному значению β может быть найдено отношение C_2/C_1 для рассматриваемого материала Муни. Границы возможных значений β определяются условием положительности этого отношения (см. п. 4.9 гл. VIII).

3.6. Кручение круглого цилиндра. Как и в п. 3.1, материальные координаты отождествляются с цилиндрическими координатами точки в начальном состоянии. Деформация кручения задается поворотом поперечных сечений цилиндра, сопровождае-

мым осевым перемещением; оно вводится, как и выше, с помощью постоянного параметра α :

$$z = \alpha a_3.$$

Вектор-радиус \mathbf{R} точки скрученного цилиндра представляется формулой (6.4.2) гл. II:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{A}},$$

причем в выражение (6.2.12) гл. II тензора $\hat{\mathbf{A}}$ следует внести изменения, учитывающие осевое перемещение и сохранение объема:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} [(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta) \cos \chi - (\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta) \sin \chi] + \alpha i_3 i_3,$$

$$\chi = \chi_0 + \psi a_3.$$

Постоянная ψ представляет угол кручения на единицу длины в осевом направлении.

Записывая теперь \mathbf{R} в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{A}} = (r \mathbf{e}_r + i_3 a_3) \cdot \hat{\mathbf{A}} = \frac{r}{\sqrt{\alpha}} (\mathbf{e}_r \cos \chi + \mathbf{e}_\theta \sin \chi) + \alpha a_3 i_3$$

и вспомнив формулы дифференцирования

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r,$$

получаем такие представления базисных векторов в деформированном цилиндре:

$$\mathbf{R}_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (\mathbf{e}_r \cos \chi + \mathbf{e}_\theta \sin \chi), \quad \mathbf{R}_2 = \frac{r}{\sqrt{\alpha}} (\mathbf{e}_\theta \cos \chi - \mathbf{e}_r \sin \chi),$$

$$\mathbf{R}_3 = \psi \frac{r}{\sqrt{\alpha}} (-\mathbf{e}_r \sin \chi + \mathbf{e}_\theta \cos \chi) + \alpha i_3$$

или

$$\mathbf{R}_1^* = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \mathbf{e}_r^*, \quad \mathbf{R}_2^* = \frac{r}{\sqrt{\alpha}} \mathbf{e}_\theta^*, \quad \mathbf{R}_3^* = \frac{\psi r}{\sqrt{\alpha}} \mathbf{e}_\theta^* + \alpha i_3, \quad (3.6.1)$$

где

$$\mathbf{e}_r^* = \mathbf{e}_r \cos \chi + \mathbf{e}_\theta \sin \chi, \quad \mathbf{e}_\theta^* = -\mathbf{e}_r \sin \chi + \mathbf{e}_\theta \cos \chi. \quad (3.6.2)$$

Этим определяются ковариантные компоненты метрического тензора

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{\alpha}, & G_{12} &= 0, & G_{13} &= 0, \\ G_{22} &= \frac{r^2}{\alpha}, & G_{23} &= \frac{r^2}{\alpha} \psi, \\ G_{33} &= \alpha^2 + \frac{r^2 \psi^2}{\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6.3)$$

так что

$$G = r^2. \quad (3.6.4)$$

Контравариантные компоненты и главные инварианты тензора \hat{G}^\times равны

$$\left. \begin{aligned} G^{11} &= \alpha, & G^{12} &= 0, & G^{13} &= 0, \\ G^{22} &= \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\psi^2}{\alpha^2}, & G^{23} &= -\frac{\psi}{\alpha^2}, \\ G^{33} &= \frac{1}{\alpha^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6.5)$$

$$I_1 = \frac{2}{\alpha} + \alpha^2 + \frac{r^2 \psi^2}{\alpha}, \quad I_2 = 2\alpha + \frac{r^2 \psi^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}, \quad I_3 = 1. \quad (3.6.6)$$

Выражения контравариантных компонент тензора напряжений записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\tau}^{11} &= \overset{0}{c} - \frac{\overset{1}{c}}{\alpha} + \frac{\overset{-1}{c}}{\alpha}, \\ \frac{1}{2} \hat{\tau}^{22} &= \overset{0}{\frac{c}{r^2}} - \frac{\overset{1}{c}}{\alpha r^2} + \overset{-1}{c} \left(\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\psi^2}{\alpha^2} \right), \\ \frac{1}{2} \hat{\tau}^{33} &= \overset{0}{c} - \overset{1}{c} \left(\alpha^2 + \frac{r^2 \psi^2}{\alpha} \right) + \frac{\overset{-1}{c}}{\alpha^2}, \\ \frac{1}{2} \hat{\tau}^{23} &= -\overset{1}{c} \frac{\psi}{\alpha} - \overset{-1}{c} \frac{\psi}{\alpha^2}, \quad \hat{\tau}^{12} = \hat{\tau}^{13} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.6.7)$$

Из представления тензора напряжений в векторном базисе деформированного объема

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \hat{\tau}^{sk} R_s R_k = \hat{\tau}^{11} R_1 R_1 + \hat{\tau}^{22} R_2 R_2 + \hat{\tau}^{33} R_3 R_3 + \hat{\tau}^{23} (R_2 R_3 + R_3 R_2) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \hat{\tau}^{11} e_r^* e_r^* + \frac{r^2}{\alpha} \hat{\tau}^{22} e_\theta^* e_\theta^* + \hat{\tau}^{33} \left[\frac{\psi^2 r^2}{\alpha} e_\theta^* e_\theta^* + \alpha^2 i_3 i_3 + \psi r \sqrt{\alpha} (e_\theta^* i_3 + i_3 e_\theta^*) \right] + \\ &\quad + \hat{\tau}^{23} \left[2 \frac{\psi r^2}{\alpha} e_\theta^* e_\theta^* + r \sqrt{\alpha} (e_\theta^* i_3 + i_3 e_\theta^*) \right] \end{aligned}$$

получаем выражения физических компонент напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\alpha} \hat{\tau}_{11}, & \sigma_\theta &= \frac{r^2}{\alpha} \hat{\tau}^{22} + \frac{\psi^2 r^2}{\alpha} \hat{\tau}^{33} + 2 \frac{\psi r^2}{\alpha} \hat{\tau}^{23}, \\ \sigma_z &= \alpha^2 \hat{\tau}^{33}, & \tau_{\theta z} &= r \sqrt{\alpha} (\hat{\tau}^{23} + \psi \hat{\tau}^{33}). \end{aligned} \right\} \quad (3.6.8)$$

Закон состояния (3.6.7) для этих компонент записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_r &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial A}{\partial I_1} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \alpha + \frac{r^2 \psi^2}{\alpha^2} \right) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \overset{-1}{c}, \\ \frac{1}{2} \sigma_\theta &= \frac{1}{\alpha} (1 + r^2 \psi^2) \frac{\partial A}{\partial I_1} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \alpha + \frac{r^2 \psi^2}{\alpha^2} \right) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \overset{-1}{c}, \\ \frac{1}{2} \sigma_z &= \alpha^2 \frac{\partial A}{\partial I_1} + 2\alpha \frac{\partial A}{\partial I_2} + \overset{-1}{c}, & \frac{1}{2} \tau_{\theta z} &= \frac{r \psi}{\sqrt{\alpha}} \left(\alpha \frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.6.9)$$

Здесь совершен переход с помощью формул (2.1.4) гл. VIII от «модулей» c, c к производным удельной потенциальной энергии по инвариантам.

После исключения неизвестной c^{-1} приходим к используемым далее соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &= -2 \frac{r^2 \psi^2}{a} \frac{\partial A}{\partial l_1}, \\ \sigma_r - \sigma_z &= 2 \left(\frac{1}{a} - \alpha^2 \right) \left(\frac{\partial A}{\partial l_1} + \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial l_2} \right) + 2 \frac{r^2 \psi^2}{a^2} \frac{\partial A}{\partial l_2}, \\ \tau_{\theta z} &= 2r\psi \sqrt{a} \left(\frac{\partial A}{\partial l_1} + \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial l_2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.6.10)$$

причем

$$2 \left(\frac{\partial A}{\partial l_1} + \frac{1}{a} \frac{\partial A}{\partial l_2} \right) = \frac{a}{r\psi} \frac{dA}{dr}. \quad (3.6.11)$$

3.7. Напряжения, крутящий момент, осевая сила. Уравнение статики имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{G} \tilde{t}^s \mathbf{R}_t &= \frac{\partial}{\partial r} r \tilde{t}^{11} \frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{e}_r^* + \frac{\partial}{\partial \theta} r \left[\tilde{t}^{22} \frac{r}{\sqrt{a}} \mathbf{e}_\theta^* + \tilde{t}^{23} \left(\frac{\psi r}{\sqrt{a}} \mathbf{e}_\theta^* + \alpha \mathbf{i}_3 \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} r \left[\tilde{t}^{23} \frac{r}{\sqrt{a}} \mathbf{e}_\theta^* + \tilde{t}^{33} \left(\frac{\psi r}{\sqrt{a}} \mathbf{e}_\theta^* + \alpha \mathbf{i}_3 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

Имея в виду формулы дифференцирования [см. (3.6.2)]

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta^*}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r^*, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta^*}{\partial z} = -\psi \mathbf{e}_r^*$$

и учитывая, что остальные величины зависят только от r , приходим к одному лишь уравнению

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{\sqrt{a}} r \tilde{t}^{11} - \frac{1}{\sqrt{a}} r^2 (\tilde{t}^{22} + 2\tilde{t}^{23}\psi + \tilde{t}^{33}\psi^2) = 0, \quad (3.7.2)$$

которое после перехода к физическим компонентам принимает хорошо известный вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (3.7.3)$$

Из него, применив первое соотношение (3.6.10), получим

$$\sigma_r = -2 \frac{\psi^2}{a} \int_r^{r_0} \frac{\partial A}{\partial l_1} r dr, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 2 \frac{r^2 \psi^2}{a} \frac{\partial A}{\partial l_1}. \quad (3.7.4)$$

Константа интегрирования определена по условию отсутствия внешних сил на наружной поверхности цилиндра $r = r_0$; принятая картина деформации не дает решения задачи кручения

полого цилиндра, так как в нашем распоряжении имеется только одна постоянная и требование освобождать от напряжений σ_r внутреннюю поверхность не может быть выполнено. Было бы грубой ошибкой думать, что задача о кручении полого цилиндра может быть решена наложением на приведенное здесь решение решения «задачи Ляме» пп. 3.1—3.4. В нелинейных задачах недопустимо раздельное рассмотрение нагрузок. Решение задачи кручения для полого цилиндра требует отказа от предположения об отсутствии радиальных перемещений и независимости от r осевых; картина деформации должна быть усложнена введением задающих их функций от r .

Определяемая формулой (3.2.3) гл. I сила, действующая на площадку $d\vec{O}$ в поперечном сечении цилиндра, равна

$$\begin{aligned} \vec{t} d\vec{O} &= \vec{t}^{s3} \mathbf{R}_3 r dr d\theta = (\vec{t}^{23} \mathbf{R}_2 + \vec{t}^{33} \mathbf{R}_3) r dr d\theta = \\ &= \left[\frac{r}{\sqrt{\alpha}} (\vec{t}^{23} + \psi \vec{t}^{33}) \mathbf{e}_\theta^* + \alpha \vec{t}^{33} \mathbf{i}_3 \right] r dr d\theta = \frac{1}{\alpha} (\tau_{\theta z} \mathbf{e}_\theta^* + \sigma_z \mathbf{i}_3) r dr d\theta. \end{aligned}$$

Главный вектор и главный момент этой системы сил равны

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} r dr (\tau_{\theta z} \mathbf{e}_\theta^* + \sigma_z \mathbf{i}_3), \\ m^O &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} \mathbf{R} \times (\tau_{\theta z} \mathbf{e}_\theta^* + \sigma_z \mathbf{i}_3) r dr = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} \left(\frac{r}{\sqrt{\alpha}} \mathbf{e}_r^* + \alpha \mathbf{i}_3 z \right) \times (\tau_{\theta z} \mathbf{e}_\theta^* + \sigma_z \mathbf{i}_3) r dr, \end{aligned}$$

и из соотношений

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\theta^* d\theta = \mathbf{e}_r^* \Big|_0^{2\pi} = 0, \quad \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r^* d\theta = -\mathbf{e}_\theta^* \Big|_0^{2\pi} = 0$$

следует, что эти векторы, как заранее предвиделось, параллельны оси \mathbf{i}_3 . Приходим к выражениям осевой силы и крутящего момента

$$Z = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^{r_0} \sigma_z r dr, \quad m_z = \frac{2\pi}{\alpha \sqrt{\alpha}} \int_0^{r_0} \tau_{\theta z} r^2 dr. \quad (3.7.5)$$

Замечая, что

$$\int_0^{r_0} r dr \int_r^{r_0} \frac{\partial A}{\partial I_1} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \frac{\partial A}{\partial I_1} r^3 dr,$$

и обратившись к формулам (3.6.10), (3.6.11), придем к формулам

$$Z = -2\pi \left\{ \frac{\psi^2}{\alpha^2} \int_0^{r_0} \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) r^3 dr + \frac{1-\alpha^3}{\alpha \psi^2} [A(r_0) - A(0)] \right\}, \quad (3.7.6)$$

$$m_z = \frac{2\pi}{\psi} \int_0^{r_0} \frac{\partial A}{\partial r} r^2 dr = \frac{2}{\psi} [\pi r_0^2 A(r_0) - a]. \quad (3.7.7)$$

Здесь $A(r_0)$, $A(0)$ — значения удельной потенциальной энергии деформации на поверхности и на оси стержня,

$$a = 2\pi \int_0^{r_0} A r dr$$

— потенциальная энергия деформации, отнесенная к единице длины скрученного стержня.

Здесь отчетливо обнаруживается эффект Пойнтинга — необходимость сжимающей осевой силы, чтобы сохранить неизменной длину скручиваемого стержня ($\alpha = 1$):

$$Z|_{\alpha=1} = -2\pi\psi^2 \int_0^{r_0} \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) r^3 dr. \quad (3.7.8)$$

Изменение длины стержня (параметр α) при отсутствии осевой силы определяется по уравнению (3.7.6) при $Z = 0$.

В нелинейной теории кручение сопровождается не только касательными напряжениями $\tau_{\theta z}$, но и возникновением всех нормальных напряжений.

Для материала Муни сжимающая сила, требуемая для сохранения длины стержня, оказывается равной

$$Z|_{\alpha=1} = -(C_1 + 2C_2) I_p \psi^2, \quad (3.7.9)$$

где I_p — полярный момент инерции поперечного сечения. При этом условии

$$I_1 - 3 = I_2 - 3 = r^2 \psi^2, \quad A = (C_1 + C_2) r^2 \psi^2, \quad a = (C_1 + C_2) I_p \psi^2,$$

и по (3.7.7), вводя обозначение модуля сдвига (1.4.7), приходим к тому же, что и в линейной теории, выражению крутящего момента:

$$m_z = 2(C_1 + C_2) I_p \psi = \mu I_p \psi. \quad (3.7.10)$$

При отсутствии осевой силы выражение крутящего момента записывается в виде

$$m_z = \frac{2}{\alpha} \left(C_1 + \frac{C_2}{\alpha} \right) I_p \psi, \quad (3.7.11)$$

причем α — функция от ψ , определяемая по (3.7.6) из уравнения

$$4(1 - \alpha^3)(\alpha C_1 + C_2) + r_0^2 \psi^2 (\alpha C_1 + 2C_2) = 0. \quad (3.7.12)$$

Например, для неогукана материала ($C_2 = 0$)

$$\alpha = \sqrt[3]{1 + \frac{r_0^2 \psi^2}{4}}, \quad m_z = \mu I_p \frac{\psi}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{4} r_0^2 \psi^2}} \quad (3.7.13)$$

— стержень удлиняется, а рост крутящего момента уменьшается с ростом угла закручивания ψ .

3.8. Симметричная деформация полого шара (задача Ляме для шара). Материальными координатами точки служат сферические координаты (п. III. 8) точки в начальном состоянии шара (в v -объеме)

$$q^1 = \rho, \quad q^2 = \vartheta, \quad q^3 = \lambda.$$

Отличны от нуля только диагональные компоненты метрического тензора \hat{g} этого состояния:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1 & g_{22} &= \rho^2, & g_{33} &= \rho^2 \sin^2 \vartheta & (g = \rho^4 \sin^2 \vartheta), \\ g^{11} &= 1 & g^{22} &= \frac{1}{\rho^2}, & g^{33} &= \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8.1)$$

Деформация предполагается радиально-симметричной: перемещения точек сферы из начального состояния в конечное направлены радиально и зависят лишь от координаты ρ . Полый шар остается полым шаром; его наружный и внутренний радиусы в начальном состоянии обозначаются ρ_0, ρ_1 , в конечном R_0, R_1 .

Вектор-радиус точки и определяемые по нему базисные векторы \mathbf{R}_s в деформированном шаре даются выражениями [см. (III. 8.4)]

$$\mathbf{R} = R(\rho) \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{R}_1 = R'(\rho) \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{R}_2 = R(\rho) \mathbf{e}_\vartheta, \quad \mathbf{R}_3 = R(\rho) \mathbf{e}_\lambda \sin \vartheta. \quad (3.8.2)$$

Предполагается, что шар подвержен действию постоянного давления изнутри и извне:

$$(\sigma_\rho)_{\rho=\rho_0} = -q_0, \quad (\sigma_\rho)_{\rho=\rho_1} = -q_1. \quad (3.8.3)$$

При таком нагружении возникают только нормальные напряжения $\sigma_\rho, \sigma_\vartheta, \sigma_\lambda$:

$$\hat{T} = \sigma_\rho \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho + \sigma_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \sigma_\lambda \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\lambda = \frac{\sigma_\rho}{R^2} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 + \frac{\sigma_\vartheta}{R^2} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2 + \frac{\sigma_\lambda}{R^2 \sin^2 \vartheta} \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_3,$$

и формулы связи контравариантных компонент тензора напряжений с его физическими компонентами имеют вид

$$\sigma_\rho = \hat{T}^{11} R'^2, \quad \sigma_\vartheta = \hat{T}^{22} R^2, \quad \sigma_\lambda = \hat{T}^{33} R^2 \sin^2 \vartheta. \quad (3.8.4)$$

Компоненты метрического тензора \hat{G} в деформированном шаре и инварианты меры деформации Коши равны

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= R'^2, & G_{22} &= R^2, & G_{33} &= R^2 \sin^2 \vartheta & (G = R'^2 R^4 \sin^2 \vartheta), \\ G^{11} &= \frac{1}{R'^2}, & G^{22} &= \frac{1}{R^2}, & G^{33} &= \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta}, \\ I_1 &= R'^2 + 2 \frac{R^2}{\rho^2}, & I_2 &= \frac{R^4}{\rho^4} + 2 R'^2 \frac{R^2}{\rho^2}, & I_3 &= R'^2 \frac{R^4}{\rho^4}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8.5)$$

Закон состояния записывается системой формул

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{t}^{11} &= \frac{\rho^2}{R' R^2} \left(c - \frac{1}{c} R'^2 + \frac{-1}{R'^2} \right), \\ \frac{1}{2} \hat{t}^{22} &= \frac{\rho^2}{R' R^2} \left(\frac{c}{\rho^2} - c \frac{R^2}{\rho^4} + \frac{-1}{R^2} \right), \\ \frac{1}{2} \hat{t}^{33} &= \frac{1}{2} \frac{\hat{t}^{22}}{\sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8.6)$$

Уравнение статики

$$\frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{G} \hat{t}^{st} \mathbf{R}_t = \frac{\partial}{\partial \rho} R'^2 R^2 \sin \vartheta \hat{t}^{11} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial}{\partial \vartheta} R' R^3 \hat{t}^{22} \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta + \\ + \frac{\partial}{\partial \lambda} R' R^3 \hat{t}^{33} \sin^2 \vartheta \mathbf{e}_\lambda = 0$$

раскрывается с помощью дериационных формул (III.8.4):

$$\sin \vartheta \left[\frac{d}{d\rho} R'^2 R^2 \hat{t}^{11} - R' R^3 (\hat{t}^{22} + \hat{t}^{33} \sin^2 \vartheta) \right] \mathbf{e}_\rho + \\ + R' R^3 \cos \vartheta (\hat{t}^{22} - \hat{t}^{33} \sin^2 \vartheta) \mathbf{e}_\vartheta = 0.$$

Из него следует уже отмеченное выше соотношение

$$\hat{t}^{22} = \hat{t}^{33} \sin^2 \vartheta \quad (3.8.7)$$

и дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\rho} R'^2 R^2 \hat{t}^{11} - 2 R' R^3 \hat{t}^{22} = 0. \quad (3.8.8)$$

Через физические компоненты тензора \hat{T} оно представляется в более простом виде:

$$\frac{d}{d\rho} R^2 \sigma_\rho - 2 R' R \sigma_\vartheta = 0, \quad \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + 2 \frac{R'}{R} (\sigma_\rho - \sigma_\vartheta) = 0. \quad (3.8.9)$$

Замечая еще, что $R' d\rho = dR$, можно привести уравнения (3.8.6), (3.8.7) к виду

$$\frac{d\sigma_\rho}{dR} + 2 \frac{\sigma_\rho - \sigma_\vartheta}{R} = 0, \quad \sigma_\vartheta = \sigma_\lambda, \quad (3.8.10)$$

и эту форму записи можно было непосредственно получить из уравнений статики в сферических координатах деформированного объема.

Остается подставить в уравнение статики значения разности

$$\sigma_p - \sigma_0 = \frac{2}{R'} \left(\frac{\rho^2 R'^2}{R^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{R^2}{\rho^2} \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) \quad (3.8.11)$$

и напряжения σ_p :

$$\sigma_p = 2 \frac{\rho^2 R'}{R^2} \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + 2 \frac{R^2}{\rho^2} \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{R^4}{\rho^4} \frac{\partial A}{\partial I_3} \right). \quad (3.8.12)$$

Приходим к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $R(\rho)$; краевые условия ее, формулируемые соотношениями (3.8.3), (3.8.12), также нелинейны. Задача громоздка даже для наиболее простых формулировок закона состояния сжимаемого упругого материала.

3.9. Несжимаемый материал. Для несжимаемого материала эти затруднения отпадают. Условие несжимаемости определяет производную R' искомой функции R :

$$I_3 = 1, \quad R' = \frac{\rho^2}{R^2}, \quad (3.9.1)$$

и по (3.8.11)

$$\sigma_p - \sigma_0 = 2 \frac{R^2}{\rho^2} \left(\frac{\rho^6}{R^6} - 1 \right) \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{R^2}{\rho^2} \frac{\partial A}{\partial I_2} \right). \quad (3.9.2)$$

Уравнение статики (3.8.10) приводится к виду

$$\frac{d\sigma_p}{d\rho} + \frac{4}{R} \left(\frac{\rho^6}{R^6} - 1 \right) \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{R^2}{\rho^2} \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) = 0, \quad (3.9.3)$$

и задача сводится к рассмотрению системы двух уравнений (3.9.1), (3.9.3). Она облегчается введением новой независимой переменной

$$\chi = \frac{\rho}{R}, \quad d\chi = \frac{d\rho}{R} - \frac{\rho R'}{R^2} d\rho = \frac{d\rho}{R} (1 - \chi^3).$$

Выражения инвариантов (3.8.5) принимают вид

$$I_1 = \chi^4 + \frac{2}{\chi^2}, \quad I_2 = \frac{1}{\chi^4} + 2\chi^2. \quad (3.9.4)$$

Поэтому

$$\frac{dA}{d\chi} = 4 \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) \frac{\chi^6 - 1}{\chi^3}, \quad (3.9.5)$$

и уравнение статики преобразуется к виду

$$\frac{d\sigma_p}{d\chi} = \frac{\chi^3}{\chi^3 - 1} \frac{dA}{d\chi}. \quad (3.9.6)$$

Учитывая краевые условия (3.8.3), приходим к выражению нормального напряжения

$$\sigma_p = -q_0 + \int_{\chi_0}^{\chi} \frac{\chi^3}{\chi^3 - 1} \frac{dA}{d\chi} d\chi \quad (3.9.7)$$

и к формуле, связывающей неизвестные χ_1 , χ_0 :

$$q_0 - q_1 = \int_{\chi_0}^{\chi_1} \frac{\chi^3}{\chi^3 - 1} \frac{dA}{d\chi} d\chi. \quad (3.9.8)$$

Второе соотношение между ними дается условием несжимаемости

$$R^2 R' = \rho^2, \quad R^3 - \rho^3 = R_0^3 - \rho_0^3 = R_1^3 - \rho_1^3, \quad (3.9.9)$$

представимым в виде

$$\frac{1 - \chi_1^3}{\chi_1^3} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^3 \frac{1 - \chi_0^3}{\chi_0^3}. \quad (3.9.10)$$

3.10. Применение принципа стационарности потенциальной энергии. В рассмотренных задачах о цилиндре и шаре простота выражений инвариантов через функции и постоянные параметры, задающие деформацию, допускает достаточно простой вывод уравнений равновесия с помощью принципа стационарности удельной потенциальной энергии.

Остановимся на примере шара. Инварианты зависят от искомой функции $R(\rho)$ и ее производной, поэтому

$$\delta A = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A}{\partial I_k} \delta I_k = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A}{\partial I_k} \left(\frac{\partial I_k}{\partial R} \delta R + \frac{\partial I_k}{\partial R'} \delta R' \right). \quad (3.10.1)$$

Элемент объема $d\tau_0 = 4\pi\rho^2 d\rho$, а варьируемая величина преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 4\pi \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A}{\partial I_k} \delta I_k d\rho &= 4\pi \sum_{k=1}^3 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left[\rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R} \delta R + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} \delta R - \delta R \frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} \right] d\rho = \\ &= 4\pi \left[\sum_{k=1}^3 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left(-\frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} + \rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R} \right) \delta R d\rho + \rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} \delta R \Big|_{\rho_0}^{\rho_1} \right]. \end{aligned} \quad (3.10.2)$$

Элементарная работа поверхностных сил давления —
 $-q_0 \overset{0}{N}, -q_1 \overset{1}{N}$ на концентрических сферах O_0, O_1 равна

$$\begin{aligned} & -q_0 \int \int_{O_0} \overset{0}{N} \cdot \delta \mathbf{R}_0 d\overset{0}{O} - q_1 \int \int_{O_1} \overset{1}{N} \cdot \delta \mathbf{R}_1 d\overset{1}{O} = \\ & = q_0 \int \int_{O_0} \delta R_0 d\overset{0}{O} - q_1 \int \int_{O_1} \delta R_1 d\overset{1}{O} = 4\pi (q_0 R_0^2 \delta R_0 - q_1 R_1^2 \delta R_1). \end{aligned}$$

Здесь учтены очевидные соотношения

$$\overset{0}{N} \cdot \delta \mathbf{R}_0 = -\frac{R_0}{R_0} \cdot \delta R_0 = -\delta R_0, \quad \overset{1}{N} \cdot \delta \mathbf{R}_1 = \frac{R_1}{R_1} \cdot \delta R_1 = \delta R_1$$

и вместе с тем на любой сфере

$$dO = \frac{R^2}{\rho^2} d\rho, \quad \int \int \delta R dO = \frac{R^2}{\rho^2} \delta R \int \int d\rho = 4\pi R^2 \delta R.$$

Приходим к равенству

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^3 \left\{ \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left(\frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} - \rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R} \right) \delta R d\rho + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\rho_1^2}{R_1^2} \left(\frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} \right)_1 + q_1 \right] R_1^2 \delta R_1 - \left[\frac{\rho_0^2}{R_0^2} \left(\frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} \right)_0 + q_0 \right] R_0^2 \delta R_0 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Из него следует дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=1}^3 \left(\frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} - \rho^2 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R} \right) = 0 \quad (3.10.3)$$

и краевые условия

$$\left. \begin{aligned} \rho = \rho_1: & \quad \frac{\rho_1^2}{R_1^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} \right) = -q_1; \\ \rho = \rho_0: & \quad \frac{\rho_0^2}{R_0^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial R'} \right)_0 = -q_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.10.4)$$

Их развернутая запись по (3.8.5) повторяет (3.8.12), (3.8.3):

$$2 \frac{\rho_s^2}{R_s^2} R'_s \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \frac{R^2}{\rho^2} + \frac{\partial A}{\partial I_3} \frac{R^4}{\rho^4} \right)_s = -q_s \quad (s = 0, 1), \quad (3.10.5)$$

тогда как дифференциальное уравнение (3.10.3), конечно, эквивалентно уравнению статики (3.8.8) или (3.8.9):

$$\frac{d}{d\rho} \rho^2 R' \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \frac{R^2}{\rho^2} + \frac{\partial A}{\partial I_3} \frac{R^4}{\rho^4} \right) - \\ - 2R \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \left(\frac{R^2}{\rho^2} + R'^2 \right) + \frac{\partial A}{\partial I_3} \frac{R^2 R'^2}{\rho^2} \right] = 0. \quad (3.10.6)$$

Приведенный вывод требует только знания выражений инвариантов и выполнения стандартных операций по составлению уравнений, соответствующих вариационной задаче. Нет нужды заботиться о различении контравариантных и физических компонент, записывать выражения закона состояния и т. д.

Запись в развернутом виде громоздка, так как в нее должны войти производные вида

$$\frac{d}{d\rho} \frac{\partial A}{\partial I_s} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 A}{\partial I_k \partial I_s} \frac{dI_k}{d\rho} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 A}{\partial I_k \partial I_s} \left(\frac{\partial I_k}{\partial \rho} + \frac{\partial I_k}{\partial R} R' + \frac{\partial I_k}{\partial R'} R'' \right).$$

Применение метода Ритца, допускаемое вариационной формулировкой задачи, приводит к рассмотрению нелинейной системы конечных уравнений (по числу введенных в задание искомой функции параметров).

§ 4. Малая деформация при наличии начального нагружения

4.1. Малая деформация деформированного объема. Далее рассматриваются три состояния упругого тела: начальное состояние в v -объеме, ограниченном поверхностью o , первое состояние деформации (V -объем, поверхность O) и второе состояние, получаемое из первого сообщением его точкам малого перемещения, задаваемого вектором ηw . Объем тела и его поверхность в этом состоянии обозначаются V^* , Q^* ; η — малый параметр, во всем последующем сохраняются слагаемые только первой степени относительно этого параметра *).

Вводится декартова система осей $OXYZ$, неизменные направления которых задаются единичными векторами i_s . Координаты точки среды в этой системе в v -, V - и V^* -объемах обозначаются соответственно a_s , x_s , x_s^* , а ее вектор-радиусы

$$r = a_s i_s, \quad R = i_s x_s, \quad R^* = i_s x_s^* = R + \eta w. \quad (4.1.1)$$

Для материальных координат точек среды сохраняются обозначения q^1 , q^2 , q^3 , векторные базисы в v -, V -объемах образуются тройками векторов r_s , R_s ; взаимные базисы — векторами r^s , R^s ; метрические тензоры обозначаются, как выше, \hat{g} , \hat{G} .

*) Операция транспонирования тензора будет обозначаться индексом «т»

Координатный базис в V^* -объеме определен тройкой векторов

$$R_s^* = \frac{\partial R^*}{\partial q^s} = R_s + \eta \frac{\partial w}{\partial q^s}. \quad (4.1.2)$$

Ранее операции в V -объеме отмечались (в отличие от операций в v -объеме) знаком тильды (\sim); теперь нет нужды в таком усложнении записей, так как все действия будут проводиться в V - и в V^* -объемах; операции с величиной в метрике V^* -объема отмечаются звездочкой.

По определению набла-оператора ∇ и градиента вектора [см. (V.4.2), (V.4.5)]

$$\nabla w = R^s \frac{\partial w}{\partial q^s}, \quad \frac{\partial w}{\partial q^s} = R_s \cdot \nabla w.$$

Поэтому, введя в рассмотрение единичный (метрический) тензор \hat{G} , имеем

$$R_s^* = R_s + \eta R_s \cdot \nabla w = R_s \cdot (\hat{G} + \eta \nabla w) = (\hat{G} + \eta \nabla w^T) \cdot R_s, \quad (4.1.3)$$

причем индексом «Т» обозначается транспонирование тензора:

$$\nabla w = R^s R^q \nabla_s w_q, \quad \nabla w^T = R^q R^s \nabla_s w_q. \quad (4.1.4)$$

Ковариантные компоненты метрического тензора \hat{G}^* в V^* -объеме определяются формулами

$$\begin{aligned} G_{sk}^* &= R_s^* \cdot R_k^* = (R_s + \eta R_s \cdot \nabla w) \cdot (R_k + \eta \nabla w^T \cdot R_k) = \\ &= G_{sk} + \eta R_s \cdot (\nabla w + \nabla w^T) \cdot R_k. \end{aligned}$$

Вспомнив определение линейного тензора деформации вектора w :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla w + \nabla w^T), \quad (4.1.5)$$

получаем

$$G_{sk}^* = G_{sk} + 2\eta R_s \cdot \hat{\varepsilon} \cdot R_k = G_{sk} + 2\eta \varepsilon_{sk}. \quad (4.1.6)$$

Определение взаимного базиса R^{*s} основывается на равенстве метрических тензоров \hat{G} , \hat{G}^* (тот и другой — единичные тензоры, каждый в своей метрике):

$$\hat{G} = \hat{G}^*. \quad (4.1.7)$$

Представив их в форме сумм диадных произведений

$$R^{*s} R_s^* = R^s R_s, \quad R^{*s} R_s^* \cdot R^k = R^k,$$

заменяв R_s^* значением (4.1.3), а ηR^{*s} на ηR^s , имеем

$$R^{*s} R_s^* \cdot R^k + \eta R^s R_s \cdot \nabla w \cdot R^k = R^{*k} + \eta \nabla w \cdot R^k = R^k,$$

или

$$R^{*k} = R^k - \eta R^k \cdot \nabla w^T = R^k \cdot (\hat{G} - \eta \nabla w^T) = (\hat{G} - \eta \nabla w) \cdot R^k. \quad (4.1.8)$$

Выражения контравариантных компонент G^{*sk} метрического тензора теперь представляются в виде

$$G^{*sk} = R^{*s} \cdot R^{*k} = (R^s - \eta R^s \cdot \nabla w^T) \cdot (R^k - \eta \nabla w \cdot R^k) = G^{sk} - 2\eta R^s \cdot \hat{e} \cdot R^k. \quad (4.1.9)$$

Для вычисления определителя $G^* = |G_{st}^*|$ проще всего исходить из равенства

$$G^* = G + \eta \left(\frac{\partial G^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = G + \eta \left(\frac{\partial G^*}{\partial G_{st}^*} \right)_{\eta=0} \frac{\partial G_{st}^*}{\partial \eta} = G + 2\eta G G^{st} e_{st}.$$

Введя в рассмотрение первый инвариант тензора \hat{e} (в V -метрике)

$$\vartheta = G^{st} e_{st}, \quad (4.1.10)$$

получим

$$G^* = G(1 + 2\eta\vartheta), \quad \sqrt{G^*} = \sqrt{G}(1 + \eta\vartheta). \quad (4.1.11)$$

Мера деформации V^* -объема определяется тензором $\hat{G}^{* \times}$ с ковариантными компонентами в метрике начального v -объема, равными ковариантным компонентом G_{st}^* метрического тензора V^* -объема:

$$\hat{G}^{* \times} = G_{st}^* r^s r^t = \hat{G}^{\times} + 2\eta e_{st} r^s r^t. \quad (4.1.12)$$

Главные инварианты этого тензора, определяемые формулами (5.2.6)–(5.2.8) гл. II, равны

$$\begin{aligned} I_1(\hat{G}^{* \times}) &= g^{sk} G_{sk}^* = I_1(\hat{G}^{\times}) + 2\eta g^{st} e_{st}, \\ I_2(\hat{G}^{* \times}) &= \frac{G^*}{g} g_{sk} G^{*sk} = I_2(\hat{G}^{\times}) + 2\eta [I_2(\hat{G}^{\times})\vartheta - I_3(\hat{G}) g_{sk} G^{sq} G^{kt} e_{qt}], \\ I_3(\hat{G}^{* \times}) &= \frac{G^*}{g} = I_3(\hat{G}^{\times}) (1 + 2\eta\vartheta). \end{aligned}$$

Ниже ηl_s обозначают разности главных инвариантов:

$$\eta l_s = I_s(\hat{G}^{* \times}) - I_s(\hat{G}^{\times}), \quad (4.1.13)$$

так что

$$l_1 = 2g^{st} e_{st}, \quad l_2 = 2[I_2(\hat{G}^{\times})\vartheta - I_3(\hat{G}^{\times}) g_{sk} G^{sq} G^{kt} e_{qt}], \quad l_3 = 2\vartheta I_3(\hat{G}^{\times}). \quad (4.1.14)$$

Вектор ориентированной площадки определяется по (3.5.3) гл. II:

$$\begin{aligned} N^* dO^* &= \sqrt{\frac{G^*}{G}} R^{*s} N_s dO = (1 + \eta\vartheta) (R^s - \eta \nabla w \cdot R^s) N_s dO = \\ &= [N + \eta(\vartheta N - \nabla w \cdot N)] dO. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Поэтому

$$\left(\frac{dO^*}{dO} \right)^2 = 1 + 2\eta(\vartheta - N \cdot \nabla w \cdot N), \quad \frac{dO^*}{dO} = 1 + \eta(\vartheta - N \cdot \nabla w \cdot N)$$

и, далее,

$$N^* = N + \eta (NN \cdot \nabla w \cdot N - \nabla w \cdot N) = N + \eta N \times [N \times (\nabla w \cdot N)]. \quad (4.1.16)$$

Вектор N^* отличается от N , как следовало ожидать, вектором, перпендикулярным N .

Заменив тензоры ∇w , ∇w^T их разложениями (1.2.13) гл. II на симметричную и кососимметричную части

$$\nabla w = \hat{e} - \hat{\Omega}, \quad \nabla w^T = \hat{e} + \hat{\Omega}$$

и сославшись также на формулы (I.5.8), (I.5.11), можно представить базисные векторы и вектор нормали в виде

$$\left. \begin{aligned} R_s^* - R_s &= \eta (R_s \cdot \hat{e} + \omega \times R_s), & R^{*s} - R^s &= -\eta (R^s \cdot \hat{e} - \omega \times R^s), \\ N^* - N &= \eta \{N \times [N \times (N \cdot \hat{e})] + \omega \times N\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.17)$$

4.2. Тензор напряжений. Через ηp^{st} обозначается разность контравариантных компонент t^{*st} , t^{st} тензоров \hat{T}^* и \hat{T} :

$$\hat{T}^* = t^{*st} R_s^* R_t^* = (t^{st} + \eta p^{st}) R_s^* R_t^*. \quad (4.2.1)$$

Сославшись на (4.1.3), имеем

$$\begin{aligned} \hat{T}^* &= t^{st} (R_s + \eta \nabla w^T \cdot R_s) (R_t + \eta R_t \cdot \nabla w) + \eta p^{st} R_s R_t = \\ &= \hat{T} + \eta (\hat{P} + t^{st} R_s R_t \cdot \nabla w + t^{st} \nabla w^T \cdot R_s R_t), \end{aligned}$$

или

$$\hat{T}^* = \hat{T} + \eta \hat{S}, \quad \hat{S} = \hat{P} + \hat{T} \cdot \nabla w + \nabla w^T \cdot \hat{T}, \quad \hat{P} = p^{st} R_s R_t. \quad (4.2.2)$$

Уравнение состояния далее представляется в форме Фингера (2.4.1) гл. VIII:

$$\hat{T} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} \left({}^0 \hat{M} - {}^1 \hat{M}^2 + {}^{-1} \hat{G} \right). \quad (4.2.3)$$

Тогда в V^* -объеме, учитывая (4.1.7), имеем

$$\hat{T}^* = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} \left({}^0 \hat{M}^* - {}^1 \hat{M}^{*2} + {}^{-1} \hat{G} \right) \quad (4.2.4)$$

или, при обозначении

$${}^s \hat{c}^* - {}^s \hat{c} = \eta {}^s \hat{b} \quad (s = 0, 1, -1), \quad (4.2.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}^* &= \hat{T} - \eta \hat{\Theta} \hat{T} + 2\eta \sqrt{\frac{g}{G}} \left({}^0 \hat{b} \hat{M} - {}^1 \hat{b} \hat{M}^2 + {}^{-1} \hat{b} \hat{G} \right) + \\ &+ 2 \sqrt{\frac{g}{G}} \left[{}^0 \hat{c} (\hat{M}^* - \hat{M}) - {}^1 \hat{c} (\hat{M}^{*2} - \hat{M}^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Здесь по определению тензора \hat{M}

$$\left. \begin{aligned} \hat{M}^* - \hat{M} &= g^{sk} (R_s^* R_k^* - R_s R_k) = \eta (\hat{M} \cdot \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T \cdot \hat{M}), \\ \hat{M}^{*2} - \hat{M}^2 &= (\hat{M}^* - \hat{M}) \cdot \hat{M}^* + \hat{M} \cdot (\hat{M}^* - \hat{M}) = \\ &= (\hat{M}^* - \hat{M}) \cdot \hat{M} + \hat{M} \cdot (\hat{M}^* - \hat{M}) = \\ &= \eta (\hat{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \hat{M} + \nabla \mathbf{w}^T \cdot \hat{M}^2 + \hat{M}^2 \cdot \nabla \mathbf{w} + \hat{M} \cdot \nabla \mathbf{w}^T \cdot \hat{M}) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

или

$$\hat{M}^{*2} - \hat{M}^2 = \eta (2\hat{M} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \hat{M} + \hat{M}^2 \cdot \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T \cdot \hat{M}^2). \quad (4.2.8)$$

Это позволяет записать группу входящих в (4.2.6) слагаемых в виде

$$\begin{aligned} 2 \sqrt{\frac{g}{G}} [c^0 (\hat{M}^* - \hat{M}) - c^1 (\hat{M}^{*2} - \hat{M}^2)] &= \\ = 2\eta \sqrt{\frac{g}{G}} (c^0 \hat{M} - c^1 \hat{M}^2 + c^1 \hat{G}) \cdot \nabla \mathbf{w} + 2\eta \sqrt{\frac{g}{G}} \nabla \mathbf{w}^T \cdot (c^0 \hat{M} - c^1 \hat{M}^2 + c^1 \hat{G}) - \\ - 4\eta \sqrt{\frac{g}{G}} (c^1 \hat{M} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \hat{M} + c^1 \hat{\varepsilon}) &= \\ = \eta (\hat{T} \cdot \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T \cdot \hat{T}) - 4\eta \sqrt{\frac{g}{G}} (c^1 \hat{M} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \hat{M} + c^1 \hat{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Возвращаясь к (4.2.6), получаем

$$\begin{aligned} \hat{S} = -\vartheta T + 2 \sqrt{\frac{g}{G}} (b^0 \hat{M} - b^1 \hat{M}^2 + b^1 \hat{G}) + \hat{T} \cdot \nabla \mathbf{w} + \\ + \nabla \mathbf{w}^T \cdot \hat{T} - 4 \sqrt{\frac{g}{G}} (c^1 \hat{M} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \hat{M} + c^1 \hat{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

и теперь можно представить тензор \hat{P} в виде

$$\hat{P} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} [(b^0 - \vartheta c^0) \hat{M} - (b^1 - \vartheta c^1) \hat{M}^2 + (b^1 - \vartheta c^1) \hat{G} - 2(c^1 \hat{M} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \hat{M} + c^1 \hat{\varepsilon})]. \quad (4.2.10)$$

Его компоненты в метрике V -объема определяются по формулам

$$\begin{aligned} p^{st} = 2 \sqrt{\frac{g}{G}} [g^{st} (b^0 - \vartheta c^0) - (b^1 - \vartheta c^1) g^{sr} g^{tq} G_{rq} + \\ + (b^1 - \vartheta c^1) G^{st} - 2(c^1 g^{sr} g^{tq} + c^1 G^{sr} G^{tq}) \varepsilon_{rq}]. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

4.3. Необходимые условия равновесия. Вектор массовой силы в V^* -объеме обозначается K^* , объемной $\rho^* K^*$;

$$K^* = K + \eta k, \quad \rho^* K^* = \sqrt{\frac{G}{G^*}} \rho K + \eta \rho k. \quad (4.3.1)$$

Уравнения равновесия в V^* - и в V -объемах записываются в форме (3.3.2) гл. I:

$$\frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{G^*} t^{st} R_i^* + \rho^* K^* = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{G} t^{st} R_i + \rho K = 0. \quad (4.3.2)$$

Из них следует равенство

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q^s} (\sqrt{G^*} t^{st} R_i^* - \sqrt{G} t^{st} R_i) + \eta \rho k = 0. \quad (4.3.3)$$

Величина в скобках представляется в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{G} [(1 + \eta \vartheta) (t^{st} + \eta p^{st}) (R_i + \eta R_i \cdot \nabla w) - t^{st} R_i] = \\ = \eta \sqrt{G} (\vartheta t^{st} R_i + p^{st} R_i + t^{st} R_i \cdot \nabla w). \end{aligned}$$

Вместе с тем, вычисляя дивергенцию тензора $\hat{T} \cdot \nabla w$, имеем [см. (V.4.7)]

$$\nabla \cdot \hat{T} \cdot \nabla w = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{G} t^{st} R_i \cdot \nabla w$$

и, возвращаясь к (4.3.3), приходим к равенству

$$\nabla \cdot (\vartheta \hat{T} + \hat{P} + \hat{T} \cdot \nabla w) + \rho k = 0. \quad (4.3.4)$$

Переходим к уравнению равновесия на поверхности; сила $F^* dO^*$, действующая на элемент поверхности dO^* , равна

$$F^* dO^* = F dO + \eta f dO, \quad (4.3.5)$$

и уравнение равновесия на O^* по (4.1.15), (4.2.2) представляется в виде

$$\begin{aligned} F^* dO^* = N^* \cdot \hat{T}^* dO^* = [N + \eta (\vartheta N - \nabla w \cdot N)] \cdot (\hat{T} + \eta \hat{S}) dO = \\ = F dO + \eta f dO. \end{aligned}$$

После замены

$$\nabla w \cdot N = N \cdot \nabla w^T, \quad N \cdot \hat{T} = F$$

получаем

$$N \cdot (\hat{S} + \vartheta \hat{T} - \nabla w^T \cdot \hat{T}) = f$$

или, сославшись на (4.2.2),

$$N \cdot (\vartheta \hat{T} + \hat{P} + \hat{T} \cdot \nabla w) = f. \quad (4.3.6)$$

Уравнения равновесия в объеме и на поверхности оказались выраженными через один и тот же несимметричный тензор второго ранга

$$\hat{\Theta} = \vartheta \hat{T} + \hat{P} + \hat{T} \cdot \nabla w = \vartheta \hat{T} + \hat{P} + \hat{T} \cdot \hat{\varepsilon} + (\omega \times \hat{T})^T. \quad (4.3.7)$$

Это можно было предвидеть, так как уравнение равновесия в объеме выражает условие обращения в нуль главного вектора

внешних сил, действующих на любой объем V^{*} , мысленно выделенный в V^{*} -объеме:

$$\iint_{O^{*}} N^{*} \cdot \hat{T}^{*} dO + \iiint_{V^{*}} \rho^{*} K^{*} d\tau^{*} = 0.$$

Заменив подынтегральные выражения их вышеприведенными значениями

$$N^{*} \cdot \hat{T}^{*} dO = N \cdot \hat{T} dO + \eta N \cdot \hat{\Theta} dO, \quad \rho^{*} K^{*} d\tau^{*} = \rho K d\tau + \eta \rho k d\tau,$$

получаем

$$\iint_{O'} N \cdot \hat{T} dO + \iiint_{V'} \rho K d\tau + \eta \left(\iint_{O'} N \cdot \hat{\Theta} dO + \iiint_{V'} \rho k d\tau \right) = 0$$

и при обозначении (4.3.7) снова приходим к уравнению равновесия (4.3.4). Внешне полученные уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \hat{\Theta} + \rho k = 0, \quad N \cdot \hat{\Theta} = f \quad (4.3.8)$$

напоминают уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \hat{T} + \rho K = 0, \quad N \cdot \hat{T} = F,$$

но не надо забывать, что тензор $\hat{\Theta}$ не равен разности тензоров $\hat{T}^{*} - \hat{T}$, определяемой тензором \hat{S} :

$$\hat{\Theta} = \hat{S} + \vartheta \hat{T} - \nabla w^{\top} \cdot \hat{T} = \hat{S} + \vartheta \hat{T} - \hat{\varepsilon} \cdot \hat{T} - \omega \times \hat{T}. \quad (4.3.9)$$

Несимметрию тензора $\hat{\Theta}$, обусловленную наличием слагаемого $\omega \times \hat{T}$, следует объяснить поворотом объемного элемента при деформации V -объема.

Тензор $\hat{\Theta}$ представляет линейный дифференциальный оператор над вектором w . При отсутствии добавочных массовых и поверхностных сил ($k = 0, f = 0$) *) задача разыскания w сведется к однородной системе линейных относительно w дифференциальных уравнений второго порядка с однородными краевыми условиями. Это — так называемые уравнения нейтрального равновесия. Они допускают, конечно, тривиальное решение $w = 0$. Но могут иметь место решения, отличные от тривиального, когда наряду с рассматриваемым состоянием равновесия V -объема, нагруженного силами K, F , существуют близкие к нему равновесные состояния. Значения параметров нагружения, для которых уравнения нейтрального равновесия имеют нетривиальное решение, называются бифуркационными. Сформулированная однородная краевая задача позволяет найти бифуркационные

*) Или силы k, f представляются линейными дифференциальными операциями над w .

параметры, но не определяет целиком форм равновесия V -объема, отличающихся от исходной. Их разыскание потребовало бы рассмотрения полных уравнений равновесия V^* -объема.

4.4. Представление тензора $\hat{\Theta}$. В соответствии с (4.3.7), (4.2.3), (4.2.10) тензор $\hat{\Theta}$ представляется суммой тензоров

$$\hat{\Theta} = \hat{R} + \hat{T} \cdot \nabla w, \quad \hat{R} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} [(b^0 \hat{M} - b^1 \hat{M}^2 + b^{-1} \hat{G}) - 2(c^1 \hat{M} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \hat{M} + c^{\hat{\varepsilon}})], \quad (4.4.1)$$

причем по (4.1.13), (4.2.5)

$$b^s = \frac{\partial c}{\partial I_k} l_k \quad (s = 0, 1, -1). \quad (4.4.2)$$

Величины l_k определяются формулами (4.1.14), приводимыми к виду

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= 2g^{mn} e_{mn} = 2\hat{M} \cdot \hat{\varepsilon}, \quad l_2 = 2(\vartheta I_2 - I_3 g_{sk} G^{sm} G^{kn} e_{mn}) = \\ &= 2(I_2 \hat{G} - I_3 \hat{M}^{-1}) \cdot \hat{\varepsilon}, \quad l_3 = 2I_3 \vartheta = 2I_3 \hat{G} \cdot \hat{\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

причем $I_k = I_k(\hat{G}^\times) = I_k(\hat{M})$. Это преобразование и используемое далее основано на соотношениях

$$\vartheta = G^{mn} e_{mn}, \quad \hat{M} = g^{sk} R_s R_k, \quad \hat{M}^{-1} = g_{sk} R^s R^k = g_{sk} G^{sq} G^{kt} R_q R_t.$$

Теперь симметричный тензор \hat{R} представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sqrt{I_3} \hat{R} &= \left[\left(\frac{\partial c}{\partial I_1} g^{st} - \frac{\partial c}{\partial I_1} g^{sk} g^{rt} G_{kr} + \frac{\partial c}{\partial I_1} G^{st} \right) g^{mn} + \right. \\ &+ \left(\frac{\partial c}{\partial I_2} g^{st} - \frac{\partial c}{\partial I_2} g^{sk} g^{rt} G_{kr} + \frac{\partial c}{\partial I_2} G^{st} \right) (I_2 G^{mn} - I_3 g_{qk} G^{qm} G^{kn}) + \\ &+ \left(\frac{\partial c}{\partial I_3} g^{st} - \frac{\partial c}{\partial I_3} g^{sk} g^{rt} G_{kr} + \frac{\partial c}{\partial I_3} G^{st} \right) I_3 G^{mn} - \\ &\left. - (c g^{sm} g^{nt} + c G^{sm} G^{nt}) \right] R_s R_t e_{mn}. \quad (4.4.4) \end{aligned}$$

Его контравариантные компоненты определяются формулами

$$R^{st} = c^{stmn} e_{mn}, \quad c^{stmn} = c^{tsmn} = c^{stnm}, \quad (4.4.5)$$

причем c^{stmn} — компоненты тензора четвертого ранга $(4)\hat{C}$, определяемые величинами в квадратных скобках в формуле (4.4.4).

Далее тензоры \hat{M} , \hat{M}^{-1} , \hat{G} , $\hat{\varepsilon}$ представляются в главных осях \hat{e}^s тензора \hat{M} :

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \sum_{r=1}^3 G_r \hat{e}^r \hat{e}^r, \quad \hat{M}^{-1} = \sum_{r=1}^3 \frac{\hat{e}^r \hat{e}^r}{G_r}, \quad \hat{G} = \sum_{r=1}^3 \hat{e}^r \hat{e}^r, \quad \hat{\varepsilon} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{(rs)} \hat{e}^r \hat{e}^s \\ &(\varepsilon_{(rs)} = \hat{e}^r \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \hat{e}^s). \end{aligned}$$

Вспомнив еще выражения инвариантов

$$I_1 = G_1 + G_2 + G_3, \quad I_2 = G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_3 G_1, \quad I_3 = G_1 G_2 G_3$$

и легко проверяемые соотношения

$$I_2 - \frac{I_3}{G_r} = G_r (I_1 - G_r) = G_r \frac{\partial I_2}{\partial G_r}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial G_r} = \frac{I_3}{G_r}, \quad (4.4.6)$$

можно записать выражения l_k также в виде *)

$$l_1 = 2G_r \varepsilon_{(rr)}, \quad l_2 = 2G_r \frac{\partial I_2}{\partial G_r} \varepsilon_{(rr)}, \quad l_3 = 2I_3 \varepsilon_{(rr)}.$$

Это позволяет значительно упростить запись выражения \hat{R}

$$\frac{1}{4} \sqrt{I_3} \hat{R} = G_r \left(\frac{\partial c}{\partial G_r} \hat{M} - \frac{\partial c}{\partial G_r} \hat{M}^2 + \frac{\partial c}{\partial G_r} \hat{G} \right) \varepsilon_{(rr)} - (c G_r G_s + c) \tilde{e} \tilde{e}_{(rs)}. \quad (4.4.7)$$

После замены \hat{M} его представлением в главных осях, а c их выражениями

$$c = \frac{\partial A}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial A}{\partial I_2}, \quad c = \frac{\partial A}{\partial I_2}, \quad c = I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3}$$

получаем также

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sqrt{I_3} \hat{R} = G_r G_s \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial G_r} \frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - G_s) \frac{\partial}{\partial G_r} \frac{\partial A}{\partial I_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{I_3}{G_s} \frac{\partial}{\partial G_r} \frac{\partial A}{\partial I_3} \right] \tilde{e} \tilde{e}_{(rr)} + \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{I_3}{G_r G_s} \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) (\tilde{e} \tilde{e}_{(rr)} - \tilde{e} \tilde{e}_{(rs)}) \right\}. \end{aligned}$$

Величина в квадратных скобках, обозначаемая $C(G_r, G_s)$, симметрична относительно ее аргументов и представляется в виде

$$\begin{aligned} C(G_r, G_s) = \frac{\partial^2 A}{\partial I_1^2} + (I_1 - G_s)(I_1 - G_r) \frac{\partial^2 A}{\partial I_2^2} + \frac{I_3^2}{G_r G_s} \frac{\partial^2 A}{\partial I_3^2} + \\ + (2I_1 - G_r - G_s) \frac{\partial^2 A}{\partial I_1 \partial I_2} + I_3 \left(\frac{I_1 - G_r}{G_s} + \frac{I_1 - G_s}{G_r} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial I_2 \partial I_3} + \\ + I_3 \frac{G_r + G_s}{G_r G_s} \frac{\partial^2 A}{\partial I_3 \partial I_1}. \quad (4.4.8) \end{aligned}$$

Вместе с тем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial G_s} &= \frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - G_s) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{I_3}{G_s} \frac{\partial A}{\partial I_3}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial G_r \partial G_s} &= C(G_r, G_s) + (1 - \delta_{sr}) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{I_3}{G_s G_r} \left(1 - \frac{G_r}{G_s} \delta_{sr} \right) \frac{\partial A}{\partial I_3} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.9)$$

*) Далее знаки суммирования по одинаковым индексам опускаются.

и выражение \hat{R} представляется в видах

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sqrt{I_3} \hat{R} = G_r G_s \left[C(G_r, G_s) \tilde{e} \tilde{e}_{(rr)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \frac{I_3}{G_r G_s} \right) (\tilde{e} \tilde{e}_{(rr)} - \tilde{e} \tilde{e}_{(rs)}) \right] = \\ = \left[G_r G_s \frac{\partial^2 A}{\partial G_r \partial G_s} e_{(rr)} + \left(G_s^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) e_{(ss)} \right] \tilde{e} \tilde{e} - \\ - \left(G_r G_s \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \tilde{e} \tilde{e}_{(rs)} \quad (4.4.10) \end{aligned}$$

или, в развернутой форме,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sqrt{I_3} \hat{R} = G_r G_s \frac{\partial^2 A}{\partial G_r \partial G_s} e_{(rr)} \tilde{e} \tilde{e} - \left[\left(G_1 G_2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) e_{(12)} (\tilde{e} \tilde{e}^{\frac{1}{2}} + \tilde{e} \tilde{e}^{\frac{2}{1}}) + \right. \\ \left. + \left(G_2 G_3 \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) e_{(23)} (\tilde{e} \tilde{e}^{\frac{2}{3}} + \tilde{e} \tilde{e}^{\frac{3}{2}}) + \right. \\ \left. + \left(G_3 G_1 \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) e_{(31)} (\tilde{e} \tilde{e}^{\frac{3}{1}} + \tilde{e} \tilde{e}^{\frac{1}{3}}) \right]. \quad (4.4.11) \end{aligned}$$

Величины $\frac{\partial^2 A}{\partial G_r \partial G_s}$ могут быть выражены через главные напряжения t_s и их производные по G_r . Действительно, сославшись на (2.6.8) гл. VIII, имеем

$$\frac{2G_s}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial A}{\partial G_s} = t_s, \quad \frac{2G_s}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 A}{\partial G_r \partial G_s} = \frac{\partial t_s}{\partial G_r} + t_s \left(\frac{1}{2G_r} - \frac{\delta_{rs}}{G_s} \right). \quad (4.4.12)$$

Заметим еще, что тензор $\hat{T} \cdot \nabla \mathbf{w}$ представляется в виде

$$\hat{T} \cdot \nabla \mathbf{w} = t_s \tilde{e} \tilde{e} \cdot (\hat{e} - \hat{\Omega}) = t_s \tilde{e} \tilde{e} [e_{(sr)} + (\tilde{e} \times \tilde{e}) \cdot \omega]. \quad (4.4.13)$$

4.5. Трехосное напряженное состояние. При равномерном растяжении по направлениям осей декартовой системы $OXYZ$ главные направления \tilde{e} совпадают с направлениями этих осей i_s . За материальные координаты принимаются координаты точки x_s в V -объеме. Итак,

$$\tilde{e}^r = i_r, \quad e_{(rs)} = e_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial x_s} + \frac{\partial w_s}{\partial x_r} \right),$$

где w_r — проекции вектора \mathbf{w} на координатные оси. Принимается обозначение

$$G_s = \kappa_s^2 = (1 + \delta_s)^2, \quad (4.5.1)$$

где δ_s — главные относительные удлинения. Тензоры \hat{R} , $\hat{T} \cdot \nabla \mathbf{w}$ представляются линейными дифференциальными операторами над вектором \mathbf{w} с постоянными коэффициентами.

Предполагая, что массовые силы отсутствуют, а поверхностное нагружение представлено, во-первых, нагрузкой, не изменяющейся при сообщении точкам V -объема перемещения \mathbf{w} («мертвая нагрузка»), и, во-вторых, равномерно распределенным по всей поверхности тела давлением p , нормальным к деформированной поверхности O^* («следящее давление»), имеем по (4.1.15) и (4.3.5)

$$\mathbf{f} = -p(\boldsymbol{\vartheta}\mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{w}^T). \quad (4.5.2)$$

Уравнения равновесия в объеме и на поверхности (4.3.8) записываются в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}} &= \nabla \cdot \hat{\mathbf{R}} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{w} = 0, \\ \mathbf{N} \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}} &= \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{R}} + \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{w} = -p(\boldsymbol{\vartheta}\mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{w}^T). \end{aligned}$$

Повторяя ход доказательства теоремы Кирхгоффа о единственности решения уравнений линейной теории упругости (п. 4.1 гл. IV), рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathbf{w} \cdot \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}} d\tau &= \iiint_V [\nabla \cdot (\hat{\boldsymbol{\Theta}} \cdot \mathbf{w}) - \hat{\boldsymbol{\Theta}} \cdot \cdot \nabla \mathbf{w}^T] d\tau = \\ &= \int_O \mathbf{N} \cdot \hat{\boldsymbol{\Theta}} \cdot \mathbf{w} dO - \iiint_V \hat{\boldsymbol{\Theta}} \cdot \cdot \nabla \mathbf{w}^T d\tau = 0 \end{aligned}$$

или

$$p \int_O (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{w} - \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{w}) dO + \iiint_V (\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \cdot \nabla \mathbf{w}^T d\tau = 0.$$

Поверхностный интеграл преобразуется в объемный

$$\begin{aligned} \int_O (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{w} - \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{w}) dO &= \iiint_V [\nabla \cdot \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{w} - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{w})] d\tau = \\ &= \iiint_V (\boldsymbol{\vartheta}^2 + \mathbf{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{w} \cdot \nabla \cdot \nabla \mathbf{w}^T - \nabla \mathbf{w}^T \cdot \cdot \nabla \mathbf{w}^T) d\tau = \\ &= \iiint_V (\boldsymbol{\vartheta}^2 - \nabla \mathbf{w}^T \cdot \cdot \nabla \mathbf{w}^T) d\tau, \end{aligned}$$

так как $\nabla \cdot \nabla \mathbf{w}^T = \nabla \boldsymbol{\vartheta}$. Приходим к соотношению

$$\iiint_V \{[\hat{\mathbf{R}} + (\hat{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{w} - p \nabla \mathbf{w}^T)] \cdot \cdot \nabla \mathbf{w}^T + p \boldsymbol{\vartheta}^2\} d\tau = \iiint_V 2\Phi d\tau = 0. \quad (4.5.3)$$

Квадратичная форма компонент тензора $\nabla \mathbf{w}$ под знаком интеграла оказывается равной

$$\begin{aligned} 2\Phi &= \frac{4}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} \left\{ \kappa_r^2 \kappa_s^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \kappa_r^2 \partial \kappa_s^2} \varepsilon_{rr} \varepsilon_{ss} - 2 \left[\kappa_1^2 \kappa_2^2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa_3^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \varepsilon_{12}^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \kappa_2^2 \kappa_3^2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa_1^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \varepsilon_{23}^2 + \kappa_3^2 \kappa_1^2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa_2^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \varepsilon_{31}^2 \right] \right\} + \\ &\quad + p \boldsymbol{\vartheta}^2 + [(\hat{\mathbf{T}} - p \hat{\mathbf{E}}) \cdot \hat{\mathbf{e}} - (\hat{\mathbf{T}} + p \hat{\mathbf{E}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}] \cdot \cdot \nabla \mathbf{w}^T. \quad (4.5.4) \end{aligned}$$

Она в общем случае не знакоопределенна — ее знак зависит от задания удельной потенциальной энергии деформации и нагружения тела. Поэтому, конечно, не исключено существование отличных от нуля значений переменных $\partial w_q / \partial x_k$ формы, для которых интеграл (4.5.3) отличен от нуля.

4.6. Гидростатическое напряженное состояние. В этом наиболее простом случае

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa, \quad \hat{T} = -p\hat{E}, \quad I_1 = 3\kappa^2, \quad I_2 = 3\kappa^4, \quad I_3 = \kappa^6. \quad (4.6.1)$$

Удельную потенциальную энергию деформации можно рассматривать как функцию от κ^2 , зависящую от этого аргумента через инварианты I_k :

$$A(I_1, I_2, I_3) = A(3\kappa^2, 3\kappa^4, \kappa^6) = \bar{A}(\kappa^2). \quad (4.6.2)$$

Поэтому

$$\frac{d\bar{A}}{d\kappa^2} = 3 \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + 2\kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^4 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) = 3 \left(\frac{\partial A}{\partial \kappa_r^2} \right)_{\kappa_r = \kappa}$$

и, далее, по (4.4.8), (4.4.9)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{A}}{(d\kappa^2)^2} = & 6 \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) + 9C(\kappa^2, \kappa^2) = -3 \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) + \\ & + 9 \left[\frac{\partial^2 A}{\partial G_r \partial G_s} + \delta_{sr} \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \right]_{\kappa_r = \kappa_s = \kappa}. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Теперь выражение (4.4.11) тензора \hat{R} и дифференциальное уравнение равновесия записываются в виде

$$\hat{R} = 4\kappa \left\{ \left[\frac{1}{9} \frac{d^2 \bar{A}}{(d\kappa^2)^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \right] \hat{\Theta} \hat{E} - \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \hat{e} \right\}, \quad (4.6.4)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\Theta} = \nabla \cdot \hat{R} - p \nabla \cdot \nabla w = & 4\kappa \left\{ \left[\frac{1}{9} \frac{d^2 \bar{A}}{(d\kappa^2)^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \right] \nabla \hat{\Theta} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) (\nabla^2 w + \nabla \hat{\Theta}) \right\} - p \nabla^2 w = 0. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

Эта форма уравнений равновесия подсказывает целесообразность ввести обозначения приведенных коэффициентов Ляме

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} + \bar{\mu} &= \frac{4}{9} \kappa \left[\frac{d^2 \bar{A}}{(d\kappa^2)^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \right], \\ \bar{\mu} &= - \left[p + 2\kappa \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.6)$$

Тогда эти уравнения примут известный вид уравнений равновесия в перемещениях линейно-упругого изотропного тела

$$(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \nabla \hat{\Theta} + \bar{\mu} \nabla^2 w = 0, \quad (4.6.7)$$

а выражение тензора $\hat{\Theta}$ представляется в виде

$$\hat{\Theta} = \bar{\lambda} \hat{\Theta} \hat{E} + 2\bar{\mu} \hat{e} - p (\hat{\Theta} \hat{E} - \nabla \mathbf{w}^T), \quad (4.6.8)$$

откуда снова приходим к (4.6.7).

Из формул (4.6.6) находим также

$$\bar{\lambda} + \frac{2}{3} \bar{\mu} = \frac{4}{9} \left(\kappa \frac{d^2 \bar{A}}{(d\kappa^2)^2} + \frac{3}{4} p \right). \quad (4.6.9)$$

Но, введя в рассмотрение переменную $\kappa^3 = \tau$, равную отношению объема тела при гидростатическом сжатии к начальному объему ($\tau = \sqrt{I_3}$), имеем

$$\frac{d\bar{A}}{d\tau} = \frac{2}{3\kappa} \frac{d\bar{A}}{d\kappa^2}, \quad \frac{d^2 \bar{A}}{d\tau^2} = \frac{4}{9\kappa} \frac{d}{d\kappa^2} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{d\bar{A}}{d\kappa^2} \right) = \frac{4\kappa}{9\tau} \frac{d^2 \bar{A}}{(d\kappa^2)^2} - \frac{1}{3\tau} \frac{d\bar{A}}{d\tau}$$

и, сославшись на (1.2.3), приходим к соотношению

$$\bar{\lambda} + \frac{2}{3} \bar{\mu} = \tau \frac{d^2 \bar{A}}{d\tau^2}, \quad (4.6.10)$$

выражающему «приведенный» модуль объемного сжатия через вторую производную удельной потенциальной энергии деформации по параметру, определяющему отношение объемов.

При учете соотношений (4.6.3), (4.6.6) квадратичная форма (4.5.4) преобразуется к виду

$$2\Phi = (\bar{\lambda} - p) \hat{\Theta}^2 + 2(\bar{\mu} + p) I_1(\hat{e}^2) + p \hat{\Theta}^2 - 2p \hat{e} \cdot \nabla \mathbf{w}^T = \bar{\lambda} \hat{\Theta}^2 + 2\bar{\mu} I_1(\hat{e}^2) = 2\tilde{A}.$$

Здесь

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} \bar{\lambda} \hat{\Theta}^2 + \bar{\mu} I_1(\hat{e}^2) \quad (4.6.11)$$

— выражение удельной потенциальной энергии линейно-упругого изотропного тела с «приведенными» коэффициентами Ляме.

Из (4.5.3) теперь следует, что при наличии «следящего давления» и при условиях знакоопределенности \tilde{A} перемещение \mathbf{w} не может отличаться от перемещения твердого тела. Эти условия в соответствии с (4.6.6), (4.6.10) и (3.3.5) гл. IV приводят к неравенствам

$$\bar{k} = \bar{\lambda} + \frac{2}{3} \bar{\mu} = \tau \frac{d^2 \bar{A}}{(d\tau^2)^2} > 0, \quad \bar{\mu} = -p - 2\kappa \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) > 0. \quad (4.6.12)$$

Первое из них представляется интуитивно естественным требованием к поведению упругого материала — темп роста потенциальной энергии деформации увеличивается при росте деформации.

Было показано (п. 2.9 гл. VIII), что одним из условий положительности A в области достаточно малых деформаций

(при $\kappa \approx 1$) служит неравенство (2.9.8) гл. VIII. Можно предположить, что оно выполняется и при немалых деформациях:

$$-2\kappa \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) > 0.$$

Второе неравенство (4.6.12) выражает, что эта величина, характеризующая материал, а при гидростатическом сжатии являющаяся функцией давления, не только положительна, но и превосходит приложенное давление p .

Даже при сверхвысоких давлениях не наблюдалось потери простейшей формы равновесия гидростатически сжатого тела. Задание выражения удельной потенциальной энергии, описывающей поведение материала, должно удовлетворять этим требованиям.

Например, удельная потенциальная энергия деформации в упрощенном законе состояния Синьорини ($c = 0$) по (4.1.7), (4.1.8) гл. VIII задается выражением

$$A = \frac{\sqrt{I_3}}{8} \left[(\lambda + \mu) \left(\frac{I_2^2}{I_3^2} + 3 \right) - 2(3\lambda + \mu) \left(\frac{I_2}{I_3} - 1 \right) \right] = \\ = \frac{1}{8} \left[\frac{9(\lambda + \mu)}{\kappa} - 6(3\lambda + \mu)\kappa + (9\lambda + 5\mu)\kappa^3 \right],$$

и вычисление по формулам (4.6.12) приводит к следующим соотношениям связи между «приведенными коэффициентами Ляме» и «коэффициентами Ляме» закона состояния Синьорини:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2\kappa^2} \left[(3\lambda + \mu) - \frac{\lambda + \mu}{\kappa^2} \right], \quad \bar{\mu} = \frac{1}{2\kappa^2} \left[\frac{3(\lambda + \mu)}{\kappa^2} - (3\lambda + \mu) \right]. \quad (4.6.13)$$

Конечно, $\bar{\lambda} = \lambda$, $\bar{\mu} = \mu$ при $\kappa = 1$. Здесь $\bar{\mu} > 0$, $\bar{\lambda} + \frac{2}{3}\bar{\mu} > 0$, так как $\kappa < 1$.

4.7. Одноосное растяжение. При деформации растяжения стержня по оси x_3

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \chi, \quad \kappa_3 = \kappa; \quad I_1 = 2\chi^2 + \kappa^2, \quad I_2 = \chi^2(\chi^2 + 2\kappa^2), \quad I_3 = \chi^4\kappa^2. \quad (4.7.1)$$

Условия обращения в нуль главных напряжений t_1, t_2

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} + (\chi^2 + \kappa^2) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^2\kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} = 0 \quad (4.7.2)$$

позволяют представить главное напряжение t_3

$$t_3 = \frac{2\kappa}{\chi^2} \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + 2\chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^4 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \quad (4.7.3)$$

в одном из двух видов:

$$t_3 = \frac{2}{\chi^2\kappa} (\kappa^2 - \chi^2) \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right) = \frac{2\kappa}{\chi^2} (\kappa^2 - \chi^2) \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right). \quad (4.7.4)$$

Тензор \hat{R} по (4.4.10) представляется выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \chi^2 \kappa \hat{R} = & \chi^4 \left[C(\chi^2, \chi^2) (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 \varepsilon_{22} + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \varepsilon_{11}) \right] + \\ & + \chi^2 \chi^2 \left[C(\chi^2, \chi^2) + \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \right] [(\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2) \varepsilon_{33} + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})] + \\ & + \chi^4 C(\chi^2, \chi^2) \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \varepsilon_{33} - \chi^4 \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) \varepsilon_{12} (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1) - \\ & - \chi^2 \chi^2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) [\varepsilon_{23} (\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2) + \varepsilon_{31} (\mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3)]. \quad (4.7.5) \end{aligned}$$

Здесь по (4.4.2)

$$\begin{aligned} C(\chi^2, \chi^2) = & \frac{\partial^2 A}{\partial I_1^2} + (\chi^2 + \chi^2)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial I_2^2} + \chi^4 \chi^4 \frac{\partial^2 A}{\partial I_3^2} + \\ & + 2(\chi^2 + \chi^2) \frac{\partial^2 A}{\partial I_1 \partial I_2} + 2\chi^2 \chi^2 (\chi^2 + \chi^2) \frac{\partial^2 A}{\partial I_2 \partial I_3} + 2\chi^2 \chi^2 \frac{\partial^2 A}{\partial I_3 \partial I_1}, \\ C(\chi^2, \chi^2) = & \frac{\partial^2 A}{\partial I_1^2} + 4\chi^4 \frac{\partial^2 A}{\partial I_2^2} + \chi^8 \frac{\partial^2 A}{\partial I_3^2} + 4\chi^2 \frac{\partial^2 A}{\partial I_1 \partial I_2} + \\ & + 4\chi^6 \frac{\partial^2 A}{\partial I_2 \partial I_3} + 2\chi^4 \frac{\partial^2 A}{\partial I_3 \partial I_1}, \\ C(\chi^2, \chi^2) = & \frac{\partial^2 A}{\partial I_1^2} + 2\chi^2 (\chi^2 + \chi^2) \frac{\partial^2 A}{\partial I_2^2} + \chi^6 \chi^2 \frac{\partial^2 A}{\partial I_3^2} + \\ & + (3\chi^2 + \chi^2) \frac{\partial^2 A}{\partial I_1 \partial I_2} + \chi^4 (\chi^2 + 2\chi^2) \frac{\partial^2 A}{\partial I_3 \partial I_2} + \chi^2 (\chi^2 + \chi^2) \frac{\partial^2 A}{\partial I_3 \partial I_1}. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

По внешнему виду тензор \hat{R} представляет тензор напряжений transversально изотропного тела. Но надо иметь в виду, что квадратичная форма

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{R} \cdot \hat{\varepsilon} = & \frac{2}{\chi \chi^2} \left\{ \chi^4 C(\chi^2, \chi^2) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + 2\chi^4 \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) (\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2) + \right. \\ & + 2\chi^2 \chi^2 C(\chi^2, \chi^2) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \varepsilon_{33} + \chi^4 C(\chi^2, \chi^2) \varepsilon_{33}^2 + \\ & \left. + 2\chi^2 \chi^2 \left(\frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right) [(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2] \right\} \quad (4.7.7) \end{aligned}$$

в transversально-изотропном теле представляет удельную потенциальную энергию деформации и поэтому знакоопределенно-положительна, тогда как в задаче растяжения (или сжатия при $t_3 < 0$) нелинейно-упругого тела суждение о знаке этой формы связано со свойствами материала (заданием $A(I_1, I_2, I_3)$) и степенью нагружения (величиной t_3).

Тензор $\hat{\Theta}$ определяется формулой

$$\hat{\Theta} = \hat{R} + \hat{T} \cdot \nabla \mathbf{w} = \hat{R} + t_3 \mathbf{i}_3 [\mathbf{i}_1 (\varepsilon_{31} + \omega_2) + \mathbf{i}_2 (\varepsilon_{23} - \omega_1) + \mathbf{i}_3 \varepsilon_{33}]. \quad (4.7.8)$$

4.8. Деформация кручения сжатого стержня. При деформации кручения

$$w_1 = -\alpha x_2 x_3, \quad w_2 = \alpha x_3 x_1, \quad w_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2), \quad (4.8.1)$$

так что

$$\begin{aligned} e_{ss} = e_{12} = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \quad e_{31} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right), \\ e_{23} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right), \quad e_{31} + \omega_2 = -\alpha x_2, \quad e_{23} - \omega_1 = \alpha x_1. \end{aligned}$$

Обратившись к (4.7.5), (4.7.8), (4.7.4), получим

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} = \alpha t_3 \frac{\chi^2}{\chi^2 - \chi'^2} \left[(i_2 i_3 + i_3 i_2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) + (i_3 i_1 + i_1 i_3) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) \right] + \\ + \alpha t_3 i_3 (-i_1 x_2 + i_2 x_1), \quad (4.8.2) \end{aligned}$$

и уравнения равновесия в объеме сводятся к одному лишь уравнению

$$\nabla \cdot \hat{\Theta} = 0: \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0. \quad (4.8.3)$$

На боковой поверхности стержня ($N = N_1 i_1 + N_2 i_2$)

$$N \cdot \hat{\Theta} = \alpha t_3 \frac{\chi^2}{\chi^2 - \chi'^2} \left[N_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) + N_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right],$$

и при отсутствии на ней поверхностных сил

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = N_1 x_2 - N_2 x_1. \quad (4.8.4)$$

Вектор напряжений в поперечном сечении определяется соотношением

$$f = i_3 \cdot \Theta = \alpha t_3 \left\{ \frac{\chi^2}{\chi^2 - \chi'^2} \left[i_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) + i_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right] + (i_2 x_1 - i_1 x_2) \right\}. \quad (4.8.5)$$

Оси OX , OY направлены по главным центральным осям инерции поперечного сечения стержня в его начальном состоянии. Но при сжатии стержня его поперечное сечение подвергалось преобразованию подобия

$$x_1 = \chi a_1, \quad x_2 = \chi a_2. \quad (4.8.6)$$

Поэтому оси OX , OY остаются главными центральными осями сжатого стержня

$$\int_S \int x_1 dO = 0, \quad \int_S \int x_2 dO = 0, \quad \int_S \int x_1 x_2 dO = 0, \quad (4.8.7)$$

тогда как площадь его поперечного сечения, полярный момент инерции и жесткость при кручении выражаются через эти величины в начальном состоянии с помощью равенств

$$S = \kappa^2 S_0, \quad I_p = \kappa^4 I_p^0, \quad C = \kappa^4 C_0. \quad (4.8.8)$$

Обратившись теперь к вычислению главного вектора сил в поперечном сечении сжатого стержня, имеем по (4.8.7), (4.8.5)

$$\iint_S \mathbf{f} dO = \alpha t_3 \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - \chi^2} \left[i_1 \iint_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_2 \right) dO + i_2 \iint_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + x_1 \right) dO \right].$$

Нетрудно проверить, что эта величина равна нулю. Действительно, по (4.8.3), (4.8.4) имеем, например,

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_2 \right) dO &= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right] dO = \oint_{\Gamma} x_1 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial N} - (N_1 x_2 - N_2 x_1) \right] dl = 0. \end{aligned}$$

Переходим к вычислению главного момента напряжений в поперечном сечении

$$\iint_S (i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3) \times \mathbf{f} dO = i_3 m_3 + x_3 i_3 \times \iint_S \mathbf{f} dO = i_3 m_3,$$

так как по доказанному главный вектор их равен нулю. Имеем теперь по (4.8.5)

$$m_3 = \alpha t_3 \left\{ \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - \chi^2} \iint_S \left[x_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + x_1 \right) - x_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_2 \right) \right] dO + I_p \right\}$$

и по (4.8.8), а также (3.13.13) гл. VI

$$m_3 = \alpha t_3 \kappa^4 \left(\frac{\kappa^2}{\kappa^2 - \chi^2} C_0 + I_p^0 \right). \quad (4.8.9)$$

Крутящий момент может оказаться равным нулю, если

$$\frac{\kappa^2}{\chi^2} = \frac{I_p^0 - C_0}{I_p^0}. \quad (4.8.10)$$

Известно, что $I_p^0 \geq C_0$, причем равенство возможно только для круглого поперечного сечения и концентрического кольца. Для большинства материалов при сжатии длина стержня уменьшается ($\kappa < 1$), а его поперечные размеры увеличиваются

($\chi > 1$). Итак, как левая, так и правая части равенства (4.8.10) заключены в интервале $(0, 1)$:

$$0 < \frac{\kappa^2}{\chi^2} = 1 - \frac{C_0}{I_p^0} < 1,$$

так что по заданным геометрическим характеристикам стержня, если его поперечное сечение отлично от круга (или кольца), может быть определено такое (бифуркационное) значение параметра κ^2/χ^2 , при котором деформация сжатия сопровождается деформацией кручения при отсутствии крутящего момента на торце стержня.

Значение сжимающей силы Q , при котором может иметь место это явление, ее «критическое» значение, определяется формулой (4.7.4):

$$Q = |t_3| \chi^2 S_0 = \frac{2S_0}{\kappa} (\chi^2 - \kappa^2) \left(\frac{\partial A}{\partial I_1} + \chi^2 \frac{\partial A}{\partial I_2} \right). \quad (4.8.11)$$

Три неизвестных Q , χ , κ определяются из трех уравнений: (4.8.10), (4.8.11) и уравнения (4.7.2):

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} + (\chi^2 + \kappa^2) \frac{\partial A}{\partial I_2} + \chi^2 \kappa^2 \frac{\partial A}{\partial I_3} = 0. \quad (4.8.12)$$

В случае несжимаемого материала это уравнение отпадает (оно служит для определения неизвестной $\partial A / \partial I_3$) и должно быть заменено условием несжимаемости $\chi^2 \kappa = 1$. Получаем

$$Q = \frac{2S_0 C_0}{I_0 - C_0} \left[\left(1 - \frac{C_0}{I_0} \right)^{1/3} \frac{\partial A}{\partial I_1} + \frac{\partial A}{\partial I_2} \right], \quad (4.8.13)$$

причем A — функция инвариантов I_1, I_2 :

$$I_1 = \frac{\kappa^3 + 2}{\kappa}, \quad I_2 = \frac{1 + 2\kappa^3}{\kappa^2}, \quad \kappa = \left(1 - \frac{C_0}{I_0} \right)^{1/3}. \quad (4.8.14)$$

Например, для стержня эллиптического сечения из «неогукова» материала (п. 1.4)

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{6} E I_1, \quad 1 - \frac{C_0}{I_0} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2, \\ Q &= \frac{1}{3} E S_0 \frac{C_0}{I_0} \left(1 - \frac{C_0}{I_0} \right)^{-2/3} = \frac{2}{3} E S_0 \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right)^{1/3}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8.15)$$

§ 5. Эффекты второго порядка

5.1. Выделение линейных слагаемых в законе состояния.

В рассматриваемых далее решениях нелинейных задач предполагается малость производных перемещений по координатам начального состояния:

$$\left| \frac{\partial u_s}{\partial a_k} \right| \ll 1 \quad (5.1.1)$$

и допускается пренебрежение слагаемыми третьей и более высоких степеней относительно этих величин. Сохраняются их произведения и квадраты.

Будем исходить из закона состояния в форме Фингера (2.4.1) гл. VIII; приняв в качестве материальных декартовы координаты точки в начальном состоянии ($q^s = a_s$), получим

$$\hat{T} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} (\overset{0}{c}\hat{M} - \overset{1}{c}\hat{M}^2 + \overset{-1}{c}\hat{E}), \quad (5.1.2)$$

где $\hat{E} = i_s i_s$ — единичный тензор. Базисные векторы v - и V -объемов равны

$$r_s = r^s = i_s, \quad R_s = \frac{\partial}{\partial a_s} (r + u) = i_s + \frac{\partial u}{\partial a_s}. \quad (5.1.3)$$

Вспомнив определение (5.1.1) гл. II тензора \hat{M} , имеем

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \nabla R^r \cdot \nabla R = R_s r^s \cdot r^k R_k = \\ &= \left(i_s + \frac{\partial u}{\partial a_s} \right) \left(i_s + \frac{\partial u}{\partial a_s} \right) = \hat{E} + i_s \frac{\partial u}{\partial a_s} + \frac{\partial u}{\partial a_s} i_s + \frac{\partial u}{\partial a_s} \frac{\partial u}{\partial a_s} = \\ &= \hat{E} + (i_s i_k + i_k i_s) \frac{\partial u_k}{\partial a_s} + i_k i_r \frac{\partial u_k}{\partial a_s} \frac{\partial u_r}{\partial a_s} \end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned} (i_s i_k + i_k i_s) \frac{\partial u_k}{\partial a_s} &= i_s i_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial a_s} + \frac{\partial u_s}{\partial a_k} \right) = 2\hat{e}, \\ \nabla u^r \cdot \nabla u &= i_k i_m \frac{\partial u_k}{\partial a_m} \cdot i_s i_r \frac{\partial u_r}{\partial a_s} = i_k i_r \frac{\partial u_k}{\partial a_s} \frac{\partial u_r}{\partial a_s}, \end{aligned}$$

причем \hat{e} — линейный тензор деформации, ∇u — градиент вектора u , а индексом «т» обозначается операция транспонирования. Вспомнив также (1.2.13) гл. II, а также (I.6.12), имеем

$$\nabla u^r \cdot \nabla u = (\hat{e} + \hat{\Omega}) \cdot (\hat{e} - \hat{\Omega}) = \hat{e}^2 + \hat{E}\omega \cdot \omega - \omega\omega + \omega \times \hat{e} + (\omega \times \hat{e})^r.$$

Итак,

$$\hat{M} = \hat{E} + 2\hat{e} + \nabla u^r \cdot \nabla u = \hat{E} + 2\hat{e} + \hat{e}^2 + \hat{E}\omega \cdot \omega - \omega\omega + \omega \times \hat{e} + (\omega \times \hat{e})^r \quad (5.1.4)$$

и при оговоренных пренебрежениях

$$\hat{M}^2 = \hat{E} + 4\hat{e} + 6\hat{e}^2 + 2[\hat{E}\omega \cdot \omega - \omega\omega + \omega \times \hat{e} + (\omega \times \hat{e})^r]. \quad (5.1.5)$$

Сославшись на формулы

$$I_2(\hat{M}) = \frac{1}{2} [I_1^2(\hat{M}) - I_1(\hat{M}^2)],$$

$$I_3(\hat{M}) = \frac{1}{3} [I_1(\hat{M}^3) - I_1(\hat{M})[I_1(\hat{M}^2) - I_2(\hat{M})]],$$

учитывая, что первый инвариант тензора $\omega \times \hat{e}$ равен нулю [поскольку \hat{e} — симметричный тензор; см. (1.5.9)], и вспомнив, что $I_k(\hat{M}) = I_k(\hat{G}^\times) = I_k$, получаем

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 3 + 2I_1(\hat{e}) + I_1(\hat{e}^2) + 2\omega \cdot \omega = 3 + 2\vartheta + I_1(\hat{e}^2) + 2\omega \cdot \omega, \\ I_2 &= 3 + 4\vartheta + 2\vartheta^2 + 4\omega \cdot \omega, \\ I_3 &= 1 + 2\vartheta + 2\vartheta^2 + 2\omega \cdot \omega - I_1(\hat{e}^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.1.6)$$

Подстановка в (5.1.2) позволяет теперь представить тензор напряжений в виде

$$\begin{aligned} \hat{T} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left\{ \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - 1) \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right] \hat{E} + \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - 2) \frac{\partial A}{\partial I_2} \right] 2\hat{e} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - 6) \frac{\partial A}{\partial I_2} \right] \hat{e}^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - 2) \frac{\partial A}{\partial I_2} \right] [E\omega \cdot \omega - \omega\omega + \omega \times \hat{e} + (\omega \times \hat{e})^T] \right\}. \quad (5.1.7) \end{aligned}$$

Инварианты $I_k(\hat{\mathcal{E}}) = j_k$ тензора деформации $\hat{\mathcal{E}}$ определяются по формулам (5.4.3) гл. II:

$$j_1 = \vartheta + \omega \cdot \omega + \frac{1}{2} I_1(\hat{e}^2), \quad j_2 = \frac{1}{2} \vartheta^2 - \frac{1}{2} I_1(\hat{e}^2), \quad j_3 = 0. \quad (5.1.8)$$

Как следовало ожидать, в состав j_1 входят величины первой, j_2 — второй, j_3 — третьей степени относительно величин (5.1.1).

Теперь, сославшись на (2.5.2) гл. VIII, имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - 1) \frac{\partial A}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j_2} \left[\vartheta + \omega \cdot \omega + \frac{1}{2} I_1(\hat{e}^2) \right] + \frac{1}{4} \frac{\partial A}{\partial j_3} [\vartheta^2 - I_1(\hat{e}^2)] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j_1} + \frac{1}{2} j_1 \frac{\partial A}{\partial j_2} + \frac{1}{2} j_2 \frac{\partial A}{\partial j_3}, \\ a_1 &= \frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - 2) \frac{\partial A}{\partial I_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j_1} - \frac{1}{4} \frac{\partial A}{\partial j_2} (1 - 2\vartheta) - \frac{1}{4} \frac{\partial A}{\partial j_3} \vartheta, \\ a_2 &= \frac{\partial A}{\partial I_1} + (I_1 - 6) \frac{\partial A}{\partial I_2} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j_1} - \frac{5}{4} \frac{\partial A}{\partial j_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial j_3}, \end{aligned}$$

причем величины во второй и третьей формулах достаточно было выписать с точностью до линейных слагаемых и слагаемых, не содержащих производных перемещений.

Удельная потенциальная энергия деформации аппроксимируется формулой Мурнагана (4.6.1) гл. VIII в предположении, что начальным состоянием является натуральное

$$A = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) j_1^2 - 2\mu j_2 + \frac{1}{3} (l + 2m) j_1^3 - 2mj_1 j_2 + nj_3. \quad (5.1.9)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \lambda j_1 + \frac{1}{2} l j_1^2 - \left(m - \frac{1}{2} n\right) j_2, \\ a_1 &= \frac{1}{2} \left[\mu + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right) \vartheta\right], \quad a_2 = \frac{1}{2} (5\mu + n) \end{aligned} \right\} \quad (5.1.10)$$

и вычисленное с точностью до величин второго порядка выражение тензора напряжений приводится к виду

$$\begin{aligned} \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \hat{T}^0 + \left[\lambda \omega \cdot \omega + \left(l - m + \frac{n}{2}\right) \vartheta^2 + \frac{1}{2} (\lambda + 2m - n) I_1 (\hat{e}^2) \right] \hat{E} + \\ + 2 (\lambda \vartheta \hat{e} + 2\mu \hat{e}^2) + 2 \left(m - \frac{n}{2}\right) \vartheta \hat{e} + n \hat{e}^2 + \\ + \mu [\hat{e}^2 + E \omega \cdot \omega - \omega \omega + \omega \times \hat{e} + (\omega \times \hat{e})^T], \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

где \hat{T}^0 — тензор напряжений линейной теории упругости:

$$\hat{T}^0 = \lambda \vartheta \hat{E} + 2\mu \hat{e}. \quad (5.1.12)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{\sqrt{I_3}} = 1 - \vartheta + \dots, \quad \lambda \vartheta \hat{e} + 2\mu \hat{e}^2 = \hat{T}^0 \cdot \hat{e} = \hat{e} \cdot \hat{T}^0,$$

можно представить (5.1.11) также в виде

$$\hat{T} = \hat{T}^0 - \vartheta \hat{T}^0 + 2\hat{e} \cdot \hat{T}^0 + \hat{T}' \quad (5.1.13)$$

с тензором \hat{T}' , задаваемым выражением

$$\begin{aligned} \hat{T}' = \left[\lambda \omega \cdot \omega + \left(l - m + \frac{n}{2}\right) \vartheta^2 + \frac{1}{2} (\lambda + 2m - n) I_1 (\hat{e}^2) \right] \hat{E} + \\ + (2m - n) \vartheta \hat{e} + n \hat{e}^2 + \mu [\hat{e}^2 + \hat{E} \omega \cdot \omega - \omega \omega + \omega \times \hat{e} + (\omega \times \hat{e})^T], \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

причем последнее слагаемое может быть записано также в виде

$$\mu \nabla u^T \cdot \nabla u. \quad (5.1.15)$$

5.2. Уравнения равновесия. Уравнение статики в объеме записывается в метрике деформированного тела; векторный базис в нем задается тройкой векторов R_s , определяемых формулой (5.1.3):

$$R_s = i_s + \frac{\partial u}{\partial a_s} = i_s + i_t \frac{\partial u_t}{\partial a_s}.$$

Векторы R^s взаимного базиса с требуемой точностью (до первой степени производных перемещений) задаются выражениями

$$R^s = i_s - i_t \frac{\partial u_s}{\partial a_t}. \quad (5.2.1)$$

Действительно, при таком их определении

$$\mathbf{R}_s \mathbf{R}^s = \left(\mathbf{i}_s + \mathbf{i}_t \frac{\partial u_t}{\partial a_s} \right) \left(\mathbf{i}_s - \mathbf{i}_k \frac{\partial u_s}{\partial a_k} \right) = \hat{E} + \mathbf{i}_t \mathbf{i}_s \frac{\partial u_t}{\partial a_s} - \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t \frac{\partial u_s}{\partial a_t} = \hat{E},$$

что и требуется.

Обозначив через \mathbf{F} поверхностную силу, отнесенную к единице площади поверхности O деформированного объема V , и сославшись на (3.5.3) гл. II, имеем

$$\mathbf{F} dO = \mathbf{N} \cdot \hat{T} dO = \sqrt{I_3} n_s \mathbf{R}^s \cdot \hat{T} do.$$

Но по (5.1.13) и (5.2.1)

$$\begin{aligned} \sqrt{I_3} \hat{T} &= \hat{T}^0 + 2\hat{\varepsilon} \cdot \hat{T}^0 + \hat{T}' = \hat{T}^0 + (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \cdot \hat{T}^0 + \hat{T}', \\ n_s \mathbf{R}^s &= \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^T, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\mathbf{F} dO = (\mathbf{n} \cdot \hat{T}^0 + \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \hat{T}^0 + \mathbf{n} \cdot \hat{T}') do = \mathbf{n} \cdot \hat{\Theta} do, \quad (5.2.2)$$

причем в рассмотрение введен тензор

$$\hat{\Theta} = \hat{T}^0 + \nabla \mathbf{u} \cdot \hat{T}^0 + \hat{T}'. \quad (5.2.3)$$

Соотношение (5.2.2) применимо, очевидно, к поверхности O^* любого мысленно выделенного в деформированном теле V^* -объема. Поэтому уравнение равновесия этого объема может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \iiint_{V^*} \rho \mathbf{K} d\tau + \iint_{O^*} \mathbf{F} dO &= \iiint_{V^*} \rho_0 \mathbf{K} d\tau_0 + \iint_{O^*} \mathbf{n} \cdot \hat{\Theta} do = \\ &= \iiint_{V^*} (\rho_0 \mathbf{K} + \nabla \cdot \hat{\Theta}) d\tau_0 = 0. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия в объеме и на поверхности выражены теперь в метрике начального v -объема через тензор $\hat{\Theta}$:

$$\text{в } v: \quad \nabla \cdot \hat{\Theta} + \rho_0 \mathbf{K} = 0, \quad (5.2.4)$$

$$\text{на } o: \quad \mathbf{F} \frac{dO}{do} = \mathbf{F}^0 = \mathbf{n} \cdot \hat{\Theta}. \quad (5.2.5)$$

Здесь \mathbf{F}^0 — поверхностная сила, отнесенная к единице площади поверхности o .

Тензор $\hat{\Theta}$ представляет дифференциальный оператор над вектором \mathbf{u} . Его выражение может быть записано в виде

$$\hat{\Theta} = \hat{T}^0 + \hat{\varepsilon} \cdot \hat{T}^0 + \hat{T}' - \boldsymbol{\omega} \times \hat{T}^0, \quad (5.2.6)$$

причем последнее слагаемое представляет несимметричную часть этого тензора.

5.3. Эффекты второго порядка. Приближенное решение краевой задачи (5.2.4), (5.2.5) представляется вектором перемещения u , задаваемым геометрической суммой:

$$u = v + w. \quad (5.3.1)$$

Здесь v — вектор, определяющий решение уравнений линейной теории при заданных поверхностных силах:

$$\nabla \cdot \hat{T}^0(v) + \rho_0 K = 0, \quad n \cdot \hat{T}^0(v) = F^0, \quad (5.3.2)$$

$$\hat{T}^0(v) = \lambda \vartheta(v) \hat{E} + 2\mu \varepsilon(v). \quad (5.3.3)$$

Оно предполагается известным. Корректирующее слагаемое — вектор w — вносится, чтобы удовлетворить уравнениям, учитывающим слагаемые второй степени относительно величин (5.1.1) — производных вектора перемещения u . Поскольку оно имеет такой же порядок, дифференциальные операторы над вектором u , входящие в состав тензора $\hat{\Theta}$ (исключая \hat{T}^0), могут быть заменены с принятой ранее точностью операторами над v :

$$\left. \begin{aligned} \nabla u \cdot \hat{T}^0(u) &= \nabla(v + w) \cdot \hat{T}^0(v + w) \approx \nabla v \cdot \hat{T}^0(v), \\ \hat{T}'(u) &= \hat{T}'(v + w) \approx \hat{T}'(v). \end{aligned} \right\} \quad (5.3.4)$$

Неучтенные члены имеют по крайней мере третий порядок малости. Поскольку \hat{T}^0 — линейный оператор, имеем также

$$\hat{T}^0(u) = \hat{T}^0(v + w) = \hat{T}^0(v) + \hat{T}^0(w) \quad (5.3.5)$$

и по (5.2.3)

$$\hat{\Theta}(u) = \hat{\Theta}(v + w) = \hat{T}^0(v) + \hat{T}^0(w) + \nabla v \cdot \hat{T}^0(v) + \hat{T}'(v). \quad (5.3.6)$$

Уравнения равновесия (5.2.4), (5.2.5) в объеме и на поверхности теперь представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \hat{T}^0(v) + \rho_0 K + \nabla \cdot \hat{T}^0(w) + \nabla \cdot [\nabla v \cdot \hat{T}^0(v) + \hat{T}'(v)] &= 0, \\ n \cdot \hat{T}^0(v) - F^0 + n \cdot \hat{T}^0(w) + n \cdot [\nabla v \cdot \hat{T}^0(v) + \hat{T}'(v)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.7)$$

Вспомнив теперь, что вектор v определен уравнениями (5.3.2), приходим к уравнениям также линейной теории

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \hat{T}^0(w) + \nabla \cdot [\nabla v \cdot \hat{T}^0(v) + \hat{T}'(v)] &= 0, \\ n \cdot \hat{T}^0(w) + n \cdot [\nabla v \cdot \hat{T}^0(v) + \hat{T}'(v)] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)$$

определяющим вектор w по известным «объемным» и «поверхностным» силам

$$k = \nabla \cdot [\nabla v \cdot \hat{T}^0(v) + \hat{T}'(v)], \quad f = -n \cdot [\nabla v \cdot \hat{T}^0(v) + \hat{T}'(v)]. \quad (5.3.9)$$

Не составил бы труда также учет слагаемых второй степени в выражениях массовых и поверхностных сил K и F .

Задача будет иметь решение, если «внешние силы» \mathbf{k}, \mathbf{f} удовлетворяют уравнениям статики

$$\int_V \mathbf{k} d\tau_0 + \int_O \mathbf{f} do = 0, \quad \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{k} d\tau_0 + \int_O \mathbf{r} \times \mathbf{f} do = 0. \quad (5.3.10)$$

Выполнение первого легко проверить, преобразуя поверхностный интеграл в объемный:

$$\begin{aligned} \int_O \mathbf{f} do &= - \int_O \mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{v} \cdot \hat{T}(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})] do = \\ &= - \int_V \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})] d\tau_0 = - \int_V \mathbf{k} d\tau_0, \end{aligned}$$

что и требуется. Затруднение возникает со вторым уравнением, поскольку входящий в состав $\hat{\Theta}(\mathbf{v})$ тензор $\nabla \mathbf{v} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v})$ несимметричен. Сославшись на (II. 5.6), имеем

$$\begin{aligned} \int_O \mathbf{r} \times \mathbf{f} do &= - \int_O \mathbf{r} \times \mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{v} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})] do = \\ &= - \int_V \mathbf{r} \times \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})] d\tau_0 + 2 \int_V \mathbf{a} d\tau_0 = \\ &= - \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{k} d\tau_0 + 2 \int_V \mathbf{a} d\tau_0. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{a} — вектор, сопутствующий несимметричной части

$$-\hat{\Omega}(\mathbf{v}) \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) = -\omega \times \hat{T}^0(\mathbf{v}) \quad (5.3.11)$$

тензора $\nabla \mathbf{v} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v})$. Этот вектор может быть определен равенством

$$2\mathbf{a} = \mathbf{i}_s \times \{\mathbf{i}_s \cdot [\omega \times \hat{T}^0(\mathbf{v})]\}, \quad (5.3.12)$$

и второе уравнение статики будет выполнено при условии

$$2 \int_V \mathbf{a} d\tau_0 = \int_V \mathbf{i}_s \times \{\mathbf{i}_s \cdot [\omega \times \hat{T}^0(\mathbf{v})]\} d\tau_0 = 0.$$

В развернутой записи выражение вектора $2\mathbf{a}$ имеет вид

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} &= \mathbf{i}_s \times \{\mathbf{i}_s \cdot [\omega \times \hat{T}^0(\mathbf{v})]\} = \mathbf{i}_s \times \{\mathbf{i}_s \cdot (\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_q \mathbf{i}_t) \omega_r \mathbf{i}_{qt}^0\} = \\ &= e_{srq} e_{stm} \mathbf{i}_m \omega_r \mathbf{i}_{qt}^0 = (\delta_{rt} \delta_{qm} - \delta_{rm} \delta_{qt}) \mathbf{i}_m \omega_r \mathbf{i}_{qt}^0 = \omega_t \mathbf{i}_{qt}^0 \mathbf{i}_q - \omega_r \mathbf{i}_{rq}^0 \mathbf{i}_t \end{aligned}$$

или

$$2\mathbf{a} = \omega \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) - \omega \sigma, \quad \sigma = t_{qq}(\mathbf{v}) = I_1(\hat{T}^0(\mathbf{v})). \quad (5.3.13)$$

Итак, необходимым условием существования решения краевой задачи (5.3.8) служит равенство

$$\int_V \omega \cdot (\hat{T}^0 - \hat{E}\sigma) d\tau_0 = 0. \quad (5.3.14)$$

Но в рассматриваемой второй краевой задаче (на σ заданы поверхностные силы F^0) вектор ω определен с точностью до аддитивного постоянного слагаемого ω_0 ; поэтому, приняв $\omega = \omega' + \omega_0$, причем $\omega'(0, 0, 0) = 0$, например, следует подчинить выбор вектора ω_0 условию

$$\omega_0 \cdot \int \int \int_v (\hat{T}^0 - \hat{E}\sigma) d\tau_0 = - \int \int \int_v \omega' \cdot (\hat{T}^0 - \hat{E}\sigma) d\tau_0 = vb.$$

В нем вектор b известен. Пришли к системе уравнений для неизвестных ω_{0r} :

$$\omega_{0r}(c_{rq} - c\delta_{rq}) = b_q \quad q = (1, 2, 3), \quad (5.3.15)$$

коэффициенты которой — средние по объему значения напряжений

$$c_{rq} = \frac{1}{v} \int \int \int_v t_{rq}^0 d\tau_0, \quad c = c_{11} + c_{22} + c_{33} \quad (5.3.16)$$

— можно выразить через внешние силы $\rho_0 K$, F^0 с помощью формул (4.3.2) гл. I. Определитель этой системы должен быть отличен от нуля:

$$\Delta = |c_{rq} - c\delta_{rq}| \neq 0, \quad (5.3.17)$$

и при невыполнении этого условия (при $\Delta = 0$) краевая задача (5.3.8) может не иметь решения; учет эффекта нелинейности не достигается внесением поправки в решение линейной задачи. Проверка критерия (5.3.17) осуществляется лишь по заданию внешних сил $\rho_0 K$, F^0 и не требует решения линейной краевой задачи (5.3.2), (5.3.3). Аддитивный постоянный вектор ω_0 , входящий в решение этой задачи, определяется на этапе учета нелинейного эффекта второго порядка (вектора w).

Решение краевой задачи (5.3.8) для вектора w затруднено сложностью выражений «объемных и поверхностных сил» k , f . Применение теоремы взаимности позволяет определить по ним средние значения деформаций и напряжений; этим можно довольствоваться во многих задачах, когда необходимость учета деталей распределения перемещений в теле отодвинута на второй план.

Вычисления, требуемые теоремой взаимности, несколько упрощаются вследствие специальной структуры векторов k и f . Обращаясь к формуле (3.3.5) гл. IV, имеем

$$\begin{aligned} \frac{v}{1-2\nu} \vartheta' \vartheta_m(w) + \hat{e}' \cdot \hat{e}_m(w) &= \\ &= \frac{1}{2\mu v} \left(\int \int \int_v k \cdot \hat{e}' \cdot r d\tau_0 + \int \int f \cdot \hat{e}' \cdot r d\sigma \right). \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Здесь \hat{e}' — вспомогательный постоянный симметричный тензор второго ранга; ϑ' — его первый инвариант; $\hat{e}_m(w)$, $\vartheta_m(w)$ —

средние по объему значения тензора деформации $\hat{\epsilon}(\mathbf{w})$ и объемного расширения $\hat{\vartheta}(\mathbf{w})$; $\mathbf{r} = i_s a_s$ — вектор-радиус; $\hat{\epsilon}' \cdot \hat{\epsilon}_m(\mathbf{w}) = I_1(\hat{\epsilon}' \cdot \hat{\epsilon}_m)$ — первый инвариант произведения тензоров $\hat{\epsilon}'$, $\hat{\epsilon}_m(\mathbf{w})$. Полагая для сокращения записи

$$\hat{Q} = \nabla \mathbf{v} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v}),$$

имеем

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot \hat{Q} \cdot \hat{\epsilon}' \cdot \mathbf{r} d\sigma &= \int \int_{\mathcal{V}} n_s q_{st} \hat{\epsilon}'_{tm} a_m d\sigma = \\ &= \int \int_{\mathcal{V}} \int \left(\frac{\partial q_{st}}{\partial a_s} \hat{\epsilon}'_{tm} a_m + q_{st} \hat{\epsilon}'_{ts} \right) d\tau_0 = \\ &= \int \int_{\mathcal{V}} \int (\nabla \cdot \hat{Q}) \cdot \hat{\epsilon}' \cdot \mathbf{r} d\tau_0 + \int \int_{\mathcal{V}} \int \hat{Q} d\tau_0 \cdot \hat{\epsilon}' \quad (5.3.19) \end{aligned}$$

и, вспомнив формулы (5.3.9),

$$\int \int_{\mathcal{V}} \int \mathbf{k} \cdot \hat{\epsilon}' \cdot \mathbf{r} d\tau_0 + \int \int_{\mathcal{V}} \int \mathbf{f} \cdot \hat{\epsilon}' \cdot \mathbf{r} d\sigma = - \int \int_{\mathcal{V}} \int \hat{Q} d\tau_0 \cdot \hat{\epsilon}.$$

Соотношение (5.3.18) теперь приводится к виду

$$\frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\vartheta}' \hat{\vartheta}_m(\mathbf{w}) + \hat{\epsilon}' \cdot \hat{\epsilon}_m(\mathbf{w}) + \frac{1}{2\mu\nu} \int \int_{\mathcal{V}} \int [\nabla \mathbf{v} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})] d\tau_0 \cdot \hat{\epsilon} = 0 \quad (5.3.20)$$

Например, полагая $\hat{\epsilon}' = \hat{E}$, $\hat{\vartheta}' = 3$, получаем среднее значение $\hat{\vartheta}_m(\mathbf{w})$:

$$\hat{\vartheta}_m(\mathbf{w}) = - \frac{1-2\nu}{2\mu(1+\nu)} \int \int_{\mathcal{V}} \int I_1 (\nabla \mathbf{v} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})) d\tau_0. \quad (5.3.21)$$

Приняв $\hat{\epsilon}' = i_1 i_1$, $\hat{\epsilon}' = i_1 i_2 + i_2 i_1$, соответственно находим средние значения

$$\frac{\nu}{1-2\nu} \hat{\vartheta}_m(\mathbf{w}) + [\hat{\epsilon}_{11}(\mathbf{w})]_m = - \frac{1}{2\mu\nu} \int \int_{\mathcal{V}} \int \left[\frac{\partial v_k}{\partial a_1} t_{k1}^0(\mathbf{v}) + t'_{11}(\mathbf{v}) \right] d\tau_0, \quad (5.3.22)$$

$$2[\epsilon_{12}(\mathbf{w})]_m = - \frac{1}{2\mu\nu} \int \int_{\mathcal{V}} \int \left[\frac{\partial v_k}{\partial a_2} t_{k1}^0(\mathbf{v}) + \frac{\partial v_k}{\partial a_1} t_{k2}^0(\mathbf{v}) + 2t'_{12}(\mathbf{v}) \right] d\tau_0, \quad (5.3.23)$$

так что

$$\begin{aligned} [\epsilon_{11}(\mathbf{w})]_m &= \frac{1}{\nu E} \left\{ \nu \int \int_{\mathcal{V}} \int \left[\frac{\partial v_k}{\partial a_s} t_{ks}^0(\mathbf{v}) + I_1(\hat{T}'(\mathbf{v})) \right] d\tau_0 - \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu) \int \int_{\mathcal{V}} \int \left[\frac{\partial v_k}{\partial a_1} t_{k1}^0(\mathbf{v}) + t'_{11}(\mathbf{v}) \right] d\tau_0 \right\}. \quad (5.3.24) \end{aligned}$$

5.3а. Изменение объема тела, подвергнутого дисторсии. Рассмотрению этого пункта предположим выражение среднего значения тензора напряжений по объему тела (см. также (4.3.2) гл. I). Введя диады $\rho \mathbf{K} \mathbf{R}$, $\mathbf{F} \mathbf{R}$, запишем соотношение

$$\begin{aligned} \int_V \int \int \rho \mathbf{K} \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \mathbf{R} dO &= \int_V \int \int \rho \mathbf{K} \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{T}} \mathbf{R} dO = \\ &= \int_V \int \int (\rho \mathbf{K} \mathbf{R} + \tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{T}} \mathbf{R}) d\tau. \end{aligned} \quad (5.3.1a)$$

Но нетрудно проверить, что дивергенция тензора $\hat{\mathbf{T}} \mathbf{R}$ третьего ранга преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{T}} \mathbf{R} &= i_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot \hat{\mathbf{T}} \mathbf{R} = (\tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{T}}) \mathbf{R} + i_s \cdot \hat{\mathbf{T}} i_s \delta_{ts} = (\tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{T}}) \mathbf{R} + \hat{\mathbf{T}}^T \cdot i_s i_s = \\ &= (\tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{T}}) \mathbf{R} + \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = (\tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{T}}) \mathbf{R} + \hat{\mathbf{T}}, \end{aligned}$$

поскольку $\hat{\mathbf{T}}^T = \hat{\mathbf{T}}$. Возвращаясь теперь к (5.3.1а), имеем

$$\begin{aligned} \int_V \int \int \rho \mathbf{K} \mathbf{R} d\tau + \int_O \int \mathbf{F} \mathbf{R} dO &= \\ &= \int_V \int \int (\rho \mathbf{K} + \tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{T}}) \mathbf{R} d\tau + \int_V \int \int \hat{\mathbf{T}} d\tau = \int_V \int \int \hat{\mathbf{T}} d\tau. \end{aligned} \quad (5.3.2a)$$

В теле, подвергнутом дисторсии Вольтерра *), тензор напряжений $\hat{\mathbf{T}}$ отличен от нуля и при отсутствии объемных и поверхностных сил; оказывается равным нулю его среднее значение по объему:

$$\int_V \int \int \hat{\mathbf{T}} d\tau = 0. \quad (5.3.3a)$$

Отсюда следует, что в линейно-упругом теле равно нулю и среднее значение линейного тензора деформации $\hat{\mathbf{e}}$; изменение объема упругого тела, подвергнутого дисторсии, поэтому может найти объяснение лишь в нелинейной теории упругости.

Заменив в (5.3.3а) тензор $\hat{\mathbf{T}}$ его приближенным выражением (5.1.13), с принятой точностью имеем

$$\int_V \int \int \hat{\mathbf{T}} d\tau = \int_V \int \int \sqrt{I_3} \hat{\mathbf{T}} d\tau_0 = \int_V \int \int (\hat{\mathbf{T}}^0 + 2\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{T}}^0 + \hat{\mathbf{T}}') d\tau_0 = 0. \quad (5.3.4a)$$

Вместе с тем по (5.1.6)

$$\frac{d\tau}{d\tau_0} = \sqrt{I_3} = 1 + \vartheta + \frac{1}{2} \vartheta^2 + \omega \cdot \omega - \frac{1}{2} I_1 (\hat{\mathbf{e}}^2), \quad (5.3.5a)$$

*) Сказанное относится к дислокации и более общей природы.

и выражение относительного изменения объема тела записывается в виде

$$\frac{V-v}{v} = D_{\text{ср}} = \int \int \int_v \left[\vartheta + \frac{1}{2} \vartheta^2 + \omega \cdot \omega - \frac{1}{2} I_1(\hat{\varepsilon}^2) \right] d\tau_0. \quad (5.3.6a)$$

Возвращаясь к (5.3.4a), составим выражение первого инварианта подынтегрального выражения; сославшись на формулы (5.1.12), (5.1.14), получим

$$\begin{aligned} I_1(\hat{T}^0 + 2\hat{\varepsilon} \cdot \hat{T}^0 + \hat{T}') &= (3\lambda + 2\mu) \vartheta + (3\lambda + 2\mu) \omega \cdot \omega + \\ &+ \vartheta^2 \left(2\lambda + 3l - m + \frac{1}{2} n \right) + I_1(\hat{\varepsilon}^2) \left(5\mu + \frac{3}{2} \lambda + 3m - \frac{1}{2} n \right) = \\ &= (3\lambda + 2\mu) \left(\frac{d\tau}{d\tau_0} - 1 \right) + \vartheta^2 \left(\frac{1}{2} \lambda - \mu + 3l - m + \frac{1}{2} n \right) + \\ &+ I_1(\hat{\varepsilon}^2) \left(3\lambda + 6\mu + 3m - \frac{1}{2} n \right) \end{aligned}$$

и, сославшись на (5.3.4a), (5.3.6a), приходим к соотношению (Тупин и Ривлин, 1959)

$$\begin{aligned} D_{\text{ср}} &= -\frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left[\left(\frac{1}{2} \lambda - \mu + 3l - m + \frac{1}{2} n \right) \int \int \int_v \vartheta^2 d\tau_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left(3\lambda + 6\mu + 3m - \frac{1}{2} n \right) \int \int \int_v I_1(\hat{\varepsilon}^2) d\tau_0 \right]. \end{aligned}$$

Входящие в правую часть инварианты ϑ и $I_1(\hat{\varepsilon}^2)$ при принятой точности определяются решением задачи о напряженном состоянии подвергнутого дисторсии линейно-упругого тела в v -объеме.

5.4. Выбор исходного приближения. В качестве исходного приближения необязательно назначать решение линейной краевой задачи (5.3.2), (5.3.3), точно соответствующие заданию сил K , F^0 . Бывает предпочтительнее включение в состав вектора v слагаемых, имеющих второй порядок относительно предполагаемо малых параметров, описывающих рассматриваемую деформацию. Принимаем

$$v = v_0 + v_1, \quad u = v + w = v_0 + v_1 + w, \quad (5.4.1)$$

где v_0 — решение линейной задачи, удовлетворяющее упомянутой системе. Вместо (5.3.6) имеем при пренебрежении членами третьего порядка

$$\begin{aligned} \Theta(u) &= \hat{T}^0(u) + \nabla u \cdot \hat{T}^0(u) + \hat{T}'(u) = \\ &= \hat{T}^0(v_0) + \hat{T}^0(v_1) + \hat{T}^0(w) + \nabla v_0 \cdot \hat{T}^0(v_0) + \hat{T}'(v_0), \quad (5.4.2) \end{aligned}$$

и подстановка в уравнения равновесия (5.2.7), (5.2.8) при условиях

$$\nabla \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_0) + \rho_0 \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_0) = \mathbf{F}^0 \quad (5.4.3)$$

требует лишь внесения в выражения (5.3.9) корректирующих «сил» еще одного слагаемого

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} &= \nabla \cdot [\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_0) + \hat{T}'(\mathbf{v}_0) + \hat{T}^0(\mathbf{v}_1)], \\ \mathbf{f} &= -\mathbf{n} \cdot [\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_0) + \hat{T}'(\mathbf{v}_0) + \hat{T}^0(\mathbf{v}_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.4)$$

Вектор \mathbf{w} должен быть найден, как и ранее, из системы уравнений

$$\nabla \cdot \hat{T}^0(\mathbf{w}) + \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{w}) = \mathbf{f} \quad (5.4.5)$$

при определении векторов \mathbf{k} , \mathbf{f} по (5.4.4). Добавочные слагаемые $\nabla \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{n} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_1)$ представляют статически уравновешенную систему

$$\left. \begin{aligned} \int \int \int \nabla \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_1) d\tau_0 - \int \int \mathbf{n} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_1) d\sigma &= 0, \\ \int \int \int \mathbf{r} \times \nabla \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_1) d\tau_0 - \int \int \mathbf{r} \times \mathbf{n} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_1) d\sigma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.6)$$

Первое соотношение — немедленное следствие преобразования поверхностного интеграла в объемный, второе следует из первого и из симметрии тензора $\hat{T}^0(\mathbf{v}_1)$. Поэтому необходимые критерии (5.3.14), (5.3.17) существования корректирующего вектора \mathbf{w} сохраняются — в них \mathbf{v} следует заменить на \mathbf{v}_0 .

В соотношение (5.3.20) должно быть внесено дополнительное слагаемое; оно теперь записывается в виде

$$\frac{\mathbf{v}}{1-2\nu} \hat{\Theta}' \hat{\Theta}_m(\mathbf{w}) + \hat{\mathbf{e}}' \cdot \left\{ \hat{\mathbf{e}}_m(\mathbf{w}) + \frac{1}{2\mu\nu} \int \int \int [\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_0) + \hat{T}'(\mathbf{v}_0) + \hat{T}^0(\mathbf{v}_1)] d\tau_0 \right\}, \quad (5.4.7)$$

а формулы (5.3.21), (5.3.23), (5.3.24) будут

$$\hat{\Theta}_m(\mathbf{w}) = -\frac{1-2\nu}{2\mu(1+\nu)v} \int \int \int I_1 [\nabla \mathbf{v}_0 \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_0) + \hat{T}'(\mathbf{v}_0) + \hat{T}^0(\mathbf{v}_1)] d\tau_0, \quad (5.4.8)$$

$$[e_{12}(\mathbf{w})]_m = -\frac{1}{2\mu\nu} \int \int \int \left[\frac{\partial v_{0k}}{\partial a_2} t_{k1}^0(\mathbf{v}_0) + \frac{\partial v_{0k}}{\partial a_1} t_{k2}^0(\mathbf{v}_0) + 2t'_{12}(\mathbf{v}_0) + 2t_{12}^0(\mathbf{v}_1) \right] d\tau_0, \quad (5.4.9)$$

$$[e_{11}(\mathbf{w})]_m = \frac{1}{vE} \left\{ v \int \int \int \left[\frac{\partial v_{0k}}{\partial a_s} t_{ks}^0(\mathbf{v}_0) + I_1(\hat{T}'(\mathbf{v}_0)) + I_1(\hat{T}^0(\mathbf{v}_1)) \right] d\tau_0 - (1+\nu) \int \int \int \left[\frac{\partial v_{0k}}{\partial a_1} t_{k1}^0(\mathbf{v}_0) + t'_{11}(\mathbf{v}_0) + t_{11}^0(\mathbf{v}_1) \right] d\tau_0 \right\}. \quad (5.4.10)$$

5.5. Эффекты второго порядка в задаче о кручении стержня. Вектор \mathbf{v}_0 в классическом решении, предполагающем малость угла закручивания α на единицу длины оси стержня, задается известными формулами

$$v_{01} = -\alpha a_2 a_3, \quad v_{02} = \alpha a_3 a_1, \quad v_{03} = \alpha \varphi(a_1, a_2). \quad (5.5.1)$$

Отличны от нуля напряжения

$$t_{31}^0(\mathbf{v}_0) = \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} - a_2 \right), \quad t_{23}^0(\mathbf{v}) = \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + a_1 \right).$$

Компоненты линейного вектора поворота по (2.2.10) гл. VI даются выражениями

$$\omega_1(\mathbf{v}_0) = \frac{1}{2\mu} t_{23}^0(\mathbf{v}_0) - \alpha a_1, \quad \omega_2(\mathbf{v}_0) = -\frac{1}{2\mu} t_{31}^0(\mathbf{v}_0) - \alpha a_2, \quad \omega_3 = \alpha a_3. \quad (5.5.2)$$

Поэтому

$$\omega(\mathbf{v}_0) \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_0) - \sigma \omega(\mathbf{v}_0) = -\mu \alpha^2 \left(a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} \right) i_3 + \alpha a_3 (t_{31}^0 i_1 + t_{23}^0 i_2).$$

Но в задаче кручения

$$\int_S \int t_{31}^0(\mathbf{v}_0) d\omega = P = 0, \quad \int_S \int t_{23}^0(\mathbf{v}_0) d\omega = Q = 0,$$

а сославшись на (2.5.5) гл. VI, имеем

$$\begin{aligned} \int_S \int \left(a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} \right) d\omega &= -2 \int_S \int \varphi d\omega + \oint_{\Gamma} \varphi (n_1 a_1 + n_2 a_2) ds = \\ &= -2 \int_S \int \varphi d\omega + 2 \oint_{\Gamma} \varphi d\omega = \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \varphi^2}{\partial s} ds = 0, \end{aligned}$$

так как функция φ^2 однозначна. Этим проверяется необходимое условие существования корректирующего вектора \mathbf{w} :

$$\int \int \int [\omega \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}_0) - \omega \sigma(\mathbf{v}_0)] d\tau_0 = 0. \quad (5.5.3)$$

В выражении вектора \mathbf{v} далее учитываются слагаемые второй степени по параметру α ; представляя декартовы координаты x_1, x_2, x_3 точки (a_1, a_2, a_3) после деформации формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cos(\theta + \alpha a_3) = a_1 \cos \alpha a_3 - a_2 \sin \alpha a_3 = \\ &= a_1 - \alpha a_2 a_3 - \frac{1}{2} \alpha^2 a_3^2 a_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sin(\theta + \alpha a_3) = a_1 \sin \alpha a_3 + a_2 \cos \alpha a_3 = \\ &= a_2 + \alpha a_1 a_3 - \frac{1}{2} \alpha^2 a_3^2 a_2, \end{aligned}$$

$$x_3 = \alpha \varphi(a_1, a_2) + a_3 \quad (a_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cos \theta, \quad a_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sin \theta),$$

имеем

$$v_1 = x_1 - a_1 = -\alpha a_2 a_3 - \frac{1}{2} \alpha^2 a_3^2 a_1,$$

$$v_2 = x_2 - a_2 = \alpha a_3 a_1 - \frac{1}{2} \alpha^2 a_3^2 a_2,$$

$$v_3 = \alpha f(a_1, a_2)$$

и по (5.5.1)

$$v_{11} = -\frac{1}{2} \alpha^2 a_3^2 a_1, \quad v_{12} = -\frac{1}{2} \alpha^2 a_3^2 a_2, \quad v_{13} = 0.$$

Вычисляемый по этим перемещениям линейный тензор напряжений равен

$$\hat{T}^0(v_1) = -\alpha^2 \{ \lambda a_3^2 \hat{E} + \mu [a_3^2 (i_1 i_1 + i_2 i_2) + a_3 i_3 (a_1 i_1 + a_2 i_2) + a_3 (a_1 i_1 + a_2 i_2) i_3] \}. \quad (5.5.4)$$

Без труда записываются также выражения входящих в состав векторов k, f тензоров:

$$\nabla v_0 \cdot \hat{T}^0(v_0) = i_s i_3 \left(\frac{\partial v_{01}}{\partial a_s} t_{13}^0 + \frac{\partial v_{02}}{\partial a_s} t_{23}^0 \right) + i_s \frac{\partial v_{03}}{\partial a_s} (i_1 t_{13}^0 + i_2 t_{23}^0), \quad (5.5.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}'(v_0) = & \left\{ \lambda \left[\frac{1}{2\mu^2} (t_{23}^{0^2} + t_{31}^{0^2}) - \frac{\alpha}{\mu} (a_1 t_{23}^0 - a_2 t_{31}^0) + \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \right] + \right. \\ & + \frac{1}{4\mu^2} (2m - n) (t_{23}^{0^2} + t_{31}^{0^2}) \} \hat{E} + \frac{n}{4\mu^2} [(t_{31}^0 + t_{23}^0) i_3 i_3 + t_{31}^0 i_1 i_1 + \\ & + t_{32}^0 i_2 i_2 + t_{31}^0 t_{23}^0 (i_1 i_2 + i_2 i_1)] + \mu i_s i_3 \frac{\partial v_{0s}}{\partial a_k} \frac{\partial v_{0q}}{\partial a_k}. \quad (5.5.6) \end{aligned}$$

Как видно, система «объемных и поверхностных сил» k, f достаточно сложна. Ограничимся учетом эффекта изменения длины стержня, равного $l[e_{33}(w)]_m$. Это требует знания только первых инвариантов рассматриваемых тензоров и их [3,3] компонент

$$\begin{aligned} I_1[\hat{T}^0(v_1)] &= -\alpha^2 (3\lambda + 2\mu) a_3^2; \quad i_3 \cdot \hat{T}^0(v_1) \cdot i_3 = -\lambda \alpha^2 a_3^2; \\ I_1[\nabla v_0 \cdot \hat{T}^0(v_0)] &= \frac{1}{\mu} (t_{31}^{0^2} + t_{23}^{0^2}); \quad i_3 \cdot \nabla v_0 \cdot \hat{T}^0(v_0) \cdot i_3 = \alpha (a_1 t_{23}^0 - a_2 t_{31}^0); \\ I_1[\hat{T}'(v_0)] &= (3\lambda + 2\mu) \left[\frac{1}{2\mu^2} (t_{31}^{0^2} + t_{23}^{0^2}) - \frac{\alpha}{\mu} (a_1 t_{23}^0 - a_2 t_{31}^0) + \right. \\ & \quad \left. + \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \right] + \frac{1}{4\mu^2} (6m - n) (t_{31}^{0^2} + t_{23}^{0^2}); \\ i_3 \cdot \hat{T}'(v_0) \cdot i_3 &= \lambda \left[\frac{1}{2\mu^2} (t_{31}^{0^2} + t_{23}^{0^2}) - \frac{\alpha}{\mu} (a_1 t_{23}^0 - a_2 t_{31}^0) + \alpha^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \right] + \\ & \quad + \mu \alpha^2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_2} \right)^2 \right] + \frac{m}{2\mu^2} (t_{31}^{0^2} + t_{23}^{0^2}). \end{aligned}$$

Остается привести, сославшись на п. 3.13 гл. VI, значения интегралов

$$\frac{1}{\mu^2} \int_S \int (t_{31}^{02} + t_{23}^{02}) d\sigma = \alpha^2 C, \quad \frac{\alpha}{\mu} \int_S \int (a_1 t_{23}^0 - a_2 t_{31}^0) d\sigma = \alpha^2 C,$$

$$\int_S \int \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_2} \right)^2 \right] d\sigma = I_p - C.$$

После очевидного вычисления по формуле (5.4.10) придем к следующему выражению среднего значения относительного удлинения стержня, сопровождающего кручение:

$$[e_{33}(\omega)]_m = - \frac{\alpha^2}{2S(1+\nu)} \left\{ \left[\frac{\nu n}{4\mu} + \frac{1}{2} \frac{m}{\mu} (1-2\nu) - 2\nu \right] C + I_p (1+\nu) \right\}, \quad (5.5.7)$$

отличающемуся только обозначениями от приводимого Ривлином (1953).

Очевидно, что $I_p(1+\nu) > 2\nu C$, так как $I_p > C$, $\nu < 1/2$; но отсюда нельзя заключить, что кручение стержня сопровождается уменьшением его длины, так как для большего числа материалов $n < 0$ и $m < 0$.

5.6. Несжимаемая среда. Удельная потенциальная энергия деформации задается формулой Муни

$$A = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3),$$

и выражение тензора напряжений (5.1.7) представляется в виде

$$\frac{1}{2} \hat{T}(\mathbf{u}) = \left[C_1 + 2C_2 + \left(\frac{\partial A}{\partial I_3} \right)_{I_3=1} \right] \hat{E} + 2(C_1 + C_2) \hat{e}(\mathbf{u}) + C_2(I_1 - 3) \hat{E} - 4C_2 \hat{e}^2(\mathbf{u}) + (C_1 + C_2) \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u} + C_2(I_1 - 3)(3\hat{e} + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}). \quad (5.6.1)$$

Здесь использована замена (5.1.15); далее принимается обозначение (1.4.7)

$$2(C_1 + C_2) = \mu$$

и в рассмотрение вводится скаляр (давление)

$$C_1 + 2C_2 + \frac{\partial A}{\partial I_3} \Big|_{I_3=1} = - \frac{1}{2} q,$$

определяемый далее условием

$$I_3 = 1: \quad 2\hat{\sigma}(\mathbf{u}) + 2\hat{\sigma}^2(\mathbf{u}) - I_1(\hat{e}^2(\mathbf{u})) + 2\omega(\mathbf{u}) \cdot \omega(\mathbf{u}) = 0. \quad (5.6.2)$$

Далее принимаем, как выше в п. 5.3,

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \omega, \quad (5.6.3)$$

где \mathbf{v} — вектор перемещения в линейном приближении, \mathbf{w} — корректирующий вектор, определяющий эффекты второго порядка. Тогда по (5.6.2)

$$2\vartheta(\mathbf{v}) + 2\vartheta(\mathbf{w}) + 2\vartheta^2(\mathbf{v}) - I_1(\dot{\varepsilon}^2(\mathbf{v})) + 2\omega(\mathbf{v}) \cdot \omega(\mathbf{v}) = 0,$$

причем отброшены слагаемые третьего и более высоких порядков. Условие несжимаемости должно выполняться как в линейном приближении, так и при учете членов второго порядка; поэтому

$$\vartheta(\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5.6.4)$$

$$\vartheta(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} I_1(\dot{\varepsilon}^2(\mathbf{v})) - \omega(\mathbf{v}) \cdot \omega(\mathbf{v}). \quad (5.6.5)$$

По (5.1.6) имеем теперь

$$\left. \begin{aligned} I_1 - 3 &= 2\vartheta(\mathbf{w}) + I_1(\dot{\varepsilon}^2(\mathbf{v})) + 2\omega(\mathbf{v}) \cdot \omega(\mathbf{v}) = 2I_1(\dot{\varepsilon}^2(\mathbf{v})), \\ I_2 - 3 &= 4\vartheta(\mathbf{w}) + 4\omega(\mathbf{v}) \cdot \omega(\mathbf{v}) = 2I_1(\dot{\varepsilon}^2(\mathbf{v})). \end{aligned} \right\} \quad (5.6.6)$$

Скаляр q также представляется суммой его значения в линейном приближении q^0 и корректирующего слагаемого q^1 :

$$q = q^0 + q^1. \quad (5.6.7)$$

Теперь с принятой точностью выражение тензора напряжений (5.6.1) может быть представлено в виде

$$\hat{T}(\mathbf{u}) = \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}^0(\mathbf{w}) + \hat{T}'(\mathbf{v}), \quad (5.6.8)$$

причем $\hat{T}^0(\mathbf{v})$ — тензор напряжений в линейном приближении:

$$\hat{T}^0(\mathbf{v}) = -q^0 \hat{E} + 2\mu \dot{\varepsilon}(\mathbf{v}), \quad (5.6.9)$$

$\hat{T}^0(\mathbf{w})$ — тензор напряжений, вычисляемый по корректирующему вектору:

$$\hat{T}^0(\mathbf{w}) = -q^1 \hat{E} + 2\mu \dot{\varepsilon}(\mathbf{w}),$$

и $\hat{T}'(\mathbf{v})$ — вычисляемое по линейному приближению слагаемое:

$$\hat{T}'(\mathbf{v}) = 8C \left[\frac{1}{2} \hat{E} I_1(\dot{\varepsilon}^2(\mathbf{v})) - \dot{\varepsilon}^2(\mathbf{v}) \right] + \mu \nabla \mathbf{v}^T \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (5.6.10)$$

5.7. Уравнения равновесия. Определив, как и в п. 5.2, поверхностную силу $\mathbf{F} dO$ равенством

$$\mathbf{F} \frac{dO}{do} = \mathbf{N} \cdot \hat{T} \frac{dO}{do} = \sqrt{I_3} n_s \mathbf{R}^s \cdot \hat{T} = \sqrt{I_3} (\mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^T) \cdot \hat{T} \quad (5.7.1)$$

и учитывая представление (5.6.8) тензора напряжений и условие несжимаемости (5.6.2), приходим к уравнению равновесия на поверхности

$$\mathbf{F}^0 = \mathbf{F} \frac{dO}{do} = \mathbf{n} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \mathbf{n} \cdot [\hat{T}^0(\mathbf{w}) - \nabla \mathbf{v}^T \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})]. \quad (5.7.2)$$

Имея это выражение и рассуждая, как в п. 5.2, получаем также уравнение равновесия в объеме

$$\nabla \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \rho_0 \mathbf{K} + \nabla \cdot [\hat{T}^0(\mathbf{w}) - \nabla \mathbf{v}^T \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})] = 0. \quad (5.7.3)$$

В линейном приближении

$$\nabla \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \rho_0 \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) - \mathbf{F}^0 = 0. \quad (5.7.4)$$

При учете соотношений (5.6.9), (5.6.4)

$$\nabla \cdot q^0 \hat{E} = \nabla q^0, \quad \nabla \cdot 2\hat{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v} \quad (5.7.5)$$

полученные соотношения приобретают форму уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости Навье — Стокса (в последних \mathbf{v} — вектор скорости).

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_0 \mathbf{K} = \nabla q^0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad 2\mu \mathbf{n} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{v}) = n q^0 + \mathbf{F}^0. \quad (5.7.6)$$

Возвращаясь к (5.7.2), (5.7.3), (5.6.5), приходим к следующей системе уравнений, определяющих корректирующий вектор \mathbf{w} :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \hat{T}^0(\mathbf{w}) + \nabla \cdot [-\nabla \mathbf{v}^T \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})] &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{w} &= \frac{1}{2} I_1 (\hat{\varepsilon}^2(\mathbf{v})) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \\ \mathbf{n} \cdot \hat{T}^0(\mathbf{w}) + \mathbf{n} \cdot [-\nabla \mathbf{v}^T \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.7)$$

Их запись в форме уравнений Навье — Стокса имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{w} + \mu \nabla \left[\frac{1}{2} I_1 (\hat{\varepsilon}^2(\mathbf{v})) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \right] + \mathbf{k} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{w} &= \frac{1}{2} I_1 (\hat{\varepsilon}^2(\mathbf{v})) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \\ 2\mu \mathbf{n} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{w}) &= n q^1 + \mathbf{f}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.8)$$

Здесь векторы \mathbf{k} , \mathbf{f} , играющие роль объемных и поверхностных сил, определены равенствами

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} &= \nabla \cdot \{q^0 \nabla \mathbf{v}^T - 2\mu \nabla \mathbf{v}^T \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})\}, \\ \mathbf{f} &= -\mathbf{n} \cdot \{q^0 \nabla \mathbf{v}^T - 2\mu \nabla \mathbf{v}^T \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \hat{T}'(\mathbf{v})\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.9)$$

Несимметричная часть тензора в фигурных скобках равна

$$q^0 \hat{\Omega} - 2\mu \hat{\Omega} \cdot \hat{\varepsilon}(\mathbf{v}) = -\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \times \hat{T}^0(\mathbf{v}),$$

и в соответствии с (5.3.14) необходимое условие существования решения краевой задачи (5.7.8) записывается в виде

$$\int \int \int_v [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) \cdot \hat{T}^0(\mathbf{v}) + 3\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) q^0] d\tau_0 = 0$$

или, если заменить \hat{T}^0 его значением, в виде

$$\int \int_V [\mu \omega(\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) + \omega(\mathbf{v}) q^0] d\tau_0 = 0. \quad (5.7.10)$$

§ 6. Плоская задача

6.1. Геометрические соотношения. В состоянии плоской деформации координаты x_s точек среды связаны с их координатами a_s в начальном состоянии зависимостями

$$x_1 = x_1(a_1, a_2), \quad x_2 = x_2(a_1, a_2), \quad x_3 = \lambda a_3 \quad (\lambda = \text{const}). \quad (6.1.1)$$

Введя материальные координаты $q^1, q^2, q^3 = x_3$, имеем

$$a_\alpha = a_\alpha(q^1, q^2), \quad a_3 = \frac{q^3}{\lambda}; \quad x_\alpha = x_\alpha(q^1, q^2), \quad x_3 = q^3, \quad (6.1.2)$$

причем здесь и в дальнейшем (п.п. 6.1—6.9) греческие индексы принимают значения 1, 2 (латинские, как и ранее, — значения 1, 2, 3). Вектор-радиусы точки в начальном (v -объем) и в деформированном состояниях (V -объем) равны

$$\mathbf{r} = i_\alpha a_\alpha + i_3 \frac{q^3}{\lambda} = \mathbf{b} + i_3 \frac{q^3}{\lambda}, \quad \mathbf{R} = i_\alpha x_\alpha + i_3 x_3 = \mathbf{B} + i_3 q^3, \quad (6.1.3)$$

и базисные векторы в этих состояниях будут

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q^\alpha} = \mathbf{b}_\alpha, \quad \mathbf{r}_3 = \frac{i_3}{\lambda}; \quad \mathbf{R}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial q^\alpha} = \mathbf{B}_\alpha, \quad \mathbf{R}_3 = i_3. \quad (6.1.4)$$

Ковариантные компоненты метрических тензоров \hat{g} , \hat{G} определяются теперь формулами

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\beta = b_{\alpha\beta}, & g_{\alpha 3} &= 0, & g_{33} &= \frac{1}{\lambda^2}; \\ G_{\alpha\beta} &= \mathbf{B}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\beta = B_{\alpha\beta}, & G_{\alpha 3} &= 0, & G_{33} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (6.1.5)$$

так что

$$g = |g_{sk}| = \frac{b}{\lambda^2}, \quad b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2; \quad G = |G_{sk}| = B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2. \quad (6.1.6)$$

Их контравариантные компоненты (отличные от нуля) равны

$$\left. \begin{aligned} g^{11} &= b^{11} = \frac{g_{22}}{g\lambda^2} = \frac{b_{22}}{b}, & g^{22} &= b^{22} = \frac{b_{11}}{b}, & g^{12} &= b^{12} = -\frac{b_{12}}{b}, & g^{33} &= \lambda^2, \\ G^{11} &= B^{11} = \frac{G_{22}}{G} = \frac{B_{22}}{B}, & G^{22} &= B^{22} = \frac{B_{11}}{B}, & G^{12} &= B^{12} = -\frac{B_{12}}{B}, & G^{33} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.7)$$

Этим в рассмотрение вводятся плоские метрические тензоры \hat{b} , \hat{B} в v - и V -объемах:

$$\hat{b} = b^{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta = b_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta, \quad \hat{B} = B^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = B_{\alpha\beta} B^\alpha B^\beta, \quad (6.1.8)$$

причем векторы взаимных базисов определяются известными равенствами

$$b^\alpha = b^{\alpha\beta} b_\beta, \quad B^\alpha = B^{\alpha\beta} B_\beta. \quad (6.1.9)$$

В записи компонент тензоров Леви-Чивита $\hat{\epsilon}$, \hat{e} опускается третий индекс 3:

$$\sqrt{b} \epsilon^{\alpha\beta} = \sqrt{B} \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta} = e^{\alpha 3}, \quad \frac{1}{\sqrt{b}} \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{B}} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}, \quad (6.1.10)$$

где

$$e^{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta, \\ 1, & \alpha = 1, \beta = 2, \\ -1, & \alpha = 2, \beta = 1. \end{cases} \quad (6.1.11)$$

Пользуясь ими, можно переписать формулы (6.1.7) и им обратные в виде

$$\left. \begin{aligned} b^{\alpha\beta} &= \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} b_{\gamma\delta}, & B^{\alpha\beta} &= \tilde{\epsilon}^{\alpha\gamma} \tilde{\epsilon}^{\beta\delta} B_{\gamma\delta}, \\ b_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon_{\beta\delta} b^{\gamma\delta}, & B_{\alpha\beta} &= \tilde{\epsilon}_{\alpha\gamma} \tilde{\epsilon}_{\beta\delta} B^{\gamma\delta}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.12)$$

Инварианты меры деформации \hat{G}^\times , определяемые формулами (5.2.6) — (5.2.8) гл. II, равны

$$\left. \begin{aligned} I_1(\hat{G}^\times) &= g^{sk} G_{sk} = b^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + \lambda^2, \\ I_2(\hat{G}^\times) &= \frac{G}{g} g_{sk} G^{sk} = \frac{B}{b} (\lambda^2 b_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} + 1), \\ I_3(\hat{G}^\times) &= \frac{G}{g} = \lambda^2 \frac{B}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.13)$$

Сославшись на (6.1.12), имеем

$$b^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} b_{\gamma\delta} \tilde{\epsilon}_{\alpha\lambda} \tilde{\epsilon}_{\beta\mu} B^{\lambda\mu} = \frac{B}{b} e^{\alpha\gamma} e_{\alpha\lambda} e^{\beta\delta} e_{\beta\mu} b_{\gamma\delta} B^{\lambda\mu}.$$

Но нетрудно, пользуясь определениями (6.1.11), проверить соотношения

$$e^{\alpha\gamma} e_{\alpha\lambda} = \delta_\lambda^\gamma = \begin{cases} 0, & \gamma \neq \lambda, \\ 1, & \gamma = \lambda. \end{cases} \quad (6.1.14)$$

Поэтому

$$b^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = \frac{B}{b} \delta_\lambda^\gamma \delta_\mu^\delta b_{\gamma\delta} B^{\lambda\mu} = \frac{B}{b} b_{\gamma\delta} B^{\gamma\delta}, \quad (6.1.15)$$

чем устанавливается соотношение, связывающее инварианты:

$$I_1 - \lambda^2 = \frac{I_2}{\lambda^2} - \frac{I_3}{\lambda^4} \quad \text{или} \quad I_3 - I_2 \lambda^2 + I_1 \lambda^4 - \lambda^6 = 0. \quad (6.1.16)$$

6.2. Уравнение состояния. Удельная потенциальная энергия деформации далее рассматривается как функция инвариантов I_1 и I_3 :

$$A(I_1, I_2, I_3) = A\left(I_1, \frac{I_3}{\lambda^2} + I_1\lambda^2 - \lambda^4, I_3\right) = A_1(I_1, I_3), \quad (6.2.1)$$

так что

$$\frac{\partial A_1}{\partial I_1} = \frac{\partial A}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial A}{\partial I_2}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial I_3} = \frac{\partial A}{\partial I_3} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial A}{\partial I_2}. \quad (6.2.2)$$

Уравнение состояния (2.1.9) гл. VIII может быть записано в виде

$$\tilde{t}^{st} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} g^{st} + \frac{\partial A}{\partial I_2} (I_1 g^{st} - g^{sm} g^{tn} G_{mn}) + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} G^{st} \right]$$

и по (6.1.5), (6.1.7)

$$\tilde{t}^{\alpha 3} = 0, \quad \tilde{t}^{33} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} \lambda^2 + \frac{\partial A}{\partial I_2} \lambda^2 (I_1 - \lambda^2) + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right]. \quad (6.2.3)$$

Заменяв инвариант I_1 его значением (6.1.13) и используя (6.2.2), имеем, далее,

$$\tilde{t}^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[\frac{\partial A_1}{\partial I_1} b^{\alpha\beta} + \frac{\partial A}{\partial I_2} (b^{\alpha\beta} b^{\gamma\delta} - b^{\alpha\gamma} b^{\beta\delta}) B_{\gamma\delta} + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} B^{\alpha\beta} \right]. \quad (6.2.4)$$

При фиксированных α, β возможны четыре сочетания значений γ, δ :

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = \alpha; \quad \gamma = \alpha, \quad \delta = \beta; \quad \gamma = \beta, \quad \delta = \alpha; \quad \gamma = \beta, \quad \delta = \beta.$$

Поэтому (не суммировать по α, β !)

$$\begin{aligned} b^{\alpha\beta} b^{\gamma\delta} B_{\gamma\delta} &= b^{\alpha\beta} (b^{\alpha\alpha} B_{\alpha\alpha} + b^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + b^{\beta\alpha} B_{\beta\alpha} + b^{\beta\beta} B_{\beta\beta}), \\ b^{\alpha\gamma} b^{\beta\delta} B_{\gamma\delta} &= b^{\alpha\alpha} b^{\beta\alpha} B_{\alpha\alpha} + b^{\alpha\alpha} b^{\beta\beta} B_{\alpha\beta} + b^{\alpha\beta} b^{\beta\alpha} B_{\beta\alpha} + b^{\alpha\beta} b^{\beta\beta} B_{\beta\beta}, \end{aligned}$$

так что по (6.1.6), (6.1.7)

$$(b^{\alpha\beta} b^{\gamma\delta} - b^{\alpha\gamma} b^{\beta\delta}) B_{\gamma\delta} = [(b^{\alpha\beta})^2 - b^{\alpha\alpha} b^{\beta\beta}] B_{\alpha\beta} = \frac{B}{b} B^{\alpha\beta} = \frac{I_3}{\lambda^2} B^{\alpha\beta},$$

и, возвращаясь к (6.2.4), (6.2.2), имеем

$$\tilde{t}^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left(\frac{\partial A_1}{\partial I_1} b^{\alpha\beta} + \frac{\partial A_1}{\partial I_3} I_3 B^{\alpha\beta} \right). \quad (6.2.5)$$

Для несжимаемой среды

$$I_3 = 1, \quad A_1 = A_1(I_1), \quad I_2 \lambda^2 - I_1 \lambda^4 = 1 - \lambda^6, \quad (6.2.6)$$

так что

$$\tilde{t}^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial A_1}{\partial I_1} b^{\alpha\beta} + p B^{\alpha\beta}, \quad (6.2.7)$$

$$\tilde{t}^{\alpha 3} = 0, \quad \tilde{t}^{33} = 2 \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} \lambda^2 + \lambda^2 (I_1 - \lambda^2) \frac{\partial A}{\partial I_2} \right] + p, \quad (6.2.8)$$

где p — наперед неизвестная функция координат.

6.3. Уравнения статики. При отсутствии массовых сил уравнения равновесия в объеме записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} (\sqrt{G} \tilde{t}^{\alpha s} R_s) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q^3} (\sqrt{G} \tilde{t}^{3s} R_s) = 0.$$

Но $\tilde{t}^{\alpha 3} = 0$, а \tilde{t}^{33} , G не зависят от q^3 ; поэтому последнее уравнение тождественно удовлетворяется, а первая группа уравнений записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{B} \tilde{t}^{\alpha\beta} B_\beta = 0 \quad (6.3.1)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{B} \tilde{t}^{\alpha\beta} + \sqrt{B} \tilde{t}^{\alpha\gamma} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} = 0, \quad (6.3.2)$$

причем символы Кристоффеля вычисляются по метрическому тензору \hat{B} .

Уравнения равновесия на поверхности могут быть записаны в одной из форм (3.3.7) или (3.3.8) гл. I:

$$\tilde{t}^{\alpha\beta} n_\alpha = \tilde{F}^\beta \sqrt{B^{\gamma\delta} n_\gamma n_\delta}, \quad \tilde{t}^{\alpha\beta} \tilde{N}_\alpha = \tilde{F}^\beta, \quad (6.3.3)$$

причем n_α , \tilde{N}_α — ковариантные компоненты единичных векторов внешних нормалей \mathbf{n} , \mathbf{N} к контурам γ , Γ поперечного сечения тела в начальном и соответственно в деформированном состояниях тела:

$$n_\alpha = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_\alpha, \quad \tilde{N}_\alpha = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}_\alpha. \quad (6.3.4)$$

Через \tilde{F}^β обозначены контравариантные компоненты поверхностной силы:

$$\tilde{F}^\beta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}^\beta. \quad (6.3.5)$$

6.4. Функция напряжений. Тензор функций напряжений (п. 1.6 гл. I) задается в виде

$$\hat{\Phi} = U(q^1, q^2) i_3 i_3,$$

а тензор напряжений определяется по нему равенством (1.6.6) гл. I:

$$\hat{T} = \tilde{t}^{\alpha\beta} \mathbf{B}_\alpha \mathbf{B}_\beta = \text{Ink } \hat{\Phi} = \tilde{\nabla} \times [\tilde{\nabla} \times U(q^1, q^2) i_3 i_3]^*. \quad (6.4.1)$$

Здесь не рассматривается независимо определяемая по (6.2.3) компонента \tilde{t}^{33} .

Вычисление проводится так:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla} \times U i_3 i_3 &= R^s \frac{\partial}{\partial q^s} \times U R^3 i_3 = R^3 \times R^3 \frac{\partial U}{\partial q^\beta} i_3 = \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} R_\lambda i_3 \frac{\partial U}{\partial q^\beta}, \\ (\tilde{\nabla} \times U i_3 i_3)^* &= \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} i_3 R_\lambda \frac{\partial U}{\partial q^\beta}, \\ \text{Ink } U i_3 i_3 &= R^\alpha \times i_3 \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} R_\lambda \frac{\partial U}{\partial q^\beta} = \\ &= \tilde{\epsilon}^{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} \left(R_\mu R_\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + R_\mu \frac{\partial U}{\partial q^\beta} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \lambda\alpha \end{smallmatrix} \right\} R_\rho \right) + \tilde{\epsilon}^{\mu\alpha} R_\mu R_\lambda \frac{\partial U}{\partial q^\beta} \frac{\partial \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta}}{\partial q^\alpha}. \quad (6.4.2)\end{aligned}$$

По условию обращения в нуль ковариантной производной тензора Леви-Чивита

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta}}{\partial q^\alpha} + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha\rho \end{smallmatrix} \right\} \tilde{\epsilon}^{\rho\beta} + \left\{ \begin{smallmatrix} \beta \\ \alpha\rho \end{smallmatrix} \right\} \tilde{\epsilon}^{\lambda\rho} = 0$$

имеем, изменив наименования немых индексов,

$$R_\lambda \frac{\partial U}{\partial q^\beta} \frac{\partial \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta}}{\partial q^\alpha} = - R_\rho \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\lambda \end{smallmatrix} \right\} \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} \frac{\partial U}{\partial q^\beta} - R_\lambda \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial q^\rho},$$

и подстановка в (6.4.2) приводит к следующему представлению тензора напряжений:

$$\hat{T} = \tilde{\epsilon}^{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}^{\lambda\rho} R_\mu R_\lambda \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial q^\rho} \right). \quad (6.4.3)$$

Величина в скобках представляет ковариантную производную ковариантных компонент градиента U :

$$\tilde{\nabla} U = R^\beta \frac{\partial U}{\partial q^\beta}, \quad \tilde{\nabla}_\alpha \frac{\partial U}{\partial q^\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial q^\rho} = \tilde{\nabla}_\beta \frac{\partial U}{\partial q^\alpha} = \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U.$$

Итак,

$$\hat{T} = \tilde{\epsilon}^{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} R_\mu R_\lambda \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U; \quad \tilde{t}^{\mu\lambda} = \tilde{\epsilon}^{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U = \frac{b}{B} \epsilon^{\mu\alpha} \epsilon^{\lambda\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U. \quad (6.4.4)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U = \tilde{\epsilon}_{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}_{\lambda\beta} \tilde{t}^{\mu\lambda} = \frac{B}{b} \epsilon_{\mu\alpha} \epsilon_{\lambda\beta} \tilde{t}^{\mu\lambda}, \quad (6.4.5)$$

и по (6.2.5), (6.1.12), (6.1.13)

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U = 2 \sqrt{I_3} \left(\frac{\partial A_1}{\partial I_1} \frac{1}{\lambda^2} b_{\alpha\beta} + \frac{\partial A_1}{\partial I_3} B_{\alpha\beta} \right). \quad (6.4.6)$$

Выражение первого инварианта тензора напряжений представляется в виде

$$I_1(\hat{T}) = \tilde{\epsilon}^{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} B_{\mu\lambda} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U = B^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U = \tilde{\nabla}^2 U. \quad (6.4.7)$$

Как и следовало ожидать, он оказался равным лапласиану над U (в метрике деформированного тела):

$$\tilde{\nabla}^2 U = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} U = R^a \frac{\partial}{\partial q^a} \cdot R^\beta \frac{\partial U}{\partial q^\beta} = B^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U. \quad (6.4.8)$$

Единичные векторы касательной \mathbf{t} и нормали \mathbf{N} плоской кривой Γ в деформированном теле

$$\mathbf{R} = \mathbf{B}(S) + \mathbf{i}_3 x_3 \quad (x_3 = \text{const})$$

определяются, в предположении, что \mathbf{N} , \mathbf{t} , \mathbf{i}_3 ориентированы, как оси XYZ , по формулам

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial S} = \mathbf{B}_\gamma \frac{d\gamma}{dS}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{t} \times \mathbf{i}_3 = \tilde{\epsilon}_{\rho\gamma} \mathbf{B}^\rho \frac{d\gamma}{dS}. \quad (6.4.9)$$

Вектор напряжения, передаваемого частью среды «над Γ » (куда направлен вектор \mathbf{N}) на среду, расположенную «под Γ », равен

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{N} \cdot \hat{T} = \tilde{\epsilon}_{\rho\gamma} \mathbf{B}^\rho \cdot \tilde{\epsilon}^{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} B_{\mu\lambda} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U \frac{d\gamma}{dS} = \\ &= \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} B_{\lambda\alpha} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U \frac{d\gamma}{dS} = \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U \frac{d\gamma}{dS} B^\beta \times \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

Вместе с тем, как указывалось выше,

$$d\tilde{\nabla} U = dq^a \frac{\partial}{\partial q^a} B^\beta \tilde{\nabla}_\beta U = dq^a B^\beta \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^a \partial q^\beta} - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \frac{\partial U}{\partial q^\rho} \right) = dq^a B^\beta \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U,$$

и поэтому

$$\mathbf{F} dS = d\tilde{\nabla} U \times \mathbf{i}_3, \quad \int_A^M \mathbf{F} dS = \mathbf{P} = \tilde{\nabla} U \times \mathbf{i}_3. \quad (6.4.11)$$

Этой формулой определен главный вектор напряжений \mathbf{P} по дуге AM кривой Γ ; его можно представить также в виде

$$\mathbf{P} = \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} \mathbf{R}_\lambda \frac{\partial U}{\partial q^\beta}, \quad \tilde{P}^\lambda = \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} \frac{\partial U}{\partial q^\beta}, \quad (6.4.12)$$

так что

$$\frac{\partial U}{\partial q^\beta} = \tilde{\epsilon}_{\lambda\beta} \tilde{P}^\lambda; \quad \frac{\partial U}{\partial q^1} = -\sqrt{B} \tilde{P}^2, \quad \frac{\partial U}{\partial q^2} = \sqrt{B} \tilde{P}^1. \quad (6.4.13)$$

Это — обобщение формул (1.8.4) гл. VII. В них \tilde{P}^a — контравариантные компоненты главного вектора напряжений в метрике деформированного тела.

Главный момент напряжений на дуге кривой Γ относительно начала координат в плоскости $x_3 = \text{const}$ представляется интегралом

$$m^0 = \int_A^M \mathbf{B} \times \mathbf{F} dS = \int_A^M \mathbf{B} \times (d\tilde{\nabla}U \times \mathbf{i}_3) = -\mathbf{i}_3 \int_A^M \mathbf{B} \cdot d\tilde{\nabla}U.$$

Обратившись к соотношению

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot d\tilde{\nabla}U &= d(\mathbf{B} \cdot \tilde{\nabla}U) - dq^\beta \mathbf{B}_\beta \cdot \tilde{\nabla}U = \\ &= d(\mathbf{B} \cdot \tilde{\nabla}U) - \frac{\partial U}{\partial q^\beta} dq^\beta = d(\mathbf{B} \cdot \tilde{\nabla}U) - dU, \end{aligned}$$

приходим к такому выражению главного момента относительно оси Oz :

$$m_z = U - \mathbf{B} \cdot \tilde{\nabla}U = U - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^\beta \frac{\partial U}{\partial q^\beta}. \quad (6.4.14)$$

Здесь дано обобщение формулы (1.8.5) гл. VII.

6.5. Плоское напряженное состояние. Рассматривается тело, имеющее в начальном состоянии (v -объем) форму плиты малой по сравнению с ее размерами в плане постоянной толщины h_0 ($|a_3| \leq h_0$). Торцы плиты не нагружены, а поверхностные силы на ее боковой поверхности параллельны срединной плоскости плиты $a_3 = 0$ и распределены симметрично относительно этой плоскости. Предполагается, что они сохраняют эти свойства (параллельность и симметричность относительно срединной плоскости) в деформированной плите (V -объем), так что напряженное состояние в ней симметрично относительно срединной плоскости $x_3 = 0$.

Материальные координаты q^1, q^2, q^3 вводятся соотношениями

$$x_\alpha = x_\alpha(q^1, q^2), \quad x_3 = q^3; \quad \mathbf{R} = x_\alpha \mathbf{i}_\alpha + \mathbf{i}_3 q^3. \quad (6.5.1)$$

Поэтому векторы исходного и взаимного базисов в V -объеме равны

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{B}_\alpha = \frac{\partial x_\gamma}{\partial q^\alpha} \mathbf{i}_\gamma, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{i}_3; \quad \mathbf{R}^\alpha = B^{\alpha\beta} \mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}^\alpha, \quad \mathbf{R}^3 = \mathbf{i}_3 \quad (6.5.2)$$

и ко- и контравариантные компоненты метрического тензора V -объема \hat{G} определяются формулами (6.1.5), (6.1.7).

Единичный вектор нормали $\tilde{\mathbf{N}}^\alpha$ к площадке $q^\alpha = \text{const}$, сонаправленный с вектором \mathbf{R}^α взаимного базиса, определяется по формуле

$$\tilde{\mathbf{N}}^\alpha = \frac{\mathbf{R}^\alpha}{|\mathbf{R}^\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{B^{\alpha\alpha}}} \mathbf{R}^\alpha. \quad (6.5.3)$$

Поэтому вектор напряжений на этой площадке \hat{t}^α равен

$$\hat{t}^\alpha = \hat{N} \cdot \hat{T} = \frac{1}{\sqrt{B^{\alpha\alpha}}} R^\alpha \cdot \hat{t}^{mk} R_m R_k = \frac{1}{\sqrt{B^{\alpha\alpha}}} \hat{t}^{\alpha k} R_k, \quad (6.5.4)$$

а их главный вектор по толщине плиты, обозначаемый \hat{T}^α , будет

$$\hat{T}^\alpha = \int_{-h}^h \hat{t}^\alpha dq^3 = \frac{1}{\sqrt{B^{\alpha\alpha}}} R_k \int_{-h}^h \hat{t}^{\alpha k} dq^3. \quad (6.5.5)$$

Введя обозначения

$$\int_{-h}^h \hat{t}^{\alpha\beta} dq^3 = \bar{p}^{\alpha\beta} = \bar{p}^{\beta\alpha} \quad (6.5.6)$$

и замечая, что $\hat{t}^{\alpha 3}$, вследствие симметрии напряженного состояния, нечетны по q^3 :

$$\int_{-h}^h \hat{t}^{\alpha 3} dq^3 = 0, \quad (6.5.7)$$

приходим к формулам

$$\sqrt{B^{\alpha\alpha}} \hat{T}^\alpha = \bar{p}^{\alpha\beta} B_\beta. \quad (6.5.8)$$

Функции $\bar{p}^{\alpha\beta}$ можно рассматривать как контравариантные компоненты поверхностного симметричного тензора

$$\hat{P} = \bar{p}^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta. \quad (6.5.9)$$

На поверхности $q^3 = h(q^1, q^2)$, ограничивающей деформированную плиту,

$$R = B(q^1, q^2) + i_3 h(q^1, q^2), \quad (6.5.10)$$

и векторы R'_α (отличные от базисных векторов $R_\alpha = B_\alpha$):

$$R'_1 = B_1 + i_3 \frac{\partial h}{\partial q^1}, \quad R'_2 = B_2 + i_3 \frac{\partial h}{\partial q^2},$$

расположены в ее касательной плоскости, а вектор

$$\begin{aligned} R'_1 \times R'_2 &= B_1 \times B_2 + B_1 \times i_3 \frac{\partial h}{\partial q^2} + i_3 \times B_2 \frac{\partial h}{\partial q^1} = \\ &= B_1 \times B_2 + \tilde{\epsilon}_{21} B^2 \frac{\partial h}{\partial q^2} - B^1 \tilde{\epsilon}_{12} \frac{\partial h}{\partial q^1} = B_1 \times B_2 - \sqrt{B} B^\alpha \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \end{aligned}$$

сонаправлен с единичным вектором нормали $\overset{3}{N}$ к ней. Замечая, что

$$B_1 \times B_2 = i_3 \sqrt{B}, \quad R'_1 \times R'_2 = \sqrt{B} \left(i_3 - B^\alpha \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \right),$$

$$|R'_1 \times R'_2| = \sqrt{B} \left(1 + B^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \frac{\partial h}{\partial q^\beta} \right)^{1/2},$$

получаем

$$\overset{3}{N} = \left(1 + B^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \frac{\partial h}{\partial q^\beta} \right)^{-1/2} \left(i_3 - B^\alpha \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \right). \quad (6.5.11)$$

Условие отсутствия нагружения на этой поверхности принимает вид

$$\overset{3}{N} \cdot \hat{T} = 0, \quad \left(i_3 - B^\lambda \frac{\partial h}{\partial q^\lambda} \right) \cdot [\tilde{\tau}^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta + \tilde{\tau}^{\alpha 3} (B_\alpha i_3 + i_3 B_\alpha) + \tilde{\tau}^{33} i_3 i_3] = 0$$

или

$$\left(\tilde{\tau}^{\alpha 3} - \tilde{\tau}^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial q^\beta} \right) B_\alpha + i_3 \left(\tilde{\tau}^{33} - \tilde{\tau}^{\alpha 3} \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \right) = 0. \quad (6.5.12)$$

Из получающихся трех соотношений

$$\tilde{\tau}^{\alpha 3} - \tilde{\tau}^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial q^\beta} = 0, \quad \tilde{\tau}^{33} - \tilde{\tau}^{\alpha 3} \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} = 0$$

исключаются компоненты $\tilde{\tau}^{\alpha 3}$ тензора напряжений. Приходим к уравнению:

$$\text{при } q^3 = \pm h(q^\alpha, q^\beta) \quad \tilde{\tau}^{33} = \tilde{\tau}^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \frac{\partial h}{\partial q^\beta}. \quad (6.5.13)$$

6.6. Уравнения равновесия. Уравнения статики в объеме при отсутствии объемных сил, записываемые в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^s} \sqrt{G} \tilde{\tau}^{sk} R_k &= \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{G} \tilde{\tau}^{\alpha k} R_k + \frac{\partial}{\partial q^3} \sqrt{G} \tilde{\tau}^{3k} R_k = \\ &= \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{G} (\tilde{\tau}^{\alpha\beta} B_\beta + \tilde{\tau}^{\alpha 3} i_3) + \frac{\partial}{\partial q^3} \sqrt{G} (\tilde{\tau}^{3\alpha} B_\alpha + \tilde{\tau}^{33} i_3) = 0, \end{aligned}$$

интегрируются по толщине плиты. Приходим к равенству

$$\int_{-h}^h \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{B} (\tilde{\tau}^{\alpha\beta} B_\beta + \tilde{\tau}^{\alpha 3} i_3) dq^3 + \sqrt{B} (\tilde{\tau}^{\alpha 3} B_\alpha + \tilde{\tau}^{33} i_3) \Big|_{-h}^h = 0. \quad (6.6.1)$$

Пределы интеграла зависят от q^1, q^2 ; поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \int_{-h}^h \sqrt{B} (\tilde{\tau}^{\alpha\beta} B_\beta + \tilde{\tau}^{\alpha 3} i_3) dq^3 &= \\ &= \int_{-h}^h \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{B} (\tilde{\tau}^{\alpha\beta} B_\beta + \tilde{\tau}^{\alpha 3} i_3) dq^3 + \sqrt{B} \left[\frac{\partial h}{\partial q^\alpha} (\tilde{\tau}^{\alpha\beta} B_\beta + \tilde{\tau}^{\alpha 3} i_3) \right] \Big|_{-h}^h \end{aligned}$$

и равенство (6.6.1) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \int_{-h}^h \sqrt{B} (\tilde{\tau}^{\alpha\beta} B_\beta + \tilde{\tau}^{\alpha 3} i_3) dq^3 + \\ + \sqrt{B} \left[\left(\tilde{\tau}^{33} - \tilde{\tau}^{\alpha 3} \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \right) i_3 + \left(\tilde{\tau}^{3\alpha} - \tilde{\tau}^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial q^\beta} \right) B_\alpha \right] \Big|_{-h}^h = 0.$$

Величина в квадратных скобках по (6.5.12) обращается в нуль. Обратившись теперь к формулам (6.5.6), (6.5.7), приходим к уравнению равновесия, в которое входят только величины, определяемые на средней поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{B} \tilde{p}^{\alpha\beta} B_\beta = 0. \quad (6.6.2)$$

Они целиком повторяют уравнения статики (6.3.1) задачи о плоской деформации. Поэтому им можно удовлетворить, введя в рассмотрение функцию напряжений U , так что по (6.4.4)

$$\tilde{p}^{\mu\lambda} = \tilde{\epsilon}^{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U = \frac{b}{B} \epsilon^{\mu\alpha} \epsilon^{\lambda\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U. \quad (6.6.3)$$

На боковой поверхности деформированной плиты

$$\mathbf{R} = \mathbf{B} (q^1(S), q^2(S)) + i_3 q^3, \quad (6.6.4)$$

где S — дуга кривой Γ , ограничивающей поперечное сечение в срединной плоскости $q^3 = 0$. Векторы

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial S} = \mathbf{B}_\alpha \frac{dq^\alpha}{dS}, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^3} = i_3$$

расположены в касательной плоскости этой поверхности, а вектор

$$\mathbf{B}_\alpha \frac{dq^\alpha}{dS} \times i_3 = \tilde{\epsilon}_{\lambda\alpha} \mathbf{B}^\lambda \frac{dq^\alpha}{dS} = \mathbf{N} \quad (6.6.5)$$

сонаправлен с нормалью к ней; это — единичный вектор нормали, так как

$$\tilde{\epsilon}_{\lambda\alpha} \mathbf{B}^\lambda \cdot \tilde{\epsilon}_{\mu\beta} \mathbf{B}^\mu \frac{dq^\alpha}{dS} \frac{dq^\beta}{dS} = \tilde{\epsilon}_{\lambda\alpha} \tilde{\epsilon}_{\mu\beta} B^{\lambda\mu} \frac{dq^\alpha}{dS} \frac{dq^\beta}{dS} = B_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{dS} \frac{dq^\beta}{dS} = 1.$$

Здесь использована формула (6.1.12) и учтено, что

$$B_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = dS^2.$$

Поверхностная сила \mathbf{F} на поверхности (6.6.4) определяется равенством

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} \cdot \hat{T} = \tilde{\epsilon}_{\lambda\gamma} \frac{dq^\gamma}{dS} \mathbf{B}^\lambda \cdot [\tilde{\tau}^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta + \tilde{\tau}^{\alpha 3} B_\alpha i_3 + i_3 (B_\alpha \tilde{\tau}^{\alpha 3} + i_3 \tilde{\tau}^{33})]$$

или

$$\mathbf{F} = \tilde{\epsilon}_{\alpha\gamma} \frac{dq^\gamma}{dS} (\tilde{\tau}^{\alpha\beta} B_\beta + \tilde{\tau}^{\alpha 3} i_3). \quad (6.6.6)$$

Главный вектор этих сил по толщине плиты по (6.5.6), (6.5.7) равен

$$\vec{f} = \int_{-h}^h \mathbf{F} dq^3 = \tilde{\epsilon}_{\alpha\gamma} \tilde{\rho}^{\alpha\beta} \mathbf{B}_\beta \frac{dq^\gamma}{dS} = \tilde{\epsilon}^{\beta\mu} \mathbf{B}_\beta \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\nabla}_\mu U \frac{dq^\lambda}{dS}. \quad (6.6.7)$$

Пришли к равенству (6.4.10); из него, повторив сказанное в п. 6.4, можно получить краевые условия (6.4.13), (6.4.14) для функции напряжений U .

6.7. Уравнение состояния. Вследствие предположенной симметрии деформации относительно плоскости $q^3 = x_3 = 0$, декартовы координаты точки $a_\alpha(q^1, q^2, q^3)$ в начальном состоянии плиты четны, а $a_3(q^1, q^2, q^3)$ нечетна по q^3 . Поэтому

$$a_3(q^1, q^2, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial q^3} \right)_{q^3=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial a_3}{\partial q^\alpha} \right)_{q^3=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial a_3}{\partial q^3} \right)_{q^3=0} = \frac{1}{\lambda}, \quad (6.7.1)$$

где λ — неизвестная функция q^1, q^2 .

Эти соотношения позволяют записать выражения компонент метрического тензора \hat{g} и определителя g в виде (6.1.5), (6.1.7):

$$q^3 = 0: \quad \begin{cases} g_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}, & g_{33} = \frac{1}{\lambda^2}, & g_{\alpha 3} = 0, \\ g^{\alpha\beta} = b^{\alpha\beta}, & g^{33} = \lambda^2, & g^{\alpha 3} = 0, \\ g = |g_{sk}| = \frac{b}{\lambda^2}, & b = b_{11}b_{22} - b_{22}^2. \end{cases} \quad (6.7.2)$$

Повторив вычисление п. 6.1, приходим также к выражениям (6.1.13), (6.1.15) инвариантов меры деформации \hat{G}^\times :

$$q^3 = 0: \quad I_1 = b^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + \lambda^2, \quad I_2 = \frac{B}{b} (\lambda^2 b^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + 1), \quad I_3 = \frac{B}{b} \lambda^2, \quad (6.7.3)$$

и к соотношению связи между ними (6.1.16). Это позволяет записать в форме (6.2.3), (6.2.5) выражения компонент тензора напряжения на срединной плоскости:

$$q^3 = 0: \quad \left. \begin{aligned} \hat{\tau}^{\alpha 3} &= 0, \quad \hat{\tau}^{33} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[\frac{\partial A}{\partial I_1} \lambda^2 + \frac{\partial A}{\partial I_2} \lambda^2 (I_1 - \lambda^2) + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} \right], \\ \hat{\tau}^{\alpha\beta} &= \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left(\frac{\partial A_1}{\partial I_1} b^{\alpha\beta} + I_3 \frac{\partial A_1}{\partial I_3} B^{\alpha\beta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.7.4)$$

В случае несжимаемой среды приходим к формулам (6.2.7), (6.2.8). Для весьма тонкой пластинки в соответствии с (6.7.1) имеем

$$a_3(q^1, q^2, q^3) = a_3(q^1, q^2, 0) + \left(\frac{\partial a_3}{\partial q^3} \right)_{q^3=0} q^3 = \frac{1}{\lambda} q^3$$

и при $q^3 = x_3 = h$, $a_3 = h_0$

$$h = h_0 \lambda. \quad (6.7.5)$$

При этой степени точности связь компонент $\tilde{t}^{\alpha\beta}$ тензора напряжений на срединной плоскости с компонентами осредненных внутренних усилий может быть определена из соотношения

$$\frac{\bar{p}^{\alpha\beta}}{2h_0} = \frac{1}{2h_0} \int_{-h}^h \tilde{t}^{\alpha\beta} dx_3 \approx (\tilde{t}^{\alpha\beta})_{x_3=0} \frac{2h}{2h_0} = \lambda (\tilde{t}^{\alpha\beta})_{x_3=0},$$

так что

$$\bar{p}^{\alpha\beta} = 2h_0 \lambda (\tilde{t}^{\alpha\beta})_{q^3=0}. \quad (6.7.6)$$

По (6.5.13), (6.7.5) имеем также

$$x^3 = q^3 = \pm h: \quad \tilde{t}^{33} = \tilde{t}^{\alpha\beta} \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \frac{\partial h}{\partial q^\beta} \approx h_0^2 \tilde{t}^{\alpha\beta} \frac{\partial \lambda}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial q^\beta},$$

и при $h_0 \rightarrow 0$ можно принять

$$(\tilde{t}^{33})_{q^3=0} = 0. \quad (6.7.7)$$

6.8. Система уравнений задачи о плоском напряженном состоянии. В предположении малости толщины плиты задача о напряженном состоянии при симметричном нагружении ее боковой поверхности сведена к рассмотрению величин на срединной плоскости. Разыскивается не тензор напряжений, а усредненные значения $\bar{p}^{\alpha\beta}$ основных напряжений $\tilde{t}^{\alpha\beta}$, тогда как остальные компоненты $\tilde{t}^{\alpha 3}$, \tilde{t}^{33} этого тензора, вследствие их малости сравнительно с основными, исключены из рассмотрения.

Две группы соотношений, определяющих симметричный тензор осредненных напряжений, сводятся к уравнению статики

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{B} \bar{p}^{\alpha\beta} B_\beta = 0 \quad (6.8.1)$$

и к уравнениям состояния

$$\bar{p}^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} 2h_0 \lambda \left(\frac{\partial A_1}{\partial I_1} b^{\alpha\beta} + I_3 \frac{\partial A_1}{\partial I_3} B^{\alpha\beta} \right). \quad (6.8.2)$$

Здесь A_1 — функция инвариантов I_1, I_3 :

$$I_1 = b^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + \lambda^2, \quad I_3 = \frac{B}{b} \lambda^2, \quad (6.8.3)$$

представляющая выражение удельной потенциальной энергии деформации $A(I_1, I_2, I_3)$, из которого инвариант I_2 исключен с помощью соотношения

$$I_3 - I_2 \lambda^2 + I_1 \lambda^4 - \lambda^6 = 0. \quad (6.8.4)$$

Дополнительное условие, служащее для определения неизвестной функции $\lambda(q^1, q^2)$, выражает требование отсутствия напряжения \tilde{t}^{33} на срединной поверхности:

$$\frac{\partial A}{\partial I_1} \lambda^2 + \frac{\partial A}{\partial I_2} \lambda^2 (I_1 - \lambda^2) + I_3 \frac{\partial A}{\partial I_3} = 0. \quad (6.8.5)$$

Краевое условие на контуре Γ — сечении плиты срединной плоскостью — представляется соотношением

$$\text{на } \Gamma: \quad \tilde{\epsilon}_{\alpha\gamma} \tilde{\rho}^{\alpha\beta} B_\beta \frac{dq^\gamma}{dS} = \tilde{f}, \quad (6.8.6)$$

где \tilde{f} — главный вектор поверхностных сил на боковой поверхности:

$$\tilde{f} = \int_{-h}^h F dq^3, \quad h = h_0 \lambda. \quad (6.8.7)$$

Уравнениям статики можно удовлетворить, выражая напряжения через функцию напряжений Эри:

$$\tilde{\rho}^{\mu\lambda} = \tilde{\epsilon}^{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}^{\lambda\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U. \quad (6.8.8)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta U = \tilde{\epsilon}_{\mu\alpha} \tilde{\epsilon}_{\lambda\beta} \tilde{\rho}^{\mu\lambda} = 4h_0 \sqrt{\frac{B}{b}} \left(\frac{\partial A_1}{\partial I_1} b_{\alpha\beta} + \lambda^2 \frac{\partial A_1}{\partial I_3} B_{\alpha\beta} \right). \quad (6.8.9)$$

Краевые условия для функции напряжений даются формулами (6.4.11) — (6.4.14).

В случае несжимаемого тела

$$I_3 = \frac{B}{b} \lambda^2 = 1 \quad (6.8.10)$$

и неизвестная скалярная функция p , вводимая вместо $\partial A / \partial I_3$, определяется из уравнений статики, дополненных этим условием.

6.9. Применение логарифмической меры в задаче о плоской деформации. В плоском поле перемещений (6.2.1) гл. II главные значения тензоров $\hat{M}^{1/2}$ или $\hat{G}^{\times 1/2}$ равны $1 + \delta_\alpha = e^{\nu_\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$), $\delta_3 = 0$, $e^{\nu_3} = 1$ (см. п. 3.5 гл. VIII). Через χ обозначается угол поворота, совмещающего оси $OXYZ$ с главными осями \hat{e} тензора $\hat{G}^{\times 1/2}$:

$$\hat{e}^1 = i_1 \cos \chi + i_2 \sin \chi, \quad \hat{e}^2 = -i_1 \sin \chi + i_2 \cos \chi.$$

Эти оси совмещаются с осями \hat{e}^1, \hat{e}^2 тензора $\hat{M}^{1/2}$ поворотом на угол α , так что

$$\hat{e}^1 = e^1 \cos \alpha + e^2 \sin \alpha, \quad \hat{e}^2 = -e^1 \sin \alpha + e^2 \cos \alpha,$$

$$\hat{e}^1 = i_1 \cos (\chi + \alpha) + i_2 \sin (\chi + \alpha), \quad \hat{e}^2 = -i_1 \sin (\chi + \alpha) + i_2 \cos (\chi + \alpha).$$

Вместе с тем по (3.4.5) гл. II имеем

$$e^{v_k} \tilde{e}^k = e^k \cdot \nabla R = e^k \cdot i_s i_t \lambda_{ts} \quad \left(\lambda_{ts} = \frac{\partial x_t}{\partial a_s} \right)$$

или

$$e^{v_1} \tilde{e}^1 \cdot i_t = e^1 \cdot i_s \lambda_{ts}, \quad e^{v_2} \tilde{e}^2 \cdot i_t = e^2 \cdot i_s \lambda_{ts}.$$

Приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} e^{v_1} \cos(\chi + \alpha) &= \lambda_{11} \cos \chi + \lambda_{12} \sin \chi, & e^{v_2} \sin(\chi + \alpha) &= \lambda_{11} \sin \chi - \lambda_{12} \cos \chi \\ e^{v_1} \sin(\chi + \alpha) &= \lambda_{21} \cos \chi + \lambda_{22} \sin \chi, & e^{v_2} \cos(\chi + \alpha) &= \\ &= -\lambda_{21} \sin \chi + \lambda_{22} \cos \chi, \end{aligned}$$

позволяющим выразить величины λ_{ts} через четыре инвариантных параметра e^{v_1} , e^{v_2} , χ , α :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11} &= \frac{1}{2} [(e^{v_1} + e^{v_2}) \cos \alpha + (e^{v_1} - e^{v_2}) \cos(2\chi + \alpha)], \\ \lambda_{22} &= \frac{1}{2} [(e^{v_1} + e^{v_2}) \cos \alpha - (e^{v_1} - e^{v_2}) \cos(2\chi + \alpha)], \\ \lambda_{21} &= \frac{1}{2} [(e^{v_1} + e^{v_2}) \sin \alpha + (e^{v_1} - e^{v_2}) \sin(2\chi + \alpha)], \\ \lambda_{12} &= \frac{1}{2} [-(e^{v_1} + e^{v_2}) \sin \alpha + (e^{v_1} - e^{v_2}) \sin(2\chi + \alpha)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.9.1)$$

Эти параметры связаны условиями интегрируемости

$$\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial a_2} = \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \lambda_{21}}{\partial a_2} = \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial a_1}. \quad (6.9.2)$$

Заметим также, что представления компонент тензора $\hat{M}^{1/2}$ в осях $OXYZ$ даются формулами [см., например, (I. 3.14)]

$$\begin{aligned} M_{11}^{1/2} &= \frac{1}{2} [(e^{v_1} + e^{v_2}) + (e^{v_1} - e^{v_2}) \cos 2(\chi + \alpha)], \\ M_{22}^{1/2} &= \frac{1}{2} [(e^{v_1} + e^{v_2}) - (e^{v_1} - e^{v_2}) \cos 2(\chi + \alpha)], \\ M_{12}^{1/2} &= \frac{1}{2} (e^{v_1} - e^{v_2}) \sin 2(\chi + \alpha), \quad M_{33}^{1/2} = 1, \end{aligned}$$

а соосная с $\hat{M}^{1/2}$ логарифмическая мера деформации \hat{N} определяется ее компонентами

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= \frac{1}{2} [(v_1 + v_2) + (v_1 - v_2) \cos 2(\chi + \alpha)], \\ N_{22} &= \frac{1}{2} [(v_1 + v_2) - (v_1 - v_2) \cos 2(\chi + \alpha)], \\ N_{12} &= \frac{1}{2} (v_1 - v_2) \sin 2(\chi + \alpha), \quad N_{33} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.9.3)$$

В случае плоской деформации несжимаемого материала $v_1 + v_2 = 0$, $v_1 = -v_2 = v > 0$ и эти выражения упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= v \cos 2(\chi + \alpha), & N_{22} &= -v \cos 2(\chi + \alpha), \\ N_{12} &= v \sin 2(\chi + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (6.9.4)$$

а величины $\lambda_{\alpha\beta}$ представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{11} &= \operatorname{ch} v \cos \alpha + \operatorname{sh} v \cos (2\chi + \alpha), \\ \lambda_{22} &= \operatorname{ch} v \cos \alpha - \operatorname{sh} v \cos (2\chi + \alpha), \\ \lambda_{21} &= \operatorname{ch} v \sin \alpha + \operatorname{sh} v \sin (2\chi + \alpha), \\ \lambda_{12} &= -\operatorname{ch} v \sin \alpha + \operatorname{sh} v \sin (2\chi + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (6.9.5)$$

Компоненты тензора напряжений \hat{T} для несжимаемого материала с равной нулю фазой подобия ω согласно (3.5.14) гл. VIII и (6.9.4) оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= p + 2\mu(\Gamma) v \cos 2(\chi + \alpha), \\ t_{22} &= p - 2\mu(\Gamma) v \cos 2(\chi + \alpha), \\ t_{12} &= 2\mu(\Gamma) v \sin 2(\chi + \alpha), & t_{33} &= p \end{aligned} \right\} \quad (6.9.6)$$

$(\Gamma = 2v)$

Для определения четырех неизвестных параметров имеется такое же число уравнений — два уравнения статики и два условия интегрируемости (6.9.2).

6.10. Плоская деформация несжимаемого материала с равной нулю фазой подобия девиаторов *). Уравнения статики при отсутствии массовых сил можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} (t_{11} - t_{22} + 2it_{12}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (t_{11} + t_{22}) = 0 \quad (z = x_1 + ix_2).$$

За независимые переменные приняты координаты точки в деформированном состоянии тела. Обратившись к формулам (6.9.6), получим

$$\frac{\partial}{\partial z} f(v) e^{2i(\chi + \alpha)} + \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (f(v) = 2v\mu(\Gamma)). \quad (6.10.1)$$

Этому соотношению можно удовлетворить, полагая

$$f(v) = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} e^{-2i(\chi + \alpha)}, \quad p = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (6.10.2)$$

и, поскольку p вещественно, надо принять, введя вещественную функцию U ,

$$\Phi = \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

*) Этой задаче посвящена работа Л. А. Толоконникова «Конечные плоские деформации несжимаемого материала» (Прикл. матем. и мех., т. XXIII, № 1 (1959), 146—158).

Приходим к соотношениям, которые можно было предвидеть:

$$\left. \begin{aligned} 2f(v) e^{2i(\chi+\alpha)} &= t_{11} - t_{22} + 2it_{12} = \\ &= -4 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \\ 2p &= t_{11} + t_{22} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.10.3)$$

и функция U оказалась, конечно, функцией Эри плоской задачи:

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= p + f(v) \cos 2(\chi + \alpha) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ t_{22} &= p - f(v) \cos 2(\chi + \alpha) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ t_{12} &= f(v) \sin 2(\chi + \alpha) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10.4)$$

Следствием первого соотношения (6.10.3) является формула, связывающая величину v с функцией напряжений:

$$f^2(v) = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}. \quad (6.10.5)$$

Из нее можно определить производные v по z и \bar{z} :

$$f(v) f'(v) \frac{\partial v}{\partial z} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} \right), \quad f(v) f'(v) \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} \right). \quad (6.10.6)$$

Из того же соотношения (6.10.3) имеем

$$e^{2i(\chi+\alpha)} = -\frac{2}{f(v)} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} \quad (6.10.7)$$

и, далее, учитывая (6.10.5), (6.10.6),

$$\frac{\partial 2(\chi+\alpha)}{\partial z} = \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}}{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}} \quad (6.10.8)$$

и аналогичное уравнение для производной по \bar{z} .

Возвращаясь к соотношениям (6.9.5), представим их в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} [(\lambda_{11} + \lambda_{22}) + i(\lambda_{21} - \lambda_{12})] = \operatorname{ch} v e^{i\alpha}, & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} &= \operatorname{ch} v e^{-i\alpha}, \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{\xi}} &= \frac{1}{2} [(\lambda_{11} - \lambda_{22}) + i(\lambda_{21} + \lambda_{12})] = \operatorname{sh} v e^{i(2\chi+\alpha)}, & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\xi}} &= \operatorname{sh} v e^{-i(2\chi+\alpha)}, \end{aligned} \right\} \quad (6.10.9)$$

причем $\zeta = a_1 + ia_2$. Из них находим обратные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \operatorname{ch} v e^{-ia}, & \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} &= \operatorname{ch} v e^{ia}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} &= -\operatorname{sh} v e^{i(2\chi+a)}, & \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= -\operatorname{sh} v e^{-i(2\chi+a)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10.10)$$

Записав условия их интегрируемости

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{z} \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \bar{z} \partial z},$$

придем к двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} v \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} - i \operatorname{ch} v \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} &= - \left[\operatorname{ch} v \frac{\partial v}{\partial z} + i \operatorname{sh} v \left(\frac{\partial^2 (\chi + \alpha)}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \right] e^{2i(\chi + \alpha)}, \\ \operatorname{sh} v \frac{\partial v}{\partial z} + i \operatorname{ch} v \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= - \left[\operatorname{ch} v \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} - i \operatorname{sh} v \left(\frac{\partial^2 (\chi + \alpha)}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \right) \right] e^{-2i(\chi + \alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.10.11)$$

В них следует заменить величины

$$e^{\pm 2i(\chi + \alpha)}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial^2 (\chi + \alpha)}{\partial z}, \frac{\partial^2 (\chi + \alpha)}{\partial \bar{z}} \quad (6.10.12)$$

их значениями по (6.10.6) — (6.10.8). Это позволит выразить производные от α по z и \bar{z} через производные функции напряжений и величину v (параметр α исключен). Вслед за этим условие интегрируемости

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \bar{z} \partial z} \quad (6.10.13)$$

приведет к дифференциальному уравнению четвертого порядка для функции напряжений U , в которое войдет также величина v . Но последняя связана с U соотношением (6.10.5).

Переход к исходным независимым переменным $\zeta, \bar{\zeta}$ осуществляется с помощью соотношений

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \left[\frac{\partial U}{\partial z} \operatorname{ch} v + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \operatorname{sh} v e^{-2i(\chi + \alpha)} \right] e^{ia} \quad \text{и т. д.}$$

с последующей заменой производных вида (6.10.12) их значениями.

Не останавливаясь на не представляющих затруднений записях краевых условий.

6.11. Пример. Радиально-симметричная деформация. При такой деформации

$$z = R(\rho^2) \zeta = R(\zeta \bar{\zeta}) \zeta \quad (\zeta = \rho e^{i\theta} = a_1 + ia_2), \quad (6.11.1)$$

причем $R(\rho^2)$ — вещественная функция. По (6.10.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= R'(\rho^2) \rho^2 + R(\rho^2) = \operatorname{ch} v e^{ia}, \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} &= R'(\rho^2) \bar{\zeta}^2 = R'(\rho^2) \rho^2 \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} = \operatorname{sh} v e^{i(2\chi + \alpha)}, \end{aligned}$$

так что $\alpha = 0$,

$$R'(\rho^2)\rho^2 + R(\rho^2) = \operatorname{ch} \nu, \quad R'(\rho^2)\rho^2 = \operatorname{sh} \nu, \quad e^{2i\chi} = \frac{\xi}{\bar{\xi}} = e^{2i\theta}. \quad (6.11.2)$$

Отсюда находим

$$2R(\rho^2)R'(\rho^2)\rho^2 + R^2(\rho^2) = 1, \quad R^2 = 1 - \frac{C}{\rho^2} \quad (6.11.3)$$

и далее

$$R(\rho^2) = e^{-\nu} = \sqrt{1 - \frac{C}{\rho^2}}, \quad (6.11.4)$$

так что $0 < C < \rho_0^2$, где ρ_0 — радиус отверстия в деформируемом цилиндрическом теле.

Теперь, сославшись, например, на формулу (1.13.8) гл. VII, по (6.10.3) и (6.11.2) имеем

$$t_r - t_\theta + 2it_{r\theta} = 2f(\nu) = -4\frac{\xi}{\bar{\xi}}\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2}, \quad t_r - t_\theta = 2f(\nu), \quad t_{r\theta} = 0 \quad (6.11.5)$$

и, далее,

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{z}} = U'(-\bar{\xi}e^{2i\theta}\operatorname{sh} \nu + \xi \operatorname{ch} \nu) = \xi e^\nu U'. \quad (6.11.6)$$

Здесь, как и выше, штрихом обозначается производная по $\rho^2 = \xi \bar{\xi}$. Теперь находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} &= \xi^2 e^{2\nu} U'' + U' \left[\frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} e^\nu + \xi e^\nu \left(\frac{\partial \nu}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \nu}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{z}} \right) \right] = \\ &= \xi^2 e^{2\nu} U'' - e^\nu U' \left[e^{2i\theta} \operatorname{sh} \nu + \frac{\xi^2 C e^\nu}{2\rho^4 \left(1 - \frac{C}{\rho^2} \right)} \right], \end{aligned}$$

и дифференциальное уравнение равновесия (6.11.5) приводится к виду

$$\rho^2 e^{2\nu} U'' - e^\nu \left[\operatorname{sh} \nu + \frac{e^\nu C}{2\rho^2 \left(1 - \frac{C}{\rho^2} \right)} \right] U' = -\frac{1}{2} f(\nu).$$

После замены ρ^2 его значением по (6.11.4)

$$U'' - \frac{1}{C} (1 - e^{-2\nu}) \operatorname{sh} 2\nu U' = -\frac{1}{2C} f(\nu) e^{-2\nu} (1 - e^{-2\nu}) \quad (6.11.7)$$

и введения новой независимой переменной (вместо ρ^2)

$$q = e^{-2\nu} = 1 - \frac{C}{\rho^2}$$

приходим к легко интегрируемому дифференциальному уравнению относительно U' :

$$\frac{dU'}{dq} - \frac{1+q}{q} U' = -\frac{1}{2} f(\nu) \frac{q}{1-q}.$$

Из него имеем

$$\frac{dU}{d\rho^2} = U' = -\frac{1}{2} q e^q \left[C_1 + \int^q f(v) \frac{e^{-q}}{1-q} dq \right], \quad (6.11.8)$$

после чего по (6.11.6) определяется $\frac{\partial U}{\partial z}$ и далее $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial z}$, то есть по (6.10.4) — сумма нормальных напряжений, а значит, и каждое из напряжений t_r, t_θ . Не останавливаемся на этом вычислении и на определении постоянных по краевому условию *).

§ 7. Полулинейный материал

7.1. Уравнения равновесия полулинейного материала. Удельная потенциальная энергия деформации «полулинейного», или «гармонического», материала, введенного в рассмотрение в п. 2.8 гл. VIII, представляется выражением (2.8.7) гл. VIII. Закон состояния его (2.8.8) гл. VIII определяет связь тензора напряжения Пиола — Кирхгоффа \hat{D} с величинами, характеризующими деформацию, — тензором поворота \hat{A} главных осей меры деформации \hat{G}^\times и тензором-градиентом ∇R :

$$\hat{D} = (\lambda s_1 - 2\mu) \hat{A} + 2\mu \nabla R. \quad (7.1.1)$$

Уравнение равновесия (2.8.4) гл. VIII для тензора Пиола, записываемое в векторном базисе начального объема, представляется в виде **)

$$(\lambda s_1 - 2\mu) \nabla \cdot \hat{A} + \lambda \hat{A}^* \cdot \nabla s_1 + 2\mu \nabla^2 R + \rho_0 K = 0. \quad (7.1.2)$$

Это — аналог уравнений равновесия в перемещениях линейной теории упругости. При задании поверхностных сил F к нему присоединяется краевое условие

$$(\lambda s_1 - 2\mu) n \cdot \hat{A} + 2\mu n \cdot \nabla R = F \frac{dO}{do} = F \left(\frac{G}{g} n \cdot \hat{G}^{\times -1} \cdot n \right)^{1/2}. \quad (7.1.3)$$

Итак, уравнения статики в объеме и на поверхности представлены в базисах начального состояния; этим обусловлено упрощение, вносимое применением тензора Пиола — Кирхгоффа в рассмотрение задач нелинейной теории упругости. Однако оно затруднено тем, что в выражение этого тензора входят тензор поворота \hat{A} и инвариант s_1 . Их представление требует знания тензоров $\hat{G}^{\times 1/2}, \hat{G}^{\times -1/2}$:

$$\hat{A} = \hat{G}^{\times -1/2} \cdot \nabla R, \quad s_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = I_1(\hat{G}^{\times 1/2}) - 3, \quad (7.1.4)$$

*) См. статью В. Г. Громова в книге Г. Н. Савина «Распределение напряжений около отверстий», гл. IX, стр. 676—691 (изд-во «Наукова думка», 1968).

**) Звездочкой обозначается транспонирование тензора.

а определение этих тензоров предполагает знание главных значений G_s и главных направлений \hat{e} меры деформации \hat{G}^\times :

$$\hat{G}^\times = G_1 \hat{e} \hat{e} + G_2 \hat{e} \hat{e} + G_3 \hat{e} \hat{e}. \quad (7.1.5)$$

7.2. Сохранение главных направлений. Эти затруднения отпадают при совпадении главных направлений тензоров \hat{G}^\times и \hat{T} (или \hat{G}^\times и \hat{M}). Тогда $\hat{e} = \hat{e}$ и

$$\hat{A} = \hat{e} \hat{e} = \hat{g}, \quad \nabla R = \hat{G}^{\times 1/2} = \nabla R^*, \quad s_1 = \nabla \cdot R - 3, \quad (7.2.1)$$

где \hat{g} — единичный тензор в v -объеме. Уравнение равновесия (7.1.2), линейное относительно вектора R , принимает вид

$$\lambda \nabla \nabla \cdot R + 2\mu \nabla^2 R + \rho_0 K = 0, \quad (7.2.2)$$

и нелинейность задачи определяется только правыми частями краевого условия

$$[\lambda \nabla \cdot R - (3\lambda + 2\mu)] n + 2\mu n \cdot \nabla R = F \frac{dO}{do}. \quad (7.2.3)$$

Заменив в этих уравнениях вектор R вектором перемещения $u = R - r$ и учитывая, что теперь $\nabla u = \nabla u^*$, приходим к уравнениям

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 u + \rho_0 K = 0, \quad \lambda n \nabla \cdot u + 2\mu n \cdot \nabla u = F \frac{dO}{do}. \quad (7.2.4)$$

Их левые части представляют частный случай уравнений равновесия в перемещениях линейной теории упругости (здесь $\nabla \nabla \cdot u = \nabla^2 u$).

7.3. Примеры (цилиндр и сфера). Случаи сохранения главных направлений имеют место при осесимметричной деформации круглого цилиндра и радиально-симметричной деформации сферы.

1°. Цилиндр. Введя цилиндрические координаты r, θ, z и предполагая, что осевое перемещение не зависит от r , имеем

$$\left. \begin{aligned} R = f(r) e_r + k \alpha z, \quad R_1 = f'(r) e_r, \quad R_2 = f(r) e_\theta, \quad R_3 = \alpha k, \\ r^1 = e_r, \quad r^2 = \frac{1}{r} e_\theta, \quad r^3 = k. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.1)$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \nabla R = e_r e_r f'(r) + e_\theta e_\theta \frac{f(r)}{r} + k k \alpha = \nabla R^* = \hat{G}^{\times 1/2}, \\ \hat{G}^\times = e_r e_r f'^2(r) + e_\theta e_\theta \frac{f^2(r)}{r^2} + k k \alpha^2 = \hat{g}^{\times -1}, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.2)$$

так что главные оси тензоров \hat{G}^\times , \hat{g} совпадают с координатными направлениями векторов e_r , e_θ , k . При этом

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = f' + \frac{f}{r} + \alpha, \quad \nabla \nabla \cdot \mathbf{R} = e_r \left(f' + \frac{f}{r} \right)' = \nabla \cdot \nabla \mathbf{R} = \nabla^2 \mathbf{R}$$

и уравнение равновесия (7.2.2) при отсутствии массовых сил приводится к соотношению

$$\left(f' + \frac{f}{r} \right)' = 0, \quad f' + \frac{f}{r} = 2C_1, \quad f = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (7.3.3)$$

Постоянные C_1 , C_2 , α определяются по заданию давлений на наружной и внутренней поверхностях полого цилиндра $r = r_0$ и $r = r_1$ и осевой силы Q на торце S . Приходим к трем уравнениям, которые можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda + \mu)(C_1 - 1) + \lambda(\alpha - 1) - 2\mu \frac{C_2}{r_0^2} &= -p_0 \left(C_1 + \frac{C_2}{r_0^2} \right) \alpha, \\ 2(\lambda + \mu)(C_1 - 1) + \lambda(\alpha - 1) - 2\mu \frac{C_2}{r_1^2} &= p_1 \left(C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} \right) \alpha, \\ 2\lambda(C_1 - 1) + (\lambda + 2\mu)(\alpha - 1) &= \frac{Q}{\pi(r_0^2 - r_1^2)} \quad \left(kQ = \iint F dO \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.3.4)$$

Например, в случае цилиндра, расположенного между двумя неподвижными гладкими плитами ($\alpha = 1$) и нагруженного равномерно распределенным давлением по наружной поверхности ($p_0 = p$, $p_1 = 0$), имеем

$$f(r_1) = C_1 r_1 + \frac{C_2}{r_1} = \frac{[(\lambda + \mu)(2\mu - p)(1 - k)]}{[\mu + (\lambda + \mu)k]p + 2\mu(\lambda + \mu)(1 - k)} r_1 \quad \left(k = \frac{r_1^2}{r_0^2} \right),$$

и внутренний радиус деформированного цилиндра $f(r_1) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 2\mu$.

2° С ф е р а. При центрально-симметричной деформации сферы, введя сферические координаты R , θ , λ , имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= f(R) e_R, \quad \mathbf{R}_1 = f'(R) e_R, \quad \mathbf{R}_2 = f(R) e_\theta, \\ \mathbf{R}_3 &= f(R) e_\lambda \sin \theta, \quad \mathbf{r}^1 = e_R, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{e_\theta}{R}, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{e_\lambda}{R \sin \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.5)$$

так что

$$\nabla \mathbf{R} = f'(R) e_R e_R + \frac{f(R)}{R} (e_\theta e_\theta + e_\lambda e_\lambda) = \left[f'(R) - \frac{f(R)}{R} \right] e_R e_R + \hat{g} \frac{f(R)}{R},$$

причем \hat{g} — единичный тензор. В этом случае главные оси тензора

$$\hat{G}^\times = f'^2(R) e_R e_R + \frac{f^2(R)}{R^2} (e_\theta e_\theta + e_\lambda e_\lambda) = \left(f'^2 - \frac{f^2}{R^2} \right) e_R e_R + \frac{f^2}{R^2} \hat{g} \quad (7.3.6)$$

также имеют направления e_R, e_θ, e_λ , сохраняющиеся при деформации. Получаем

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{R} &= f'(R) + 2 \frac{f(R)}{R}, \quad \nabla \nabla \cdot \mathbf{R} = \left(f' + 2 \frac{f}{R} \right)' e_R, \\ \nabla \cdot \nabla \mathbf{R} &= \nabla^2 \mathbf{R} = e_R \left(f' + 2 \frac{f}{R} \right)' = \nabla \nabla \cdot \mathbf{R} \end{aligned} \right\} \quad (7.3.7)$$

и по (7.2.2)

$$f'(R) + 2 \frac{f(R)}{R} = 3c_1, \quad f(R) = c_1 R + \frac{c_2}{R^2}. \quad (7.3.8)$$

Далее по (7.2.3) имеем

$$\frac{dO}{do} = \frac{f^2}{R^2}, \quad \left[(3\lambda + 2\mu)(c_1 - 1) - \frac{4\mu c_2}{R^3} \right] \frac{1}{\left(c_1 + \frac{c_2}{R^3} \right)^2} = \sigma_R, \quad (7.3.9)$$

и постоянные c_1, c_2 находятся по заданию давлений на наружной ($R = R_0$) и внутренней ($R = R_1$) поверхностях полый сферы. Например, в случае только наружного давления ($p_0 = p, p_1 = 0$) приходим к уравнению

$$p = \frac{(3\lambda + 2\mu)(1 - c_1)(1 - k)}{\left[c_1 + \frac{c_1 - 1}{4\mu} (3\lambda + 2\mu) k \right]^2} \quad \left(k = \frac{R_1^3}{R_0^3} \right). \quad (7.3.10)$$

Внутренний радиус деформированной сферы дается равенством

$$f(R_1) = \frac{R_1}{4\mu} [4\mu c_1 + (3\lambda + 2\mu)(c_1 - 1)],$$

и, поскольку $p > 0, f(R_1) \geq 0$, имеем

$$0 \leq 1 - c_1 \leq \frac{4\mu}{3(\lambda + 2\mu)}.$$

Рассматриваемое решение осуществляется для значений наружного давления

$$0 \leq p \leq \frac{12\mu(\lambda + 2\mu)}{(1 - k)(3\lambda + 2\mu)}.$$

7.4. Плоская деформация. Рассматривается поле перемещений, в котором декартовы координаты x_s точки деформированного призматического тела связаны с ее декартовыми координатами a_s в начальном состоянии соотношениями

$$x_\alpha = x_\alpha(a_1, a_2), \quad \alpha = 1, 2; \quad x_3 = ca_3. \quad (7.4.1)$$

Единичные векторы i_s координатных осей представляют векторный и взаимный векторный базисы r_s, r^s начального состояния; в конечном состоянии векторный базис и тензор-градиент $\nabla \mathbf{R}$ определяются равенствами

$$\mathbf{R}_\alpha = i_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial a_\alpha}, \quad \mathbf{R}_3 = ci_3; \quad \nabla \mathbf{R} = i_\alpha i_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial a_\alpha} + ci_3 i_3$$

(греческим индексам задаются значения 1, 2). Имеем теперь

$$\begin{aligned}\hat{G}^{\times} &= \nabla R \cdot \nabla R^* = i_{\alpha} i_{\beta} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial a_{\alpha}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial a_{\beta}} + c^2 i_3 i_3, \\ G_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial a_{\alpha}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial a_{\beta}}, \quad G_{\alpha 3} = 0, \quad G_{33} = c^2, \\ G &= c^2 (G_{11} G_{22} - G_{12}^2) = c^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1} \frac{\partial x_2}{\partial a_2} - \frac{\partial x_1}{\partial a_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_1} \right)^2.\end{aligned}$$

Тензоры $\hat{G}^{*1/2}$ и \hat{A} вычисляются, как показано в п. 6.2 гл. II,

$$\left. \begin{aligned}\hat{G}^{\times 1/2} &= (i_{\alpha} i_{\beta} \cos \chi - i_3 \times i_{\alpha} i_{\beta} \sin \chi) \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial a_{\beta}} + c i_3 i_3, \\ \hat{A} &= (i_1 i_1 + i_2 i_2) \cos \chi + (i_1 i_2 - i_2 i_1) \sin \chi + i_3 i_3.\end{aligned}\right\} \quad (7.4.2)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned}\cos \chi &= \frac{1}{q} \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1} + \frac{\partial x_2}{\partial a_2} \right), \quad \sin \chi = \frac{1}{q} \left(\frac{\partial x_2}{\partial a_1} - \frac{\partial x_1}{\partial a_2} \right), \\ q &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1} + \frac{\partial x_2}{\partial a_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial a_1} - \frac{\partial x_1}{\partial a_2} \right)^2},\end{aligned}\right\} \quad (7.4.3)$$

причем

$$I_1(\hat{G}^{\times 1/2}) = q + c, \quad s_1 = q + c - 3. \quad (7.4.4)$$

Далее вводятся комплексные обозначения координат точки поперечного сечения тела

$$\xi = a_1 + i a_2, \quad z = x_1 + i x_2.$$

Это позволяет представить формулы (7.4.3) в виде

$$q e^{i\chi} = 2 \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad e^{2i\chi} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\xi}} \right)^{-1}, \quad q = 2 \left| \frac{\partial z}{\partial \xi} \right| = 2 \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\xi}} \right)^{1/2}. \quad (7.4.5)$$

Представление тензора \hat{D} по (7.1.1) приводится к виду

$$\hat{D} = [\lambda q - 2(\lambda + \mu) + \lambda(c + 1)] \hat{A} + 2\mu \nabla R,$$

и его компоненты равны

$$\left. \begin{aligned}\partial^{11} &= \psi(q) \cos \chi - 2\mu \frac{\partial x_2}{\partial a_2}, \\ \partial^{22} &= \psi(q) \cos \chi - 2\mu \frac{\partial x_1}{\partial a_1}, \\ \partial^{12} &= \psi(q) \sin \chi + 2\mu \frac{\partial x_1}{\partial a_2}, \\ \partial^{21} &= -\psi(q) \sin \chi + 2\mu \frac{\partial x_2}{\partial a_1}, \\ \partial^{33} &= \lambda(q + c - 3) + 2\mu(c - 1), \quad \partial^{\alpha 3} = 0,\end{aligned}\right\} \quad (7.4.6)$$

причем введено обозначение

$$\psi(q) = (\lambda + 2\mu)(q - 2) + 2\mu - \lambda(c - 1) = (\lambda + 2\mu) \left[q - \frac{1 - \nu(c - 1)}{1 - \nu} \right] \quad (7.4.7)$$

$$\left(\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right).$$

В рассмотрение удобно ввести комплексные выражения

$$\partial^{11} + i\partial^{12} = \psi(q) e^{i\chi} + 2\mu i \frac{\partial z}{\partial a_2}, \quad \partial^{22} - i\partial^{21} = \psi(q) e^{i\chi} - 2\mu \frac{\partial z}{\partial a_1}. \quad (7.4.8)$$

Тогда уравнения статики при отсутствии массовых сил

$$\frac{\partial \partial^{11}}{\partial a_1} + \frac{\partial \partial^{21}}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \partial^{12}}{\partial a_1} + \frac{\partial \partial^{22}}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \partial^{33}}{\partial a_3} = 0$$

записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial a_1} (\partial^{11} + i\partial^{12}) + i \frac{\partial}{\partial a_2} (\partial^{22} - i\partial^{21}) = 0, \quad \frac{\partial \partial^{33}}{\partial a_3} = 0$$

и по (7.4.8) приводят к соотношениям

$$2 \frac{\partial}{\partial \xi} \psi(q) e^{i\chi} = 0, \quad \partial^{33} = \partial^{33}(a_1, a_2).$$

Величина $\psi(q) e^{i\chi}$ оказывается функцией комплексного переменного ξ :

$$\psi(q) e^{i\chi} = \Phi'(\xi), \quad e^{i\chi} = \frac{\Phi'(\xi)}{|\Phi'(\xi)|}. \quad (7.4.9)$$

Этим, по-видимому, объясняется наименование «гармонический» для материала с удельной потенциальной энергией деформации, задаваемой выражением (2.8.7) гл. VIII.

Равенства (7.4.5) и (7.4.7) позволяют установить соотношение

$$2 \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\Phi'(\xi)}{\lambda + 2\mu} + \frac{1 - \nu(c - 1)}{1 - \nu} \frac{\Phi'(\xi)}{|\Phi'(\xi)|}, \quad (7.4.10)$$

связывающее искомые функции $z(\xi, \bar{\xi})$, $\Phi'(\xi)$.

Рассматривая в поперечном сечении деформированного тела дугу L (в начальном состоянии l), называя ее элемент dS (ds на l) и обратившись к уравнениям равновесия на поверхности (7.1.3), имеем

$$\text{на } l: \quad cF_1 \frac{dS}{ds} = n_1 \partial^{11} + n_2 \partial^{21}, \quad cF_2 \frac{dS}{ds} = n_1 \partial^{12} + n_2 \partial^{22} \quad \left(\frac{dO}{do} = c \frac{dS}{ds} \right),$$

где F_1, F_2 — проекции на оси OX, OY поверхностной силы на L . При обозначениях

$$F = F_1 + iF_2, \quad n = n_1 + in_2 = \frac{da_2}{ds} - i \frac{da_1}{ds} = -i \frac{d\xi}{ds},$$

используя равенства (7.4.8), (7.4.9), получаем

$$\text{на } l: \quad icF \frac{dS}{ds} = \psi(q) e^{i\chi} \frac{d\xi}{ds} - 2\mu \frac{dz}{ds} = \Phi'(\xi) \frac{d\xi}{ds} - 2\mu \frac{dz}{ds}. \quad (7.4.11)$$

Отсюда находим также значение главного вектора поверхностных сил на отрезке дуги M_0M :

$$\text{на } l: \quad icV = ic \int_{s_1}^s F dS = \Phi(\xi) - \Phi(\xi_0) - 2\mu [z(\xi, \xi) - z(\xi_0, \xi_0)]. \quad (7.4.12)$$

Например, при действии равномерно распределенной нормальной нагрузки

$$\text{на } l: \quad F = -pN = pi \frac{dz}{dS}, \quad \Phi(\xi) = (2\mu - cp)z(\xi, \xi) + \text{const}. \quad (7.4.13)$$

На прямых, параллельных в деформированном теле координатным осям OX , OY , имеем

$$\begin{aligned} dS &= dx_2, \quad F = \overset{1}{F}_1 + i\overset{1}{F}_2 = \sigma_1 + i\tau_{12}, \\ d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x_2} dx_2, \quad dz = i dx_2 \quad (dx_1 = 0), \\ dS &= dx_1, \quad F = \overset{2}{F}_1 + i\overset{2}{F}_2 = -(\tau_{21} + i\sigma_2), \\ d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x_1} dx_1, \quad dz = dx_1 \quad (dx_2 = 0), \end{aligned}$$

так что, обратившись к (7.4.11), получаем

$$\left. \begin{aligned} i(c\sigma_1 + 2\mu) - c\tau_{12} &= \psi(q) e^{i\chi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2}, \\ -ic\tau_{21} + (c\sigma_2 + 2\mu) &= \psi(q) e^{i\chi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.14)$$

Из соотношений

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi} = 1 = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} = 0 = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\xi}},$$

учитывая (7.4.5) и легко проверяемое тождество

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \bar{\xi}} = \frac{\partial x_1}{\partial a_1} \frac{\partial x_2}{\partial a_2} - \frac{\partial x_1}{\partial a_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_1} = \frac{1}{c} \sqrt{G},$$

получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{c}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{G}} q e^{-i\chi}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} = -\frac{c}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial \bar{\xi}}$$

и по (7.4.14) приходим к формулам

$$\left. \begin{aligned} \tau_{12} &= \tau_{21}, \quad c(\sigma_1 + \sigma_2) + 4\mu = \frac{c}{\sqrt{G}} q \psi(q), \\ c(\sigma_2 - \sigma_1) - 2ic\tau_{12} &= -\frac{4c}{\sqrt{G}} \frac{\psi(q)}{q} \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \bar{\xi}} \end{aligned} \right\} \quad (7.4.15)$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении тела определяются из соотношения

$$\sigma_3 dO = \partial^{33} do, \quad \sigma_3 = \frac{c}{\sqrt{G}} \partial^{33} = \frac{c}{\sqrt{G}} [\lambda(q-2) + (\lambda+2\mu)(c-1)], \quad (7.4.16)$$

и продольная сила — их главный вектор — равна

$$Q = \int_{\Omega} \int \sigma_3 dO = \lambda \int_{\Omega_0} \int (q-2) do + (\lambda+2\mu) \Omega_0 (c-1). \quad (7.4.17)$$

Здесь Ω_0 — площадь поперечного сечения в начальном состоянии тела.

7.5. Напряженное состояние при плоском аффинном преобразовании. Преобразование задается линейными соотношениями

$$x_1 = \lambda_{11}a_1 + \lambda_{12}a_2, \quad x_2 = \lambda_{21}a_1 + \lambda_{22}a_2, \quad x_3 = ca_3$$

или, в другой форме,

$$2z = [\lambda_{11} + \lambda_{22} + i(\lambda_{21} - \lambda_{12})] \xi + [\lambda_{11} - \lambda_{22} + i(\lambda_{21} + \lambda_{12})] \bar{\xi}, \quad x_3 = ca_3. \quad (7.5.1)$$

Напряжения, вычисляемые по формулам (7.4.15), и осевая сила равны

$$\left. \begin{aligned} c\sigma_1 + 2\mu &= \frac{\psi(q)}{q} \left(\frac{\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} + 1 \right), \\ c\sigma_2 + 2\mu &= \frac{\psi(q)}{q} \left(\frac{\lambda_{22}^2 + \lambda_{21}^2}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}} + 1 \right), \\ c\tau_{12} &= \frac{\psi(q)}{q} \frac{\lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{22}}{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}}, \end{aligned} \right\} \quad (7.5.2)$$

$$Q = \Omega_0 [\lambda(q-2) + (\lambda+2\mu)(c-1)]. \quad (7.5.3)$$

1°. Одноосное растяжение. В этом состоянии $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{12} = 0$; из последнего условия имеем $\lambda_{12} = -\lambda_{21} \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}}$; тогда из первого и второго следует

$$2\mu = \frac{\psi(q)}{q} \frac{\lambda_{11} + \lambda_{22}}{\lambda_{22}} = \frac{\psi(q)}{q} \frac{\lambda_{11} + \lambda_{22}}{\lambda_{11}}, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22}, \quad \lambda_{12} = -\lambda_{21}.$$

Полагая

$$c-1 = \varepsilon_3, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = 1 - \varepsilon_1, \quad \lambda_{12} = -\lambda_{21} = -\omega_0,$$

имеем

$$\mu = \frac{\psi(q)}{q}, \quad q = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1 - \nu \varepsilon_3}{1 - \nu} = 2(1 - \nu) \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 = \nu \varepsilon_1$$

и по (7.5.3), (7.5.4)

$$\frac{Q}{\Omega_0} = [\lambda(1 - 2\nu) + 2\mu] \varepsilon_3 = E \varepsilon_3 \quad [E = 2\mu(1 + \nu)]. \quad (7.5.4)$$

Это решение уравнений (7.5.2) при отсутствии напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ приводит к уравнениям линейной теории

$$x_1 = a_1(1 - \nu \varepsilon_3) - \omega_0 a_2, \quad x_2 = a_2(1 - \nu \varepsilon_3) + \omega_0 a_1, \quad x_3 = (1 + \varepsilon_3) a_3, \quad (7.5.5)$$

определяющим перемещения с точностью до произвольного малого поворота.

2°. Простой сдвиг. Эта деформация задается уравнениями

$$x_1 = a_1 + s a_2, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3; \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = 1, \quad \lambda_{12} = s, \quad \lambda_{21} = 0, \quad c = 1.$$

Напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_1 = \frac{\psi(q)}{q} (2 + s^2) - 2\mu, \quad \sigma_2 = 2 \frac{\psi(q)}{q} - 2\mu, \\ \tau_{12} = \frac{\psi(q)}{q} s, \quad \frac{Q}{\Omega_0} = \lambda(q - 2),$$

причем

$$q = \sqrt{4 + s^2}, \quad \frac{\psi(q)}{q} = (\lambda + 2\mu) \left(1 - \frac{1}{q(1 - \nu)} \right) \approx \mu \left(1 + \frac{s^2}{8(1 - 2\nu)} \right).$$

Здесь сохранены лишь члены порядка s^2 ; с этой степенью точности

$$\tau_{12} = \mu s, \quad \sigma_1 = \mu \frac{5 - 8\nu}{4(1 - 2\nu)} s^2, \quad \sigma_2 = \frac{\mu s^2}{4(1 - 2\nu)}, \quad \frac{Q}{\Omega_0} = \mu \frac{\nu s^2}{4(1 - 2\nu)}. \quad (7.5.6)$$

7.6. Изгибание полосы в цилиндрическую панель *). Деформирование прямоугольного параллелепипеда

$$-h \leq a_1 \leq h, \quad -b \leq a_2 \leq b, \quad -l \leq a_3 \leq l$$

в цилиндрическую панель

$$r_0 \leq r \leq r_1, \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha, \quad -L \leq x_3 \leq L$$

осуществляется с помощью преобразования (пример п. 6.5 гл. II)

$$z = x_1 + i x_2 = C(a_1) e^{i \frac{a}{b} a_2}, \quad x_3 = c a_3, \quad (7.6.1)$$

*) В п. 2.1 эта задача рассмотрена для случая несжимаемого материала.

причем

$$C(-h) = r_0, \quad C(h) = r_1, \quad cl = L \quad (7.6.2)$$

Здесь

$$2 \frac{dz}{d\xi} = \frac{\partial z}{\partial a_1} - i \frac{\partial z}{\partial a_2} = \left[C'(a_1) + \frac{\alpha}{b} C(a_1) \right] e^{i \frac{\alpha}{b} a_2} = q e^{i\chi} \quad (7.6.3)$$

и можно принять

$$q = C'(a_1) + \frac{\alpha}{b} C(a_1), \quad \chi = \frac{\alpha}{b} a_2.$$

Теперь по (7.4.7), (7.4.9) имеем

$$\psi(q) = (\lambda + 2\mu) \left[C'(a_1) + \frac{\alpha}{b} C(a_1) - \frac{1-\nu(c-1)}{1-\nu} \right], \quad \Phi'(\xi) = \psi(q) e^{i\chi}, \quad (7.6.4)$$

и дифференциальное уравнение, определяющее неизвестную функцию $C(a_1)$, будет

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi'(\xi)}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a_1} + i \frac{\partial}{\partial a_2} \right) \psi(q) e^{i\chi} = 0, \\ C''(a_1) - \frac{\alpha^2}{b^2} C(a_1) &= -\frac{\alpha}{b} \frac{1-\nu(c-1)}{1-\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6.5)$$

Его решение при краевых условиях (7.6.2) представляется в виде

$$C(a_1) = \frac{1}{2} \left[(r_1 + r_0) \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha a_1}{b}}{\operatorname{ch} \gamma} + (r_1 - r_0) \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha a_1}{b}}{\operatorname{sh} \gamma} \right] + \\ + \frac{b}{\alpha} \frac{1-\nu(c-1)}{1-\nu} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha a_1}{b}}{\operatorname{ch} \gamma} \right) \quad \left(\gamma = \frac{\alpha h}{b} \right). \quad (7.6.6)$$

Для определения постоянных r_1, r_0 служат условия отсутствия нагружения поверхностей панелей $a_1 = \pm h$; вдоль этих поверхностей $ds = da_2$, и по (7.4.11) (при $F = 0$), (7.6.1) и (7.6.4) получаем

$$2\mu \frac{dz}{ds} = \Phi'(\xi) \frac{d\xi}{ds}, \quad 2\mu \frac{\alpha}{b} C(\pm h) = (\lambda + 2\mu) \left[C'(\pm h) + \frac{\alpha}{b} C(\pm h) - \frac{1-\nu(c-1)}{1-\nu} \right]$$

или

$$C'(\pm h) + \frac{\alpha}{b} \frac{\nu}{1-\nu} C(\pm h) = \frac{1-\nu(c-1)}{1-\nu} \quad [C(h) = r_1, \quad C(-h) = r_0].$$

Отсюда находим

$$r_1 + r_0 = 2 \frac{b}{\alpha} [1 - \nu(c-1)], \quad r_1 - r_0 = 2 \frac{b}{\alpha} [1 - \nu(c-1)] \operatorname{th} \gamma, \quad (7.6.7)$$

и это позволяет представить $C(a_1)$, $C'(a_1)$ в виде

$$\left. \begin{aligned} C(a_1) &= \frac{b}{\alpha} [1 - \nu(c-1)] \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha a_1}{b}}{\operatorname{ch} \gamma} + \frac{1}{1-\nu} \left(1 - \nu \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha a_1}{b}}{\operatorname{ch} \gamma} \right) \right], \\ C'(a_1) &= [1 - \nu(c-1)] \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha a_1}{b}}{\operatorname{ch} \gamma} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha a_1}{b}}{\operatorname{ch} \gamma} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.6.8)$$

Распределение поверхностных сил на плоскостях $a_2 = \pm b$ определяется по (7.4.11) при $ds = \mp da_1$; приходим к равенству

$$\mp ice^{\mp i\alpha} \frac{dS}{da_1} = (\lambda + 2\mu) \left[C'(a_1) + \frac{\alpha}{b} C(a_1) - \frac{1 - \nu(c-1)}{1-\nu} \right] - 2\mu C'(a_1), \quad (7.6.9)$$

из которого находится распределение нормальных напряжений на этих границах

$$\begin{aligned} c\sigma_N \frac{dS}{da_1} &= c(-F_1 \sin \alpha \pm F_2 \cos \alpha) = \\ &= (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\nu}{1-\nu} C'(a_1) + \frac{\alpha}{b} C(a_1) - \frac{1 - \nu(c-1)}{1-\nu} \right] = \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} [1 - \nu(c-1)] \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha a_1}{b}}{\operatorname{ch} \gamma} \quad \left(\lambda + 2\mu = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) \end{aligned} \quad (7.6.10)$$

и выявляется отсутствие на них касательных напряжений (правая часть (7.6.9) вещественна).

Главный вектор нормальных напряжений, конечно, равен нулю, а их главный момент — изгибающий момент в любом сечении $\theta = \text{const}$, отнесенный к единице длины по оси OX_3 , — определяется равенством

$$m^0 = \int_{r_0}^{r_1} C(a_1) \sigma_N dS = \frac{Eh^2}{c(1-\nu^2)} [1 - \nu(c-1)]^2 \frac{1}{\gamma^2} \left(\operatorname{th} \gamma - \frac{\gamma}{\operatorname{ch}^2 \gamma} \right). \quad (7.6.11)$$

Осевая сила (в направлении OX_3), отнесенная к единице длины по оси OX_2 , определяется по (7.4.17):

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2b} &= \lambda \int_{-h}^h (q-2) da_1 + (\lambda + 2\mu) 2h(c-1) = \\ &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[(c-1) \left(1 - \nu^2 \frac{\operatorname{th} \gamma}{\gamma} \right) - \nu \left(1 - \frac{\operatorname{th} \gamma}{\gamma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.6.12)$$

Для полосы со свободными торцами

$$Q = 0, \quad c-1 = \nu \frac{\gamma - \operatorname{th} \gamma}{\gamma - \nu^2 \operatorname{th} \gamma}. \quad (7.6.13)$$

Формулы (7.6.11), (7.6.13) служат для определения неизвестных s и γ (или α) по заданному изгибающему моменту.

7.7. Наложение малой деформации. Как и в п. 4.1, предполагается, что точкам упругого тела сообщено малое перемещение $\eta w(q^1, q^2, q^3)$ из предполагаемого известным состоянием равновесия. Иными словами, рассматриваются три состояния тела: начальное (v -объем), заданное напряженное ($\overset{0}{V}$ -объем) и второе напряженное состояние (V -объем), близкое к заданному. Вектор-радиус точки в этих состояниях обозначается соответственно $r, \overset{0}{R}, R$, причем

$$R = \overset{0}{R} + \eta w.$$

Для величин в V -объеме сохраняются ранее принятые обозначения (например, R, \hat{D}, \hat{A} и т. д.), а их значения в $\overset{0}{V}$ -объеме различаются ноликом сверху ($\overset{0}{R}, \overset{0}{\hat{D}}, \overset{0}{\hat{A}}$ и т. д.). Разности («возмущения»), вычисляемые с удержанием первой степени параметра малости η , представляются в форме произведения этого параметра на величину, обозначаемую сверху точкой:

$$R = \overset{0}{R} + \eta \dot{R}, \quad \hat{D} = \overset{0}{\hat{D}} + \eta \dot{\hat{D}}, \quad \hat{A} = \overset{0}{\hat{A}} + \eta \dot{\hat{A}} \quad \text{и т. д.}$$

Очевидно, что $\dot{R} = w$, а все величины, обозначенные точкой сверху, представляют линейные операции над вектором w . Их можно трактовать как производные по η при $\eta = 0$ от величин, определенных в V -объеме:

$$\dot{\hat{D}} = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \hat{D} \right)_{\eta=0}, \quad \dot{\hat{A}} = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \hat{A} \right)_{\eta=0} \quad \text{и т. д.}$$

В соответствии с определением (3.3.2) гл. II меры деформации \hat{G}^\times тензор \hat{G}^\times представим в виде

$$\hat{G}^\times = \nabla \dot{R} \cdot \nabla \overset{0}{R^*} + \nabla \overset{0}{R} \cdot \nabla \dot{R^*} = \nabla w \cdot \nabla \overset{0}{R^*} + \nabla \overset{0}{R} \cdot \nabla w^*, \quad (7.7.1)$$

причем звездочкой обозначается, как всегда, операция транспонирования тензора второго ранга.

Далее предполагаются известными главные значения $\overset{0}{G}_s$, $\overset{0}{M}_s = \overset{0}{G}_s$ и главные направления $\overset{0}{e}_s, \overset{0}{\hat{e}}_s$ мер деформации $\overset{0}{\hat{G}}, \overset{0}{\hat{M}}$ [см. (5.3.1) гл. II *)]. Для построения тензора

$$\hat{A} = \overset{0}{\dot{e}}_s \overset{0}{\hat{e}}_s + \overset{0}{e}_s \overset{0}{\dot{\hat{e}}}_s \quad (7.7.2)$$

*) Индекс помещен снизу, чтобы избежать обозначений $\overset{0}{e}, \overset{0}{\hat{e}}$.

надо определить векторы $\dot{\mathbf{e}}_s$, $\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_s$; попутно найдутся также выражения величин $\hat{\mathbf{G}}_s$. Нетрудно заметить, что эти векторы ортогональны $\overset{0}{\mathbf{e}}_s$, $\overset{0}{\tilde{\mathbf{e}}}_s$; действительно,

$$\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_s = 1, \quad \dot{\mathbf{e}}_s \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_s + \overset{0}{\mathbf{e}}_s \cdot \dot{\mathbf{e}}_s = 0, \quad \dot{\mathbf{e}}_s \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3). \quad (7.7.3)$$

Сославшись на определения (I.9.1), (I.9.4) главных значений и главных направлений тензора, имеем

$$\hat{\mathbf{G}} \times \cdot \mathbf{e}_s - G_s \mathbf{e}_s = 0, \quad \overset{0}{\hat{\mathbf{G}}} \times \cdot \dot{\mathbf{e}}_s - \overset{0}{G}_s \dot{\mathbf{e}}_s = \dot{G}_s \overset{0}{\mathbf{e}}_s - \dot{\hat{\mathbf{G}}} \times \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_s, \quad (7.7.4)$$

причем, конечно, в V -объеме

$$\overset{0}{\hat{\mathbf{G}}} \times \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_k - \overset{0}{G}_k \overset{0}{\mathbf{e}}_k = 0 \quad \text{или} \quad \overset{0}{\mathbf{e}}_k \cdot \overset{0}{\hat{\mathbf{G}}} \times = \overset{0}{G}_k \overset{0}{\mathbf{e}}_k. \quad (7.7.5)$$

Поэтому, умножив скалярно обе части (7.7.4) на $\overset{0}{\mathbf{e}}_k$, имеем

$$\overset{0}{\mathbf{e}}_k \cdot \overset{0}{\hat{\mathbf{G}}} \times \cdot \dot{\mathbf{e}}_s - \overset{0}{G}_s \overset{0}{\mathbf{e}}_k \cdot \dot{\mathbf{e}}_s = \dot{G}_s \overset{0}{\mathbf{e}}_s \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_k - \overset{0}{\mathbf{e}}_k \cdot \dot{\hat{\mathbf{G}}} \times \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_s.$$

или, по (7.7.5),

$$(\overset{0}{G}_k - \overset{0}{G}_s) \overset{0}{\mathbf{e}}_k \cdot \dot{\mathbf{e}}_s = \dot{G}_s \delta_{sk} - \overset{0}{\mathbf{e}}_k \cdot \dot{\hat{\mathbf{G}}} \times \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_s.$$

Отсюда при $k = s$ получаем

$$\dot{G}_s = \overset{0}{\mathbf{e}}_s \cdot \dot{\hat{\mathbf{G}}} \times \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_s, \quad (7.7.6)$$

а при $k \neq s$

$$\dot{\mathbf{e}}_s \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_k = \frac{\overset{0}{\mathbf{e}}_k \cdot \dot{\hat{\mathbf{G}}} \times \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_s}{\overset{0}{G}_s - \overset{0}{G}_k}.$$

Этим совместно с (7.7.3) определены проекции вектора $\dot{\mathbf{e}}_s$ на оси триэдра $\overset{0}{\mathbf{e}}_k$; поэтому

$$\dot{\mathbf{e}}_s = \sum_k' \frac{\overset{0}{\mathbf{e}}_k \cdot \dot{\hat{\mathbf{G}}} \times \cdot \overset{0}{\mathbf{e}}_s}{\overset{0}{G}_s - \overset{0}{G}_k} \overset{0}{\mathbf{e}}_k \quad (s = 1, 2, 3) \quad (7.7.7)$$

(штрихом указывается пропуск слагаемого $k = s$). Точно так же для тензора $\dot{\hat{\mathbf{M}}}$ имеем

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_s \cdot \dot{\hat{\mathbf{M}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_s = \dot{G}_s, \quad \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_k = \sum_s' \frac{\overset{0}{\tilde{\mathbf{e}}}_s \cdot \dot{\hat{\mathbf{M}}} \cdot \overset{0}{\tilde{\mathbf{e}}}_k}{\overset{0}{G}_k - \overset{0}{G}_s} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_s, \quad (7.7.8)$$

причем, аналогично (7.7.1),

$$\dot{\hat{\mathbf{M}}} = \nabla \mathbf{R}^* \cdot \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^* \cdot \nabla \mathbf{R}.$$

Выражение (7.7.2) тензора \hat{A} теперь записывается в виде (отбрасываем знаки суммирования)

$$\hat{A} = \frac{\overset{0}{e_k} \overset{0}{\tilde{e}_s}}{\overset{0}{G_s} - \overset{0}{G_k}} [\overset{0}{e_k} \cdot (\nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{R}^* + \nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{w}^*) \cdot \overset{0}{e_s} - \overset{0}{e_s} \cdot (\nabla \mathbf{R}^* \cdot \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^* \cdot \nabla \mathbf{R}) \cdot \overset{0}{e_k}]. \quad (7.7.9)$$

Далее используются соотношения

$$\nabla \mathbf{R} = \overset{0}{\hat{G}}^{\times 1/2} \cdot \overset{0}{\hat{A}} = \sqrt{\overset{0}{G_m}} \overset{0}{e_m} \overset{0}{\tilde{e}_m}, \quad \nabla \mathbf{R}^* = \sqrt{\overset{0}{G_m}} \overset{0}{\tilde{e}_m} \overset{0}{e_m},$$

из которых следует

$$\overset{0}{e_k} \cdot \nabla \mathbf{R} = \sqrt{\overset{0}{G_k}} \overset{0}{\tilde{e}_k} = \nabla \mathbf{R}^* \cdot \overset{0}{e_k}, \quad \nabla \mathbf{R} \cdot \overset{0}{e_k} = \sqrt{\overset{0}{G_k}} \overset{0}{e_k} = \overset{0}{\tilde{e}_k} \cdot \nabla \mathbf{R}^*.$$

Это позволяет представить (7.7.9) в виде

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\overset{0}{e_k} \overset{0}{\tilde{e}_s}}{\overset{0}{G_s} - \overset{0}{G_k}} [(\overset{0}{e_k} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \overset{0}{\tilde{e}_s} - \overset{0}{e_s} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \overset{0}{\tilde{e}_k}) \sqrt{\overset{0}{G_s}} + \\ &\quad + (\overset{0}{\tilde{e}_k} \cdot \nabla \mathbf{w}^* \cdot \overset{0}{e_s} - \overset{0}{\tilde{e}_s} \cdot \nabla \mathbf{w}^* \cdot \overset{0}{e_k}) \sqrt{\overset{0}{G_k}}] = \\ &= \frac{\overset{0}{e_k} \overset{0}{\tilde{e}_s}}{\sqrt{\overset{0}{G_s}} + \sqrt{\overset{0}{G_k}}} (\overset{0}{e_k} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \overset{0}{\tilde{e}_s} - \overset{0}{e_s} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \overset{0}{\tilde{e}_k}), \end{aligned}$$

причем использованы соотношения вида

$$\overset{0}{\tilde{e}_k} \cdot \nabla \mathbf{w}^* \cdot \overset{0}{e_s} = \overset{0}{e_s} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \overset{0}{\tilde{e}_k}.$$

Приходим к выражению

$$\hat{A} = \frac{\overset{0}{e_k} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \overset{0}{\tilde{e}_s}}{\sqrt{\overset{0}{G_s}} + \sqrt{\overset{0}{G_k}}} (\overset{0}{e_k} \overset{0}{\tilde{e}_s} - \overset{0}{e_s} \overset{0}{\tilde{e}_k}). \quad (7.7.10)$$

Для представления тензора

$$\hat{D} = (\lambda s_1 - 2\mu) \hat{A} + \lambda \dot{s}_1 \hat{A} + 2\mu \nabla \dot{\mathbf{R}} \quad (7.7.11)$$

требуется еще вычисление величины

$$\dot{s}_1 = \dot{I}_1 (\hat{G}^{\times 1/2}) = \left[\frac{\partial}{\partial \eta} I_1 (\hat{G}^{\times 1/2}) \right]_{\eta=0} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_k \sqrt{\overset{0}{G_k}} \right)_{\eta=0} = \frac{1}{2} \frac{\dot{G}_k}{\sqrt{\overset{0}{G_k}}}.$$

Сославшись на (7.7.6), (7.7.1), имеем

$$\dot{s}_1 = \frac{1}{2} \sum_k \frac{{}^0 e_k \cdot \hat{G}^\times \cdot {}^0 e_k}{\sqrt{{}_0^0 G_k}} = \frac{1}{2} \sum_k ({}^0 e_k \cdot \nabla w \cdot \tilde{{}^0 e}_k + \tilde{{}^0 e}_k \cdot \nabla w^* \cdot {}^0 e_k)$$

или (отбросив знак суммы)

$$\dot{s}_1 = {}^0 e_k \cdot \nabla w \cdot \tilde{{}^0 e}_k. \quad (7.7.12)$$

Приходим к такому представлению формулы (7.7.11):

$$\dot{\hat{D}} = \frac{\lambda s_1 - 2\mu}{{}_0^0 G_s + \sqrt{{}_0^0 G_k}} {}^0 e_k \cdot \nabla w \cdot \tilde{{}^0 e}_s ({}^0 e_k \tilde{{}^0 e}_s - {}^0 e_s \tilde{{}^0 e}_k) + \lambda \hat{A} {}^0 e_k \cdot \nabla w \cdot \tilde{{}^0 e}_k + 2\mu \nabla w. \quad (7.7.13)$$

При преобразовании V^0 -объема в V -объем массовая сила предполагается остающейся неизменной. Тогда уравнение равновесия в V -объеме представится в виде

$$\nabla \cdot \dot{\hat{D}} + \dot{\rho} K = 0, \quad (7.7.14)$$

причем по закону сохранения массы

$$\begin{aligned} \rho \sqrt{G} &= \rho^0 \sqrt{{}_0^0 G}, \quad \dot{\rho} \sqrt{{}_0^0 G} + \rho^0 \dot{\sqrt{{}_0^0 G}} = 0, \\ \dot{\rho} &= -\rho^0 (G)^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{G} \right)_{\eta=0} = -\frac{1}{2} \rho^0 \frac{\dot{G}}{{}_0^0 G} = -\frac{1}{2} \rho^0 \sum_k \frac{\dot{G}_k}{{}_0^0 G_k} \end{aligned}$$

или по (7.7.1)

$$\dot{\rho} = -\rho^0 \sum_k \frac{{}^0 e_k \cdot \nabla w \cdot \tilde{{}^0 e}_k}{\sqrt{{}_0^0 G_k}}. \quad (7.7.15)$$

Уравнение равновесия на поверхности

$$F dO = n \cdot \hat{D} do$$

приводится к виду

$$n \cdot \dot{\hat{D}} = \dot{F} \frac{dO}{do} + F \frac{d\dot{O}}{do} = \left(\dot{F} + F \frac{{}_0^0 d\dot{O}}{dO} \right) \frac{d\dot{O}}{do}.$$

Здесь

$$dO = \sqrt{\frac{G}{g}} (n \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot n)^{1/2} do, \quad d\dot{O} = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{G}}{{}_0^0 G} + \frac{n \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot n}{{}_0^0 n \cdot \hat{G}^\times \cdot n} \right) d\dot{O},$$

и уравнение равновесия на поверхности O объема V приводится к виду

$$n \cdot \dot{\hat{D}} = \sqrt{\frac{{}_0^0 G}{g}} \left[\left(\dot{F} + \frac{1}{2} F \frac{{}_0^0 \dot{G}}{{}_0^0 G} \right) (n \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot n)^{1/2} + \frac{1}{2} F \frac{n \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot n}{{}_0^0 (n \cdot \hat{G}^{\times^{-1}} \cdot n)^{1/2}} \right]. \quad (7.7.16)$$

Представление величины $(\hat{G}^{\times-1})^{\cdot}$ через вектор w основывается на соотношениях

$$R_s R^s = \hat{G} = \overset{0}{R}_s \overset{0}{R}^s, \quad \dot{R}_s R^s + R_s \dot{R}^s = 0.$$

Из них следует

$$\dot{R}^t = -\overset{0}{R}^t \cdot \dot{\overset{0}{R}}_s \overset{0}{R}^s, \quad \dot{G}^{qt} = \overset{0}{R}^q \cdot \dot{R}^t + \overset{0}{R}^t \cdot \dot{R}^q = -(\overset{0}{G}^{sq} \overset{0}{R}^t + \overset{0}{G}^{st} \overset{0}{R}^q) \cdot \dot{R}_s, \quad (7.7.17)$$

так что

$$(\hat{G}^{\times-1})^{\cdot} = -(\overset{0}{G}^{sq} \overset{0}{R}^t + \overset{0}{G}^{st} \overset{0}{R}^q) \cdot \frac{\partial w}{\partial q^s} r_q r_t.$$

В частном случае давления неизменной величины p , остающегося нормальным поверхности O , ограничивающей V -объем, по (3.5.7) гл. II имеем

$$n \cdot \dot{D} do = -p (N dO)^{\cdot} = -p \left(\sqrt{\frac{\overset{0}{G}}{g}} \dot{R}^s + \sqrt{\frac{\dot{\overset{0}{G}}}{g}} \overset{0}{R}^s \right) n_s do$$

и, поскольку

$$\frac{\sqrt{\dot{\overset{0}{G}}}}{\sqrt{\overset{0}{G}}} = \sum_k \frac{\overset{0}{e}_k \cdot \nabla w \cdot \overset{0}{e}_k}{\sqrt{\overset{0}{G}_k}},$$

получаем

$$n \cdot \dot{D} = -p \sqrt{\frac{\overset{0}{G}}{g}} \left(\dot{R}^s + \sum_k \frac{\overset{0}{e}_k \cdot \nabla w \cdot \overset{0}{e}_k}{\sqrt{\overset{0}{G}_k}} \overset{0}{R}^s \right) n_s. \quad (7.7.18)$$

7.8. Случай сохранения главных направлений. Как в п. 7.2, в дальнейшем рассмотрении принимается, что главные направления $\overset{0}{e}_s, \overset{0}{e}_s$ тензоров $\overset{0}{G}^{\times}$ и $\overset{0}{M}$ совпадают; это будет иметь место, если матрицы тензоров $\overset{0}{g}$ и $\overset{0}{G}$ диагональные; тогда единичные векторы $\overset{0}{t}_s$ касательных к координатным линиям $q^s = \text{const}$, образующие ортогональный триэдр, сонаправлены с $\overset{0}{e}_s, \overset{0}{e}_s$.

Сославшись на (7.2.1) и заменив тензор ∇w его представлением (1.2.13) гл. II, можно преобразовать теперь выражение (7.7.10) тензора \dot{A} , учитывая симметричность тензора деформации \hat{e} , к виду

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{\sqrt{\overset{0}{G}_s} + \sqrt{\overset{0}{G}_k}} (\overset{0}{e}_k \cdot \hat{e} \cdot \overset{0}{e}_s - \overset{0}{e}_k \cdot \hat{\Omega} \cdot \overset{0}{e}_s) (\overset{0}{e}_k \overset{0}{e}_s - \overset{0}{e}_s \overset{0}{e}_k) = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\overset{0}{G}_s} + \sqrt{\overset{0}{G}_k}} \overset{0}{e}_k \cdot \hat{\Omega} \cdot \overset{0}{e}_s \overset{0}{e}_k \overset{0}{e}_s = -\frac{2\overset{0}{e}_k \overset{0}{e}_s}{\sqrt{\overset{0}{G}_s} + \sqrt{\overset{0}{G}_k}} \omega \cdot (\overset{0}{e}_s \times \overset{0}{e}_k). \end{aligned} \quad (7.8.1)$$

Здесь ω — линейный вектор поворота, определяемый по вектору w .

Далее по (7.7.12) имеем

$$\dot{s}_1 = e_k^0 \cdot \hat{e} \cdot e_k^0 - e_k^0 \cdot \hat{\Omega} \cdot e_k^0 = I_1(\hat{e}) = \nabla \cdot w. \quad (7.8.2)$$

и подстановка в (7.7.13) приводит к равенству

$$\dot{D} = -2 \frac{\lambda s_1 - 2\mu}{\sqrt{G_s^0} + \sqrt{G_k^0}} \omega \cdot (e_s^0 \times e_k^0) e_k^0 e_s^0 - 2\mu \hat{\Omega} + \lambda \hat{g} \nabla \cdot w + 2\mu \hat{e}$$

или, если сослаться также на (1.4.6),

$$\dot{D} = \hat{T}(w) + 2 \left(\frac{\lambda s_1 - 2\mu}{\sqrt{G_s^0} + \sqrt{G_k^0}} + \mu \right) \omega \cdot (e_k^0 \times e_s^0) e_k^0 e_s^0, \quad (7.8.3)$$

причем $\hat{T}(w)$ — тензор напряжений, определяемый обобщенным законом Гука по вектору w :

$$\hat{T}(w) = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \hat{g} \nabla \cdot w + \frac{1}{2} (\nabla w + \nabla w^*) \right]. \quad (7.8.4)$$

7.9. Уравнения нейтрального равновесия Саусвелла (1913).

Рассматривается деформация v -объема в V -объем, задаваемая преобразованием

$$x_s = (1 + \varepsilon_s) a_s, \quad \hat{R} = \sum_s i_s a_s (1 + \varepsilon_s). \quad (7.9.1)$$

Тогда

$$\hat{R}_s = (1 + \varepsilon_s) i_s, \quad \nabla \hat{R} = \sum_s (1 + \varepsilon_s) i_s i_s = \nabla \hat{R}^* = \hat{G}^{\times 1/2}, \quad \hat{A} = \hat{E},$$

$$s_1 = I_1(\hat{G}^{\times 1/2}) - 3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \vartheta$$

и тензор \hat{D} , определяемый по (7.1.1), представляется в форме, не отличающейся от обобщенного закона Гука линейной теории упругости:

$$\hat{D} = \lambda \vartheta \hat{E} + 2\mu (\nabla \hat{R} - \hat{E}) = \lambda \vartheta \hat{E} + 2\mu \hat{e}, \quad \hat{e} = \sum_s \varepsilon_s i_s i_s. \quad (7.9.2)$$

Поэтому

$$e_s = \frac{1}{2\mu} \left(\partial^{ss} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sum_k \partial^{kk} \right), \quad \vartheta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sum_k \partial^{kk},$$

так что

$$2 \left(\frac{\lambda s_1 - 2\mu}{\sqrt{G_s^0} + \sqrt{G_k^0}} + \mu \right) = \frac{\partial^{ss} + \partial^{kk}}{2 + \varepsilon_s + \varepsilon_k},$$

и тензор $\dot{\hat{D}}$ представляется в виде

$$\dot{\hat{D}} = \hat{T}(w) + 2\mu [A_1 \omega_1 (i_2 i_3 - i_3 i_2) + A_2 \omega_2 (i_3 i_1 - i_1 i_3) + A_3 \omega_3 (i_1 i_2 - i_2 i_1)], \quad (7.9.3)$$

причем для краткости приняты обозначения

$$A_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\overset{0}{\partial}{}^{22} + \overset{0}{\partial}{}^{33}}{2 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}, \quad A_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\overset{0}{\partial}{}^{33} + \overset{0}{\partial}{}^{11}}{2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1}, \quad A_3 = \frac{1}{2\mu} \frac{\overset{0}{\partial}{}^{11} + \overset{0}{\partial}{}^{22}}{2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (7.9.4)$$

Величины $\overset{0}{\partial}{}^{ss}$ связаны с главными напряжениями σ_s в V -объеме соотношениями

$$\overset{0}{\partial}{}^{11} = \sigma_1 (1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3), \quad \overset{0}{\partial}{}^{22} = \sigma_2 (1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_1), \quad \overset{0}{\partial}{}^{33} = \sigma_3 (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2).$$

Уравнения равновесия в V -объеме (7.7.14) при отсутствии массовых сил теперь записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + \nabla^2 u + 2A_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial a_3} - 2A_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial a_2} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + \nabla^2 v + 2A_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial a_1} - 2A_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a_3} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} + \nabla^2 w + 2A_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a_2} - 2A_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial a_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.9.5)$$

Здесь приняты обозначения:

$$w = i_1 u + i_2 v + i_3 w, \quad \Phi = \nabla \cdot w = \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{\partial w}{\partial a_3},$$

$$2\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial a_2} - \frac{\partial v}{\partial a_3} \quad \text{и т. д.}$$

Учитывая известное соотношение

$$\nabla^2 w = \nabla \nabla \cdot w - \nabla \times (\nabla \times w) = \nabla \Phi - 2\nabla \times \omega,$$

можно представить эти уравнения также в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + 2B_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial a_3} - 2B_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial a_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + 2B_3 \frac{\partial \omega_3}{\partial a_1} - 2B_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a_3} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} + 2B_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial a_2} - 2B_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial a_1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.9.6)$$

где обозначено

$$B_s = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} (1 + A_s). \quad (7.9.7)$$

Уравнения «нейтрального равновесия» в форме (7.9.5) были получены из других соображений Саусвеллом.

7.10. Представление решений уравнений Саусвелла. Уравнения (7.9.6) переписываются в виде $\left(\partial_s = \frac{\partial}{\partial a_s}\right)$

$$\left. \begin{aligned} (\partial_1^2 + B_2 \partial_3^2 + B_3 \partial_2^2) u + (1 - B_3) \partial_1 \partial_2 v + (1 - B_2) \partial_1 \partial_3 w &= 0, \\ (1 - B_3) \partial_1 \partial_2 u + (\partial_2^2 + B_3 \partial_1^2 + B_1 \partial_3^2) v + (1 - B_1) \partial_2 \partial_3 w &= 0, \\ (1 - B_2) \partial_1 \partial_3 u + (1 - B_1) \partial_2 \partial_3 v + (\partial_3^2 + B_1 \partial_2^2 + B_2 \partial_1^2) w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.10.1)$$

или, короче,

$$e_{j1}u + e_{j2}v + e_{j3}w = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (7.10.2)$$

где $e_{js} = e_{sj}$ — записанные выше дифференциальные операторы.

Представляя одно из частных решений этой системы в виде

$$u_1 = \Delta_{11}\chi_1, \quad v_1 = \Delta_{12}\chi_1, \quad w_1 = \Delta_{13}\chi_1, \quad (7.10.3)$$

определим операторы дифференцирования Δ_{1s} как решения однородной системы двух уравнений (7.10.2) для $j = 2, 3$. Подстановка в эти уравнения дает

$$\begin{aligned} e_{21}\Delta_{11} + e_{22}\Delta_{12} + e_{23}\Delta_{13} &= 0, \\ e_{31}\Delta_{11} + e_{32}\Delta_{12} + e_{33}\Delta_{13} &= 0, \end{aligned}$$

и с точностью до общего множителя

$$\Delta_{11} = e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}, \quad \Delta_{12} = e_{23}e_{31} - e_{21}e_{33}, \quad \Delta_{13} = e_{21}e_{32} - e_{22}e_{31}.$$

Как следовало ожидать, Δ_{sk} представляет алгебраическое дополнение элемента e_{sk} определителя

$$\Delta = |e_{sk}| = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}. \quad (7.10.4)$$

Теперь, подставив выражения (7.10.3) искомых функций в первое уравнение системы (7.10.2), придем к дифференциальному уравнению для χ_1 :

$$(e_{11}\Delta_{11} + e_{12}\Delta_{12} + e_{13}\Delta_{13})\chi_1 = \Delta\chi_1 = 0. \quad (7.10.5)$$

Аналогично записываются решения систем уравнений (7.10.2) для $j = 3, 1$ и для $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} u_2 &= \Delta_{21}\chi_2, & v_2 &= \Delta_{22}\chi_2, & w_2 &= \Delta_{23}\chi_2, \\ u_3 &= \Delta_{31}\chi_3, & v_3 &= \Delta_{32}\chi_3, & w_3 &= \Delta_{33}\chi_3, \end{aligned}$$

и подстановка в остающееся уравнение ($j = 2$ и соответственно $j = 3$) приводит к дифференциальным уравнениям этого же вида (7.10.5). Итак,

$$\Delta\chi_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3). \quad (7.10.6)$$

Остается записать общее решение

$$\left. \begin{aligned} u &= \Delta_{11}\chi_1 + \Delta_{21}\chi_2 + \Delta_{31}\chi_3 = | \chi_s, e_{s2}, e_{s3} |, \\ v &= \Delta_{12}\chi_1 + \Delta_{22}\chi_2 + \Delta_{32}\chi_3 = | e_{s1}, \chi_s, e_{s3} |, \\ w &= \Delta_{13}\chi_1 + \Delta_{23}\chi_2 + \Delta_{33}\chi_3 = | e_{s1}, e_{s2}, \chi_s |, \end{aligned} \right\} \quad (7.10.7)$$

причем выражение справа представляет определитель (7.10.4), в котором соответствующий столбец заменен столбцом χ_1, χ_2, χ_3 ; например,

$$u = \begin{vmatrix} \chi_1 & e_{12} & e_{13} \\ \chi_2 & e_{22} & e_{23} \\ \chi_3 & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}.$$

В применении к системе (7.10.1) это вычисление приводит к следующему представлению решений:

$$\left. \begin{aligned} u &= \partial_1 (D_1^2 + D_2^2 - B_1 \nabla^2) (\partial_1 \chi_1 + \partial_2 \chi_2 + \partial_3 \chi_3) - \\ &\quad - \nabla^2 [\partial_2 (\partial_1 B_2 \chi_2 - \partial_2 B_1 \chi_1) - \partial_3 (\partial_2 B_1 \chi_1 - \partial_1 B_3 \chi_3)], \\ v &= \partial_2 (D_1^2 + D_2^2 - B_2 \nabla^2) (\partial_1 \chi_1 + \partial_2 \chi_2 + \partial_3 \chi_3) - \\ &\quad - \nabla^2 [\partial_3 (\partial_2 B_3 \chi_3 - \partial_3 B_2 \chi_2) - \partial_1 (\partial_1 B_2 \chi_2 - \partial_2 B_1 \chi_1)], \\ w &= \partial_3 (D_1^2 + D_2^2 - B_3 \nabla^2) (\partial_1 \chi_1 + \partial_2 \chi_2 + \partial_3 \chi_3) - \\ &\quad - \nabla^2 [\partial_1 (\partial_3 B_1 \chi_1 - \partial_1 B_3 \chi_3) - \partial_2 (\partial_2 B_3 \chi_3 - \partial_3 B_2 \chi_2)], \end{aligned} \right\} \quad (7.10.8)$$

причем введены обозначения дифференциальных операторов

$$D_1^2 = B_1 \partial_1^2 + B_2 \partial_2^2 + B_3 \partial_3^2, \quad D_2^2 = B_2 B_3 \partial_1^2 + B_3 B_1 \partial_2^2 + B_1 B_2 \partial_3^2, \quad (7.10.9)$$

а дифференциальные уравнения (7.10.6) для функций χ_s записываются в виде

$$\Delta \chi_s = \nabla^4 D_2^2 \chi_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3). \quad (7.10.10)$$

Найденное представление решения можно существенно упростить, приняв

$$\chi_s = \chi'_s + \chi''_s \quad (s = 1, 2, 3)$$

и определив χ'_s, χ''_s соотношениями

$$B_s \chi'_s = \partial_s \Phi \quad (s = 1, 2, 3); \quad \partial_1 \chi'_1 + \partial_2 \chi'_2 + \partial_3 \chi'_3 = \frac{D_2^2 \Phi}{B_1 B_2 B_3} = \Phi, \quad (7.10.11)$$

$$\nabla^2 \chi''_s = \Psi_s \quad (s = 1, 2, 3); \quad \partial_1 \chi''_1 + \partial_2 \chi''_2 + \partial_3 \chi''_3 = 0. \quad (7.10.12)$$

Тогда по (7.10.10)

$$\nabla^4 \Phi = 0, \quad D_2^2 \nabla^2 \Psi_s = 0. \quad (7.10.13)$$

Решение (7.10.8) теперь представлено суммой вектора $(B_1\chi'_1, B_2\chi'_2, B_3\chi'_3)$ с равным нулю ротором и соленоидального вектора $(\chi''_1, \chi''_2, \chi''_3)$. Первый выражен через бигармонический скаляр Φ , второй — через соленоидальный вектор (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) . Частные решения, соответствующие этим слагаемым, записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} u' &= (D_1^2 + D_2^2 - B_1\nabla^2) \partial_1 \Phi, \\ u'' &= B_1 \nabla^2 \Psi_1 - \partial_1 (B_1 \partial_1 \Psi_1 + B_2 \partial_2 \Psi_2 + B_3 \partial_3 \Psi_3), \\ v' &= (D_1^2 + D_2^2 - B_2\nabla^2) \partial_2 \Phi, \\ v'' &= B_2 \nabla^2 \Psi_2 - \partial_2 (B_1 \partial_1 \Psi_1 + B_2 \partial_2 \Psi_2 + B_3 \partial_3 \Psi_3), \\ w' &= (D_1^2 + D_2^2 - B_3\nabla^2) \partial_3 \Phi, \\ w'' &= B_3 \nabla^2 \Psi_3 - \partial_3 (B_1 \partial_1 \Psi_1 + B_2 \partial_2 \Psi_2 + B_3 \partial_3 \Psi_3). \end{aligned} \right\} \quad (7.10.14)$$

Им соответствуют выражения объемных расширений и линейных векторов поворота

$$\vartheta' = D_2^2 \nabla^2 \Phi, \quad \vartheta'' = 0, \quad (7.10.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega'_1 &= (B_2 - B_3) \partial_2 \partial_3 \nabla^2 \Phi, & \omega''_1 &= \nabla^2 (B_3 \partial_2 \Psi_3 - B_2 \partial_3 \Psi_2), \\ \omega'_2 &= (B_3 - B_1) \partial_3 \partial_1 \nabla^2 \Phi, & \omega''_2 &= \nabla^2 (B_1 \partial_3 \Psi_1 - B_3 \partial_1 \Psi_3), \\ \omega'_3 &= (B_1 - B_2) \partial_1 \partial_2 \nabla^2 \Phi, & \omega''_3 &= \nabla^2 (B_2 \partial_1 \Psi_2 - B_1 \partial_2 \Psi_1), \end{aligned} \right\} \quad (7.10.16)$$

и, сославшись на (7.10.11) — (7.10.13), несложно проверить, что исходные уравнения (7.9.6) удовлетворены.

Отметим еще, что при $\partial^{ss} = 0$, когда состояние $\overset{0}{V}$ -объема натуральное (он совпадает с v -объемом), по (7.9.4), (7.9.7)

$$A_s = 0, \quad B_s = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} = \alpha \quad (s = 1, 2, 3).$$

Теперь, введя в рассмотрение вектор \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = -\alpha \nabla^2 (\chi_1 \mathbf{i}_1 + \chi_2 \mathbf{i}_2 + \chi_3 \mathbf{i}_3),$$

можно записать решение (7.10.8) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= -\alpha \nabla \nabla \cdot \mathbf{G} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = (1 - \alpha) \nabla \nabla \cdot \mathbf{G} - \nabla^2 \mathbf{G} = \\ &= \frac{1}{2(1 - \nu)} \nabla \nabla \cdot \mathbf{G} - \nabla^2 \mathbf{G}, \end{aligned} \quad (7.10.17)$$

причем согласно (7.10.10) \mathbf{G} — бигармонический вектор. Пришли к решению уравнения теории упругости (1.7.4) гл. IV в форме Буссинеска — Галеркина.

7.11. Бифуркация равновесия сжатого стержня. Предполагается, что стержень расположен между двумя горизонтальными,

твердыми и гладкими плитами, а его боковая поверхность не нагружена. Одноосное напряженное состояние в $\overset{0}{V}$ -объеме создается вертикальным смещением верхней плиты ($a_3 = L$) вниз на величину $L\varepsilon_3$, тогда как нижняя плита остается неподвижной.

В этом состоянии $\overset{0}{\partial^{11}} = \overset{0}{\partial^{22}} = 0$; по (7.4.16), (7.4.17), (7.5.4), (7.9.4) имеем

$$\overset{0}{\partial^{33}} = \frac{Q}{\Omega_0} = E\varepsilon_3, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_3, \quad A_1 = A_2 = A = \frac{(1+\nu)\varepsilon_3}{2+(1-\nu)\varepsilon_3}, \quad A_3 = 0$$

и по (7.9.7)

$$B_3 = \alpha = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad B_1 = B_2 = \alpha\sigma, \quad \sigma = \frac{2(1+\varepsilon_3)}{2+(1-\nu)\varepsilon_3}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{2(1-\sigma)}{2-(1-\nu)\sigma}, \quad (7.11.1)$$

причем $-1 < \varepsilon_3 < 0$, так что $0 < \sigma < 1$.

На остающейся в $\overset{0}{V}$ -объеме ненагруженной боковой поверхности стержня по (7.9.3)

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{w}) + 2\mu A (\omega_1 n_2 - \omega_2 n_1) \mathbf{i}_3 = 0,$$

и три краевых условия на ней записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} n_1 \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta + \partial_1 u \right) + \frac{1}{2} n_2 (\partial_2 u + \partial_1 v) &= 0, \\ \frac{1}{2} n_1 (\partial_2 u + \partial_1 v) + n_2 \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta + \partial_2 v \right) &= 0, \\ (2-\sigma)(n_1 \partial_3 u + n_2 \partial_3 v) + \sigma \frac{\partial w}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.11.2)$$

На торцах стержня

$$\mathbf{i}_3 \cdot \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{i}_3 \cdot \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{w}) - 2\mu A (\omega_1 \mathbf{i}_2 - \omega_2 \mathbf{i}_1),$$

и поскольку речь идет о разыскании форм равновесия стержня, отличных от равновесия в $\overset{0}{V}$ -объеме, но при описанном способе его осуществления, в краевых условиях на торцах следует выразить требования отсутствия на них горизонтальных поверхностных сил и вертикального смещения:

$$\text{при } a_3 = L, a_3 = 0: \quad \mathbf{i}_3 \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{i}_1 = 0, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad w = 0,$$

Они сводятся к условиям

$$w = 0, \quad \partial_3 u = 0, \quad \partial_3 v = 0, \quad (7.11.3)$$

автоматически выполняющимся, если выбрать частные решения (7.10.14) так, чтобы u , v были пропорциональны косинусу, а w — синусу аргумента $n\pi \frac{a_3}{L}$ ($n = 1, 2, \dots$). Далее примем

$$\Phi = \varphi_n(a_1, a_2) \cos \frac{n\pi a_3}{L}, \quad (7.11.4)$$

$$\Psi_1 = \partial_2 \Psi, \quad \Psi_2 = -\partial_1 \Psi, \quad \nabla^2 \Psi = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \psi_n(a_1, a_2) \cos \frac{n\pi a_3}{L}; \quad \Psi_3 = 0, \quad (7.11.5)$$

причем выполняется условие соленоидальности вектора (Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3) ; по (7.10.14), отбросив несущественные постоянные множители, имеем

$$\left. \begin{aligned} u' &= \left[\alpha \sigma \nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (1 - \sigma + \alpha \sigma^2) \right] \partial_1 \varphi_n \cos \frac{n\pi}{L} a_3, \\ v' &= \left[\alpha \sigma \nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (1 - \sigma + \alpha \sigma^2) \right] \partial_2 \varphi_n \cos \frac{n\pi}{L} a_3, \\ w' &= \left[(1 - \sigma - \alpha \sigma) \nabla_1^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L} \alpha \sigma^2 \right] \frac{n\pi}{L} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{L} a_3 \end{aligned} \right\} \quad (7.11.6)$$

и, далее,

$$u'' = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \partial_2 \psi_n \cos \frac{n\pi a_3}{L}, \quad v'' = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \partial_1 \psi_n \cos \frac{n\pi}{L} a_3, \quad w'' = 0. \quad (7.11.7)$$

Функции φ_n , ψ_n определяются из дифференциальных уравнений $(\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2)$

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^2 \varphi_n(a_1, a_2) = 0, \quad \left(\nabla_1^2 - \sigma \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \psi_n(a_1, a_2) = 0 \quad (7.11.8)$$

и на боковой поверхности стержня подчинены краевым условиям (7.11.2), записываемым здесь в виде

$$\left. \begin{aligned} n_1 \frac{\nu}{2(1-\nu)} \sigma (1-\sigma) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \varphi_n + \\ + \frac{\partial}{\partial n} \left[\alpha \sigma \left(\nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (1-\sigma) (1-\alpha \sigma) \right] \partial_1 \varphi_n + \\ + \frac{n^2 \pi^2}{2L^2} \left(\frac{\partial}{\partial n} \partial_2 \psi_n + \frac{\partial}{\partial s} \partial_1 \psi_n \right) = 0, \\ n_2 \frac{\nu}{2(1-\nu)} \sigma (1-\sigma) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \varphi_n + \\ + \frac{\partial}{\partial n} \left[\alpha \sigma \left(\nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (1-\sigma) (1-\alpha \sigma) \right] \partial_2 \varphi_n + \\ + \frac{n^2 \pi^2}{2L^2} \left(\frac{\partial}{\partial s} \partial_2 \psi_n - \frac{\partial}{\partial n} \partial_1 \psi_n \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial n} \left[(2\alpha \sigma - \sigma + \sigma^2) \nabla_1^2 - (2 - 3\sigma + 2\alpha \sigma^2 + \sigma^2) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right] \varphi_n + \\ + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (2-\sigma) \frac{\partial \psi_n}{\partial s} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.11.9)$$

7.12. Стержень круглого поперечного сечения. Ограничимся рассмотрением решений вида

$$\varphi_n = R_n(r) \cos \theta, \quad \psi_n = Q_n(r) \sin \theta.$$

Здесь функции $R_n(r)$, $Q_n(r)$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{L^2} \right) \right] \left[\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d R_n}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{L^2} \right) R_n \right] = 0,$$

$$\frac{d^2 Q_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d Q_n}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(1 + \sigma \frac{n^2 \pi^2 r^2}{L^2} \right) Q_n = 0,$$

решения которых, если ограничиться случаем сплошного цилиндра, выражаются через модифицированные функции Бесселя

$$R_n(r) = C_1 I_1(x) + C_2 x I_0(x), \quad Q_n = C_3 I_1(x \sqrt{\sigma}); \quad x = \frac{n \pi r}{L}. \quad (7.12.1)$$

Переменная θ отделяется также и в краевых условиях, приводимых к виду: при $r = r_0$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\nu}{2(1-\nu)} \sigma (1-\sigma) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) R_n + \frac{d}{dr} \left[\alpha \sigma \left(\nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (1-\sigma) (1-\alpha \sigma) \right] \frac{d R_n}{dr} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d Q_n}{dr} - \frac{Q_n}{r^2} \right) = 0, \\ & \frac{d}{dr} \left[\alpha \sigma \left(\nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (1-\sigma) (1-\alpha \sigma) \right] \frac{R_n}{r} + \\ & \quad + \frac{n^2 \pi^2}{2L^2} \left(\frac{d^2 Q_n}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d Q_n}{dr} + \frac{Q_n}{r^2} \right) = 0, \\ & \frac{d}{dr} \left[(2\alpha \sigma - \sigma + \sigma^2) \nabla_1^2 - (2 - 3\sigma + 2\alpha \sigma^2 + \sigma^2) \right] R_n + \\ & \quad + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (2 - \sigma) \frac{Q_n}{r} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.12.2)$$

Здесь

$$\nabla_1^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{x^2} \right),$$

и при подстановке в (7.12.2) выражений R_n , Q_n полезно иметь в виду соотношение вида

$$\nabla_1^2 I_1(x) = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} I_1(x), \quad \left(\nabla_1^2 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) x I_0(x) = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} 2 I_1(x) \quad \text{и т. д.}$$

По сокращении на общий множитель $\frac{n \pi}{L}$ приходим к системе трех однородных уравнений, линейных относительно постоянных C_1 , C_2 , C_3 . Бифуркационные значения σ , значит и ε_3 , являются корнями определителя этой системы (причем $0 < \sigma < 1$). Они являются функциями параметра $x_0 = n \pi \frac{r_0}{L}$ и зависят также от коэффициента Пуассона.

7.13. Бифуркация равновесия полой сферы, сжатой равномерно распределенным давлением. Радиально-симметричное состояние равновесия было рассмотрено в п. 7.3; близкие к нему осесимметричные формы равновесия можно получить, налагая перемещение, не зависящее от координаты λ (долготы):

$$\eta \mathbf{w}(R, \vartheta) = \eta [w_R(R, \vartheta) \mathbf{e}_R + w_\vartheta(R, \vartheta) \mathbf{e}_\vartheta]. \quad (7.13.1)$$

Оглична от нуля только компонента ω_λ вектора ω :

$$2\omega_\lambda = (\nabla \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_\lambda = \frac{\partial w_\vartheta}{\partial R} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w_R}{\partial \vartheta} - w_\vartheta \right). \quad (7.13.2)$$

Сославшись на формулы (7.2.1), (7.3.7), (7.8.3), получаем

$$\hat{D} = \hat{T}(\mathbf{w}) + 2\psi(R) \omega_\lambda (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_\vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_R). \quad (7.13.3)$$

Здесь

$$\psi(R) = \frac{\frac{0}{\lambda s_1 - 2\mu}}{\frac{f(R)}{R} + f'(R)} + \mu = \frac{(3\lambda + 2\mu)(c_1 - 1) \left(1 - \frac{R_1^3}{4R^3} \right)}{2c_1 - \frac{R_1^3}{4R^3\mu} (3\lambda + 2\mu)(c_1 - 1)}, \quad (7.13.4)$$

причем постоянная c_2 определена из формулы (7.3.9) условием отсутствия нагружения по внутренней поверхности $R = R_1$ полой сферы. Имеем, далее,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{T}(\mathbf{w}) &= (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} - 2\mu \nabla \times \omega = \\ &= \mathbf{e}_R \left[(\lambda + 2\mu) (\nabla \cdot \mathbf{w})' - \frac{2\mu}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\omega_\lambda \sin \vartheta) \right] + \\ &\quad + \mathbf{e}_\vartheta \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{w}}{R \partial \vartheta} + 2\mu \left(\omega'_\lambda + \frac{\omega_\lambda}{R} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.13.5)$$

$$\nabla \cdot 2\psi(R) \omega_\lambda (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_\vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_R) =$$

$$= -\frac{2\psi(R)}{R \sin \vartheta} \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\omega_\lambda \sin \vartheta) + 2\mathbf{e}_\vartheta \left[\frac{\psi(R)}{R} \omega_\lambda + (\psi(R) \omega_\lambda)' \right],$$

причем штрихом указывается дифференцирование по R . Уравнения равновесия (7.7.14) при отсутствии массовых сил представляются в виде

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) (\nabla \cdot \mathbf{w})' - \frac{2g(R)}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \omega_\lambda \sin \vartheta = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{w}}{R \partial \vartheta} + \frac{2}{R} [g(R) R \omega_\lambda]' = 0, \end{cases} \quad (7.13.6)$$

причем

$$g(R) = \psi(R) + \mu. \quad (7.13.7)$$

Предполагая, что давление остается нормальным к деформированной поверхности сферы, обратимся к записи краевого условия (7.7.18). По (7.7.17) имеем

$$\begin{aligned}\dot{R}^s n_s &= \dot{R}^1 = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial w_R}{\partial R} e_R - \frac{1}{f f'} \left(\frac{\partial w_R}{\partial \vartheta} - w_\vartheta \right) e_\vartheta, \\ \overset{0}{R}^s n_s &= \overset{0}{R}^1 = \frac{e_R}{f'}\end{aligned}$$

и, далее,

$$\begin{aligned}\sum_k \frac{\overset{0}{e}_k \cdot \nabla w \cdot \overset{0}{e}_k}{\sqrt{\overset{0}{G}_k}} &= \frac{1}{f'} e_R \cdot \nabla w \cdot e_R + \frac{R}{f} (e_\vartheta \cdot \nabla w \cdot e_\vartheta + e_\lambda \cdot \nabla w \cdot e_\lambda) = \\ &= \frac{1}{f'} \frac{\partial w_R}{\partial R} + \frac{1}{f} \left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta} \cdot e_\vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial w}{\partial \lambda} \cdot e_\lambda \right) = \\ &= \frac{1}{f'} \frac{\partial w_R}{\partial R} + \frac{R}{f} \left(\nabla \cdot w - \frac{\partial w_R}{\partial R} \right),\end{aligned}$$

так как

$$\nabla \cdot w = \frac{\partial w_R}{\partial R} + 2 \frac{w_R}{R} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (w_\vartheta \sin \vartheta). \quad (7.13.8)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\overset{0}{G}}{g}} \left(\dot{R}^s + R^s \sum_k \frac{\overset{0}{e}_k \cdot \nabla w \cdot \overset{0}{e}_k}{\sqrt{\overset{0}{G}_k}} \right) &= \\ &= \frac{f}{R} \left[e_R \left(\nabla \cdot w - \frac{\partial w_R}{\partial R} \right) - \frac{e_\vartheta}{R} \left(\frac{\partial w_R}{\partial \vartheta} - w_\vartheta \right) \right].\end{aligned}$$

Вместе с тем на поверхности сферы ($e_R = n$)

$$\begin{aligned}n \cdot \hat{D} &= e_R \cdot \hat{T}(w) + 2\psi(R) \omega_\lambda e_\vartheta = \\ &= \lambda \left(\nabla \cdot w + 2\mu \frac{\partial w_R}{\partial R} \right) e_R + 2 \left[g(R) \omega_\lambda + \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial w_R}{\partial \vartheta} - w_\vartheta \right) \right] e_\vartheta.\end{aligned}$$

Краевые условия (7.7.18) теперь приводятся к виду: на наружной поверхности сферы

$$R = R_0: \left\{ \begin{aligned} \left[\lambda + \frac{f(R)}{R} p \right] \nabla \cdot w + \left(2\mu - p \frac{f}{R} \right) \frac{\partial w_R}{\partial R} &= 0, \\ 2g(R) \omega_\lambda + \left(2\mu - p \frac{f}{R} \right) \left(\frac{\partial w_R}{\partial \vartheta} - w_\vartheta \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.13.9)$$

а на внутренней

$$R = R_1: \quad \lambda \nabla \cdot w + 2\mu \frac{\partial w_R}{\partial R} = 0, \quad g(R) \omega_\lambda + \mu \left(\frac{\partial w_R}{\partial \vartheta} - w_\vartheta \right) = 0. \quad (7.13.10)$$

Дифференциальные уравнения (7.13.6) совместно с краевыми условиями (7.13.9), (7.13.10) дают формулировку однородной краевой задачи; условия существования ее нетривиальных решений определяют бифуркационные значения параметра p ; наименьшее из них представляет критическое давление. Аналогичные вычисления позволяют сформулировать краевую задачу, относящуюся к разысканию критического наружного давления в случае полого круглого цилиндра.

Решение системы дифференциальных уравнений равновесия (7.13.6) разыскивается в виде

$$\omega_R = a_n(R) P_n(\cos \vartheta), \quad \omega_\vartheta = -b_n(R) P_n^1(\cos \vartheta) = b_n(R) P_n'(\cos \vartheta) \sin \vartheta, \quad (7.13.11)$$

причем штрихами обозначаются производные по аргументам R , $\cos \vartheta$. Оно остается конечным в обоих полюсах сферы $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ только при целых n . По (7.13.8), (7.13.2), используя известные рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра, получим

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \omega &= \left(a_n' + 2 \frac{a_n}{R} \right) P_n + \frac{b_n}{R} (-P_n'' \sin^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta P_n') = \\ &= \varphi_n(R) P_n(\cos \vartheta), \\ 2\omega_\lambda &= \chi_n(R) P_n'(\cos \vartheta) \sin \vartheta, \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} 2\omega_\lambda \sin \vartheta &= \chi_n(R) n(n+1) P_n(\cos \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (7.13.12)$$

причем введены обозначения

$$\varphi_n(R) = a_n' + 2 \frac{a_n}{R} + n(n+1) \frac{b_n}{R}, \quad \chi_n(R) = b_n' + \frac{a_n + b_n}{R}. \quad (7.13.13)$$

В уравнениях (7.13.6) переменные разделяются; приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, записываемой в виде

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) R^2 \varphi_n'(R) - Rg(R) n(n+1) \chi_n(R) &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \varphi_n(R) - [Rg(R) \chi_n(R)]' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.13.14)$$

Ее решение легко находится:

$$\varphi_n(R) = (n+1) A_n R^n - \frac{n B_n}{R^{n+1}}, \quad \chi_n(R) = \frac{\lambda + 2\mu}{g(R)} \left(A_n R^n + \frac{B_n}{R^{n+1}} \right), \quad (7.13.15)$$

причем A_n , B_n — произвольные постоянные. Подставив теперь эти значения $\varphi_n(R)$, $\chi_n(R)$ в систему (7.13.13), придем к также

легко интегрируемой системе линейных неоднородных уравнений, определяющей неизвестные функции $a_n(R)$, $b_n(R)$:

$$a_n = -n\tilde{C}_n R^{n-1} + (n+1) \frac{\tilde{D}_n}{R^{n+2}}, \quad b_n = \tilde{C}_n R^{n-1} + \frac{\tilde{D}_n}{R^{n+2}}. \quad (7.13.16)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}_n &= \frac{1}{2n+1} \int_{R_1}^R [(n+1)\chi_n - \varphi_n] \frac{dR}{R^{n-1}} + C_n, \\ \tilde{D}_n &= \frac{1}{2n+1} \int_{R_1}^R (\varphi_n + n\chi_n) R^{n+2} dR + D_n, \end{aligned} \right\} \quad (7.13.17)$$

причем C_n , D_n — постоянные.

Переменные R , φ разделяются также в линейных краевых условиях (7.13.9), (7.13.10); подставив в них найденные значения $a_n(R)$, $b_n(R)$, придем к системе четырех однородных линейных уравнений для постоянных A_n , B_n , C_n , D_n . Приравняв нулю ее определитель, придем к уравнению, определяющему бифуркационные значения параметра p . Последний войдет в это уравнение также и через выражение функции $g(R)$, определяемой по (7.13.7), (7.13.4), причем постоянная c_1 нелинейно связана с p соотношением (7.3.10). Критическое давление $p_{кр}$ является минимальным бифуркационным значением p , определяемым надлежащим выбором числа узлов n искомой формы равновесия при заданном отношении R_1/R_0 .

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

I.1. Скаляр и вектор. В математическом естествознании рассматриваются величины, определяющие свойства физических объектов и происходящих в них процессов. Задание численных значений (при выбранной системе единиц) включает в себе произвол, обусловленный выбором той или иной координатной системы — системы отсчета, но существующие между величинами связи не зависят от этих извне привнесенных способов описания. Тензорное исчисление представляет математическое средство, с помощью которого формулируются такие инвариантные (не зависящие от системы отсчета) соотношения между изучаемыми объектами.

Простейшим объектом является скаляр — физическая величина, задаваемая ее численным значением, одним и тем же во всех системах отсчета; таковы плотность, температура, работа, кинетическая энергия. Скаляр — инвариант по его определению.

Вектор — следующий по сложности объект. Это — физическая величина, которой помимо ее численного значения приписывается некоторое направление. Таковы скорость, ускорение, сила. Для обозначения вектора используется жирный шрифт и преимущественно строчные буквы латинского алфавита. Действия векторной алгебры предполагаются известными; скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} обозначается $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, векторное $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Но для последующего необходимо напомнить правила преобразования проекций вектора при преобразовании поворота ортогональной декартовой системы координат; только такие системы применяются в дальнейшем, пока не оговорено противное. Заметим еще, что во всем последующем рассматриваются величины в трехмерном пространстве Евклида (E_3).

Пусть $Ox_1x_2x_3$ — исходная система осей («старые оси»), а $Ox'_1x'_2x'_3$ — получающаяся из нее преобразованием поворота («новые оси»); через \mathbf{i}'_s , \mathbf{i}_k обозначаются единичные векторы, задающие направления новой оси Ox'_s и старой Ox_k , через $\alpha_{ks} = \mathbf{i}'_s \cdot \mathbf{i}_k$ — косинус угла между этими осями. Вектор \mathbf{a} может

быть задан его проекциями a'_s и a_k на оси новой и старой систем и представлен его разложениями по единичным векторам i_s :

$$\left. \begin{aligned} a &= a'_1 i'_1 + a'_2 i'_2 + a'_3 i'_3 = \sum_{s=1}^3 a'_s i'_s = a'_s i'_s, \\ a &= a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = \sum_{k=1}^3 a_k i_k = a_k i_k. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 1.1})$$

Здесь и во всем последующем знак суммирования по повторяющемуся индексу («немому» индексу) будет опускаться, а случай, когда суммирование не должно иметь места (когда рассматривается только одно слагаемое суммы), оговаривается особо переречеркнутым знаком суммы $\left(\sum_s - \text{«не суммировать по } s\text{»}\right)$.

Конечно, немой индекс, не изменяя смысла формул, можно по произволу менять, например, $a_s b_s = a_h b_h$, $a_{st} b_s b_t = a_{rq} b_r b_q$ — одни и те же суммы, три слагаемых в первой сумме, девять — во второй. Неповторяющиеся индексы называются свободными, им поочередно приписываются значения 1, 2, 3. Свободные индексы в обеих частях равенства должны иметь одинаковые наименования, например, записи $q_r = b_{rh} a_h$ представляют три равенства, $q_{rt} = C_{mnrt} b_{mn}$ — девять равенств и девять слагаемых в правой части каждого.

В применении к единичным векторам i'_s , i_k формулы (I. 1.1) записываются в виде

$$i'_s = \alpha_{sk} i_k, \quad i_k = \alpha_{sk} i'_s, \quad (\text{I. 1.2})$$

поскольку α_{sh} — проекция i'_s на i_k (или i_k на i'_s). Теперь, введя в рассмотрение символ Кронекера

$$\delta_{st} = \begin{cases} 0, & s \neq t, \\ 1, & s = t, \end{cases} \quad (\text{I. 1.3})$$

и записывая условия ортонормированности этих векторов

$$i'_s \cdot i'_t = \delta_{st}, \quad i_k \cdot i_m = \delta_{km}, \quad (\text{I. 1.4})$$

приходим к известным соотношениям связи между косинусами углов между осями новой и старой систем:

$$\left. \begin{aligned} i'_s \cdot i'_t &= \delta_{st} = \alpha_{sk} i_k \cdot \alpha_{tm} i'_m = \alpha_{st} \alpha_{tm} \delta_{km} = \alpha_{sk} \alpha_{tk}, \\ i_k \cdot i_m &= \delta_{km} = \alpha_{sk} i'_s \cdot \alpha_{tm} i'_t = \alpha_{sk} \alpha_{tm} \delta_{st} = \alpha_{sk} \alpha_{sm}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 1.5})$$

Подстановка (I. 1.2) в формулы (I. 1.1) приводит к закону преобразования проекций вектора

$$\left. \begin{aligned} a &= a_k i_k = a_k \alpha_{sk} i'_s = a'_s i'_s, & a'_s &= \alpha_{sk} a_k, \\ a &= a'_s i'_s = a'_s \alpha_{sk} i_k = a_k i_k, & a_k &= \alpha_{sk} a'_s. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 1.6})$$

Конечно, численное значение проекции вектора зависит от направления оси, на которую проектируется вектор. Поэтому неудачно встречающееся словоупотребление «проекция вектора на ось — скаляр», так как скаляр — инвариантная физическая величина. Инвариантом вектора \mathbf{a} является его модуль, обозначаемый a . Конечно, это следует и из закона преобразования (I. 1.6):

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_k a_k = \alpha_{sk} \alpha_{tk} a'_s a'_t = \delta_{st} a'_s a'_t = a'_s a'_s. \quad (\text{I. 1.7})$$

Скалярным инвариантом двух векторов служит их скалярное произведение

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_s b_s = a'_k b'_k. \quad (\text{I. 1.8})$$

Если известно, что $a_s b_s = a'_k b'_k$, где b_s и b'_k — проекции вектора \mathbf{b} на старые и новые оси, то a_s , a'_k являются также проекциями вектора \mathbf{a} на те же оси. Действительно,

$$a'_k b'_k = a_s b_s = a_s \alpha_{ks} b'_k, \quad a'_k = \alpha_{ks} a_s,$$

так как направления \mathbf{i}'_k можно выбрать по произволу; величины a'_k также преобразуются, как проекции вектора, что и требовалось.

При преобразовании поворота старые и новые системы одноименны — обе правые или обе левые, а определитель матрицы косинусов равен единице:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = |\alpha_{sk}| = 1. \quad (\text{I. 1.9})$$

Если же поворот соединен с зеркальным отображением, простейшим примером служит $\mathbf{i}'_1 = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}'_2 = \mathbf{i}'_2$, $\mathbf{i}'_3 = -\mathbf{i}'_3$, то $|\alpha_{sk}| = -1$, новые и старые оси разноименны. Далее рассматриваются только преобразования поворота; это позволит избежать некоторых усложнений, например различия истинных векторов и псевдовекторов.

1.2. Символы Леви-Чивита. Так называют величины

$$e_{rst} = \mathbf{i}_r \cdot (\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_t), \quad e'_{rst} = \mathbf{i}'_r \cdot (\mathbf{i}'_s \times \mathbf{i}'_t). \quad (\text{I. 2.1})$$

Они равны нулю, если в числе индексов r, s, t имеются одинаковые, $+1$, если индексы r, s, t различны и следуют в порядке 123, или 231, или 312, и -1 , когда этот порядок нарушен. Это определение верно в любой ортогональной декартовой системе, получаемой из исходной преобразованием поворота ($e_{rst} = e'_{rst}$).

Векторные произведения единичных векторов с помощью символа Леви-Чивита записываются в виде

$$\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_t = e_{rst} \mathbf{i}_r, \quad \mathbf{i}'_s \times \mathbf{i}'_t = e'_{rst} \mathbf{i}'_r, \quad (\text{I. 2.2})$$

поэтому

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_s \mathbf{i}_s \times b_t \mathbf{i}_t = e_{rst} \mathbf{i}_r a_s b_t, \quad c_r = e_{rst} a_s b_t. \quad (\text{I. 2.3})$$

Например,

$$c_1 = e_{1st} a_s b_t = e_{123} a_2 b_3 + e_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2.$$

Имеем также, используя (I. 2.2) и известное правило представления двойного векторного произведения,

$$\mathbf{i}_r \times (\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_t) = \mathbf{i}_s \delta_{rt} - \mathbf{i}_t \delta_{rs} = \mathbf{i}_r \times e_{qst} \mathbf{i}_q = e_{mrq} e_{stq} \mathbf{i}_m.$$

Умножая теперь скалярно обе части этого равенства на \mathbf{i}_k , приходим к соотношению

$$e_{krq} e_{stq} = \delta_{ks} \delta_{rt} - \delta_{kt} \delta_{rs}. \quad (\text{I. 2.4})$$

Из него при $r = t$, то есть при суммировании по двум индексам t и q , имеем

$$e_{ktq} e_{stq} = \delta_{ks} \delta_{tt} - \delta_{kt} \delta_{ts} = 3\delta_{ks} - \delta_{ks} = 2\delta_{ks}. \quad (\text{I. 2.5})$$

Наконец, при суммировании по трем индексам находим

$$e_{ktq} e_{ktq} = 2\delta_{kk} = 6. \quad (\text{I. 2.6})$$

Используя (I. 2.5), имеем еще

$$e_{qst} \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_t = e_{qst} e_{rst} \mathbf{i}_r = 2\delta_{qr} \mathbf{i}_r = 2\mathbf{i}_q, \quad \mathbf{i}_q = \frac{1}{2} e_{qst} \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_t. \quad (\text{I. 2.7})$$

Например,

$$\mathbf{i}_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2).$$

Введение символов Леви-Чивита и использование перечисленных правил значительно сокращает вычисления в тензорной алгебре.

1.3. Тензор второго ранга. Определение этого следующего за вектором по сложности физического объекта можно вводить различными способами. Сначала остановимся на одном из них.

В системе осей $Ox_1 x_2 x_3$ рассматривается квадратная матрица $\|q_{st}\|$:

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = \|q_{st}\|, \quad (\text{I. 3.1})$$

и с помощью чисел этой матрицы проекциям a_k вектора a сопоставляются числа b_s по правилу

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= q_{11}a_1 + q_{12}a_2 + q_{13}a_3, \\ b_2 &= q_{21}a_1 + q_{22}a_2 + q_{23}a_3, \\ b_3 &= q_{31}a_1 + q_{32}a_2 + q_{33}a_3 \end{aligned} \right\} \quad (I. 3.2)$$

или, короче,

$$b_s = q_{sk}a_k. \quad (I. 3.3)$$

По такому же правилу определяется умножение квадратной матрицы $\|q_{st}\|$ на столбец a , в результате которого получаем столбец b .

О п р е д е л е н и е. Матрица $\|q_{st}\|$ определяет тензор второго ранга, обозначаемый \hat{Q} , если известно, что для любого вектора a числа b_s являются проекциями вектора b . Элементы q_{st} матрицы называются компонентами тензора \hat{Q} в принятой системе осей. Операцию сопоставления вектору a вектора b с помощью тензора называют умножением справа этого тензора на вектор a ; она обозначается так:

$$b = \hat{Q} \cdot a. \quad (I. 3.4)$$

С помощью матрицы (I.3.1) один физический объект (вектор a) преобразуется в другой — вектор b . Отсюда следует, что этой матрицей в системе осей $Ox_1x_2x_3$ определена величина, имеющая самостоятельное физическое содержание. Остается потребовать, чтобы ее способность сопоставлять вектору вектор сохранялась в любой координатной системе. Это значит, что элементы q_{st} матрицы $\|q_{st}\|$ должны при переходе к новым осям $Ox'_1x'_2x'_3$ подчиняться закону преобразования, обеспечивающему преобразование чисел b_s , как проекций вектора, то есть по правилу (I.1.6), в предположении, что a_k преобразуются по этому же правилу. Итак,

$$b'_s = \alpha_{sk}b_k = \alpha_{sk}q_{kt}a_t, \quad a_t = \alpha_{pt}a'_p,$$

откуда имеем

$$b'_s = \alpha_{sk}\alpha_{pt}q_{kt}a'_p = q'_{sp}a'_p, \quad (I. 3.5)$$

где обозначено

$$q'_{sp} = \alpha_{sk}\alpha_{pt}q_{kt}. \quad (I. 3.6)$$

Сравнение (I.3.5) и (I.3.3) указывает, что правило умножения справа тензора \hat{Q} на вектор a сохраняется в новой системе осей, если компоненты этого тензора подчиняются закону преобразования (I.3.6). Обратное преобразование имеет вид

$$q_{sk} = \alpha_{ps}\alpha_{tk}q'_{pt}. \quad (I. 3.7)$$

Было бы смешением понятий отождествлять матрицу с тензором. Последний является самостоятельной физической величиной, задание которой требует знания этой матрицы. Основываясь на законах преобразования (I.3.6), (I.3.7), можно дать второе определение тензора второго ранга как физической величины, компоненты которой подчиняются этим законам при преобразовании поворота координатной системы.

Определитель матрицы $\|q_{st}\|$ обозначается $|q_{st}| = q$. Он является одним из инвариантов тензора \hat{Q} . Действительно,

$$q = |q_{st}| = |q'_{pq} \alpha_{ps} \alpha_{qt}| = |q'_{pq}| |\alpha_{ps}| |\alpha_{qt}| = |q'_{pq}| = q'. \quad (\text{I.3.8})$$

Здесь использовано правило умножения определителей, а также (I.1.9).

Примеры. 1°. Вектор момента количеств движения k^0 твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O , определяется через его вектор угловой скорости по известным формулам

$$\left. \begin{aligned} k_1^0 &= \Theta_{11}\omega_1 + \Theta_{12}\omega_2 + \Theta_{13}\omega_3, \\ k_2^0 &= \Theta_{21}\omega_1 + \Theta_{22}\omega_2 + \Theta_{23}\omega_3, \\ k_3^0 &= \Theta_{31}\omega_1 + \Theta_{32}\omega_2 + \Theta_{33}\omega_3, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.3.9})$$

где $\Theta_{ik} = -\Theta_{ki}$ при $i \neq k$ — центробежные моменты, Θ_{ii} — моменты инерции твердого тела относительно связанных с ним осей. Таблицей этих величин определен тензор инерции $\hat{\Theta}^0$ тела в точке O , а формулы (I.3.9) можно записать в виде

$$k^0 = \hat{\Theta}^0 \cdot \omega. \quad (\text{I.3.10})$$

Тензор инерции определяет присущее вращающемуся твердому телу поведение — это физическое свойство, количественно задаваемое матрицей чисел Θ_{ik} , преобразуемых при повороте системы осей по правилу (I.3.6).

2°. Рассмотрим стержень с прямолинейной осью (ось x_3), левый конец которого заделан. Начало системы осей $Sx_1x_2x_3$ поместим в центре инерции правого сечения стержня, направив оси Sx_1 , Sx_2 по главным центральным осям инерции этого сечения. Приложение в точке S поперечной силы F_1 (или F_2), имеющей направление оси Sx_1 (Sx_2), вызывает смещение этой точки $f_1 = \sigma_1 F_1$ ($f_2 = \sigma_2 F_2$) по направлению силы; через $f_3 = \sigma_3 F_3$ обозначается смещение по оси Sx_3 при действии осевой силы F_3 . Формулы

$$f_1 = \sigma_1 F_1, \quad f_2 = \sigma_2 F_2, \quad f_3 = \sigma_3 F_3 \quad (\text{I.3.11})$$

являются частным случаем (I.3.2), когда матрица (I.3.1) имеет диагональную форму:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.3.12})$$

Этим определен тензор податливости стержня в точке C , обозначаемый $\hat{\Sigma}$, а формулы (I.3.11) можно записать в виде

$$f = \hat{\Sigma} \cdot F.$$

Отсутствие диагональных слагаемых в матрице (I.3.12) обусловлено специальным выбором координатной системы и, конечно, не является инвариантным свойством тензора $\hat{\Sigma}$. Например, при повороте системы осей на угол φ вокруг оси Cx_3 таблица косинусов примет вид

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x'_1 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ x'_2 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ x'_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (\text{I.3.13})$$

и по (I.3.6) матрица компонент тензора $\hat{\Sigma}$ будет

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_2 - \sigma_1) \cos 2\varphi] & \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\varphi & 0 \\ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\varphi & \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_1) \cos 2\varphi] & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{I.3.14})$$

так что теперь с помощью формул (I.3.2) имеем

$$f'_1 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_2) F'_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)(-F'_1 \cos 2\varphi + F'_2 \sin 2\varphi)],$$

$$f'_2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_2) F'_2 + (\sigma_2 - \sigma_1)(F'_1 \sin 2\varphi + F'_2 \cos 2\varphi)],$$

$$f'_3 = \sigma_3 F'_3.$$

Элементарный вывод этих формул «косого изгиба» общеизвестен. Достоин внимания автоматизм вычисления, достигнутый применением простейших понятий тензорного исчисления.

3°. Формулами

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \lambda_{11}a_1 + \lambda_{12}a_2 + \lambda_{13}a_3, \\ x_2 = \lambda_{21}a_1 + \lambda_{22}a_2 + \lambda_{23}a_3, \\ x_3 = \lambda_{31}a_1 + \lambda_{32}a_2 + \lambda_{33}a_3, \end{array} \right\} \quad (\text{I.3.15})$$

где a_s, x_s обозначают координаты точек M и M' с вектор-радиусами \mathbf{r} и \mathbf{R} в системе осей $OXYZ$, определяется аффинное преобразование. При таком преобразовании прямая остается прямой, отрезок прямой, поворачиваясь, изменяет длину, прямоугольник преобразуется в параллелограмм, круг — в эллипс. Матрицей $\|\lambda_{st}\|$ определяется тензор второго ранга $\hat{\Lambda}$, а формулы (I.3.15) записываются в виде

$$\mathbf{R} = \hat{\Lambda} \cdot \mathbf{r}.$$

1.4. Простейшие операции с тензорами. Суммой тензоров \hat{P} и \hat{Q} называют тензор \hat{T} , который по умножении справа на вектор \mathbf{a} определяет вектор, равный геометрической сумме $\hat{P} \cdot \mathbf{a}$ и $\hat{Q} \cdot \mathbf{a}$. Он обозначается

$$\hat{T} = \hat{P} + \hat{Q} = \hat{Q} + \hat{P}.$$

Из определения следует, что компоненты t_{st} тензора \hat{T} равны суммам соответствующих компонент слагаемых тензоров \hat{P} , \hat{Q} ($t_{st} = p_{st} + q_{st}$). Аналогично определяется произведение $\lambda \hat{Q}$ тензора на скаляр λ . Компоненты этого тензора равны λq_{st} .

Составим скалярное произведение векторов \mathbf{c} и $\mathbf{b} = \hat{Q} \cdot \mathbf{a}$:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \hat{Q} \cdot \mathbf{a} = q_{st} c_s a_t = q_{ts} c_t a_s.$$

Немые индексы s, t переставлены местами, что, конечно, не изменило суммы. Обозначая теперь $q_{ts} c_t = e_s$, имеем

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = a_s e_s,$$

и поскольку слева стоит инвариант, а \mathbf{a} — вектор, то, сославшись на замечание в конце п. I.1, следует заключить, что e_s — проекции вектора. Они образованы с помощью матрицы

$$\|q_{ts}\| = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{vmatrix}, \quad (I.4.1)$$

транспонированной с матрицей (I.3.1). Из сказанного выше следует, что этой матрицей определены компоненты тензора второго ранга \hat{Q}^* , называемого транспонированным к \hat{Q} , так что

$$\mathbf{e} = \hat{Q}^* \cdot \mathbf{a}.$$

Произведение слева тензора \hat{Q} на вектор \mathbf{a} определяется как произведение справа \hat{Q}^* на этот же вектор \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} \cdot \hat{Q} = \hat{Q}^* \cdot \mathbf{a}. \quad (I.4.2)$$

Проекции этого вектора, в отличие от (I.3.3), равны $q_{ts}a_t$. Основываясь на этом, можно записать тождества

$$c \cdot (\hat{Q} \cdot a) = (c \cdot \hat{Q}) \cdot a = a \cdot (\hat{Q}^* \cdot c) = q_{st}a_t c_s$$

и опускать скобки в записи билинейной формы величин a_t, c_s :

$$c \cdot \hat{Q} \cdot a = a \cdot \hat{Q}^* \cdot c. \quad (\text{I.4.3})$$

Тензор второго ранга называется симметричным, если он равен своему транспонированному:

$$\hat{S} = \hat{S}^*, \quad s_{kt} = s_{tk}. \quad (\text{I.4.4})$$

Такой тензор задается шестью компонентами. Тензор

$$\hat{\Omega} = -\hat{\Omega}^*, \quad \omega_{kt} = -\omega_{tk} \quad (\text{I.4.5})$$

с равными нулю диагональными элементами называется кососимметричным; он задается тремя компонентами, часто обозначаемыми ω_r :

$$\omega_{st} = -e_{rst}\omega_r, \quad \omega_q = -\frac{1}{2}e_{qst}\omega_{st}, \quad (\text{I.4.6})$$

так что матрица компонент Ω записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} = -\omega_3 & \omega_{13} = \omega_2 \\ \omega_{21} = \omega_3 & 0 & \omega_{23} = -\omega_1 \\ \omega_{31} = -\omega_2 & \omega_{32} = \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.4.7})$$

Тождество

$$\hat{Q} = \frac{1}{2}(\hat{Q} + \hat{Q}^*) + \frac{1}{2}(\hat{Q} - \hat{Q}^*) = \hat{S} + \hat{\Omega} \quad (\text{I.4.8})$$

определяет разбиение тензора на симметричную и кососимметричную части; их компоненты равны

$$s_{ik} = \frac{1}{2}(q_{ik} + q_{ki}), \quad \omega_r = \frac{1}{2}e_{rst}q_{ts}. \quad (\text{I.4.9})$$

Например,

$$\omega_1 = \frac{1}{2}e_{1st}q_{ts} = \frac{1}{2}(e_{123}q_{32} + e_{132}q_{23}) = \frac{1}{2}(q_{32} - q_{23}).$$

Свойство тензора быть симметричным инвариантно относительно поворота системы осей. Действительно, по (I.3.6)

$$q'_{pq} = q_{st}\alpha_{ps}\alpha_{qt} = q_{ts}\alpha_{pt}\alpha_{qs} = q_{st}\alpha_{qs}\alpha_{pt} = q'_{qp}.$$

Компоненты кососимметричного тензора преобразуются при повороте координатной системы, как проекции вектора ω ; действительно,

$$\begin{aligned}\omega'_r &= \frac{1}{2} e'_{rst} \omega'_{ts} = \frac{1}{2} i'_r \cdot (i'_s \times i'_t) \alpha_{tp} \alpha_{sq} \omega_{pq} = \frac{1}{2} i'_r \cdot (i'_s \alpha_{sq} \times i'_t \alpha_{tp}) \omega_{pq} = \\ &= \frac{1}{2} i'_r \cdot (i_q \times i_p) \omega_{pq} = \frac{1}{2} i'_r \cdot i_m e_{mqp} \omega_{pq} = i'_r \cdot i_m \omega_m,\end{aligned}$$

так что

$$\omega'_r = \alpha_{rm} \omega_m,$$

что согласуется с законом преобразования (I.1.6) проекций вектора. Этот вектор, определяемый по (I.4.9), называют сопутствующим тензору \hat{Q} ; его обращение в нуль свидетельствует о симметричности тензора. Заметим еще: вектор $b = \hat{Q} \cdot a$ по (I.3.3) имеет проекции

$$b_s = \omega_{st} a_t = -e_{rst} \omega_r a_t = e_{srt} \omega_r a_t,$$

так что, сославшись на (I.2.3), приходим к часто применяемым соотношениям

$$\hat{Q} \cdot a = \omega \times a, \quad a \cdot \hat{Q} = \hat{Q}^* \cdot a = -\hat{Q} \cdot a = a \times \omega. \quad (\text{I.4.10})$$

Обратившись еще к (I.4.8), имеем

$$\hat{Q} \cdot a = \hat{S} \cdot a + \omega \times a, \quad a \cdot \hat{Q} = \hat{S} \cdot a - \omega \times a. \quad (\text{I.4.11})$$

Следствием этой формулы является соотношение

$$a \cdot \hat{Q} \cdot a = a \cdot \hat{S} \cdot a, \quad (\text{I.4.12})$$

выражающее легко предвидимый результат, что в образовании квадратичной формы с помощью тензора \hat{Q} имеет значение только его симметричная часть.

Рассмотрим билинейную форму $q_{sk} a_s b_k$, где a_s, b_k — проекции векторов a, b . Предположение, что она инвариантна, то есть что ее численное значение сохраняется независимо от выбора координатной системы, выражается равенством

$$q'_{qt} \alpha'_p b'_t = q_{sk} a_s b_k.$$

Оно выполняется, если коэффициенты формы преобразуются по закону (I.3.6), а ее переменные — по (I.1.6). Это позволяет дать третье определение тензора второго ранга как величины, задаваемой матрицей $\|q_{st}\|$ коэффициентов инвариантной билинейной формы. Коэффициентами инвариантной квадратичной формы задается симметричный тензор второго ранга.

Примеры. 1°. Известно, что удвоенная кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O

с угловой скоростью, задаваемой вектором ω , определяется по формуле

$$2T = \Theta_{ik} \omega_i \omega_k = \Theta_{11} \omega_1^2 + \Theta_{22} \omega_2^2 + \Theta_{33} \omega_3^2 + 2\Theta_{12} \omega_1 \omega_2 + 2\Theta_{23} \omega_2 \omega_3 + 2\Theta_{31} \omega_3 \omega_1.$$

Эта форма инвариантна, так как, конечно, численное значение кинетической энергии не зависит от выбора системы координат. Поэтому Θ_{ik} — компоненты симметричного тензора второго ранга $\hat{\Theta}^0$ — тензора инерции твердого тела в точке O , а выражение $2T$ можно записать еще в виде

$$2T = \omega \cdot \hat{\Theta} \cdot \omega = \omega \cdot K^0.$$

2°. В примере 2° п. I.3 квадратичная форма

$$2\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot \hat{\Sigma} \cdot \mathbf{F} = \sigma_1 F_1^2 + \sigma_2 F_2^2 + \sigma_3 F_3^2$$

представляет удвоенную потенциальную энергию упругого стержня. Этим подтверждается, что $\hat{\Sigma}$ — симметричный тензор второго ранга.

1.5. Диада векторов, диадное представление тензора второго ранга. Заданием двух векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} определяется матрица

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{array} \right\| = \|a_s b_k\|. \quad (1.5.1)$$

Ею определяется тензор второго ранга, называемый диадным произведением векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} (или диадой) и обозначаемый \mathbf{ab} . Это согласуется с принятым в п. I.3 определением тензора, поскольку для любого вектора \mathbf{c} величины, определяемые по правилу (I.3.2):

$$a_s (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) = a_s \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$

только скалярным множителем $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ отличаются от проекций вектора \mathbf{a} . Эти формулы определяют произведение справа диады на вектор:

$$(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}. \quad (1.5.2)$$

Транспонирование матрицы (1.5.1) приводит к замене \mathbf{a} и \mathbf{b} местами:

$$(\mathbf{ab})^* = \mathbf{ba}, \quad (1.5.3)$$

так что по (I.4.2)

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{ba} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{ab})^*. \quad (1.5.4)$$

В матрице, определяющей диаду $i_s i_k$, только элемент s -й строки и k -го столбца отличен от нуля и равен 1. Сумма трех диад

$$\hat{E} = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3 = \delta_{st} i_s i_t \quad (1.5.5)$$

определяет в ортогональной декартовой системе координат единичный тензор — тензор, только диагональные элементы которого, равные единице, отличны от нуля. Это свойство единичного тензора инвариантно относительно поворота, так как

$$\delta'_{pq} = \alpha_{ps} \alpha_{qt} \delta_{st} = \alpha_{pt} \alpha_{qs} = \delta_{pq}.$$

Очевидно также, что

$$\hat{E} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \hat{E} = \mathbf{a}, \quad (I.5.6)$$

и это равенство можно принять за определение единичного тензора — его произведение (справа или слева) на любой вектор \mathbf{a} дает тот же вектор \mathbf{a} .

Тензор \hat{Q} может быть представлен суммой девяти диад:

$$\hat{Q} = q_{st} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t; \quad (I.5.7)$$

это следует из того, что тензор справа задается в избранной системе той же матрицей компонент, что и тензор \hat{Q} . Такое диадное представление тензора существенно облегчает операции тензорной алгебры. Примером могут служить уже знакомые действия умножения справа и слева:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q} \cdot \mathbf{a} &= q_{st} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t \cdot a_k \mathbf{i}_k = q_{st} a_k \delta_{tk} \mathbf{i}_s = q_{st} a_t \mathbf{i}_s, \\ \mathbf{a} \cdot \hat{Q} &= a_k \mathbf{i}_k \cdot q_{st} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t = q_{st} a_k \delta_{ks} \mathbf{i}_t = q_{st} a_s \mathbf{i}_t, \end{aligned} \right\}$$

— пришли к ранее известным выражениям.

Векторное умножение тензора второго ранга на вектор справа и слева приводит к новым тензорам этого же ранга:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q} \times \mathbf{a} &= q_{st} a_k \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t \times \mathbf{i}_k = e_{rtk} q_{st} a_k \mathbf{i}_r \mathbf{i}_t, \\ \mathbf{a} \times \hat{Q} &= q_{st} a_k \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t = e_{rks} q_{st} a_k \mathbf{i}_r \mathbf{i}_t. \end{aligned} \right\} \quad (I.5.8)$$

Например, матрицей компонент последнего тензора будет

$$\begin{pmatrix} q_{31}a_2 - q_{21}a_3 & q_{32}a_2 - q_{22}a_3 & q_{33}a_2 - q_{23}a_3 \\ q_{11}a_3 - q_{31}a_1 & q_{12}a_3 - q_{32}a_1 & q_{13}a_3 - q_{33}a_1 \\ q_{21}a_1 - q_{11}a_2 & q_{22}a_1 - q_{12}a_2 & q_{23}a_1 - q_{13}a_2 \end{pmatrix}. \quad (I.5.9)$$

В частности, диаде \mathbf{ab} и вектору \mathbf{c} сопоставляются диады

$$(\mathbf{ab}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad \mathbf{c} \times (\mathbf{ab}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \mathbf{b}. \quad (I.5.10)$$

Легко проверяются тождества

$$(\mathbf{a} \times \hat{Q})^* = -\hat{Q}^* \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times (\hat{P} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \hat{P}) \cdot \mathbf{b}. \quad (I.5.11)$$

Введем еще в рассмотрение величины

$$q_{st} \mathbf{i}_s = \mathbf{q}_t^*, \quad q_{st} \mathbf{i}_t = \mathbf{q}_s. \quad (I.5.12)$$

Они не являются векторами, поскольку q_{st} не преобразуются, как проекции вектора; но введение этих «квазивекторов» в фиксированной системе осей допустимо и упрощает записи формул. Тензор \hat{Q} с их помощью записывается в формуле суммы трех диад:

$$\hat{Q} = q_t^* i_t = i_s q_s. \quad (I.5.13)$$

Сопутствующий ему вектор ω представим в виде

$$\omega = -\frac{1}{2} q_t^* \times i_t = -\frac{1}{2} i_s \times q_s = \frac{1}{2} e_{rts} q_{st} i_r. \quad (I.5.14)$$

В частности, вектор, сопутствующий диаде ab , равен

$$\omega = \frac{1}{2} e_{rts} a_s b_t i_r = -\frac{1}{2} a \times b. \quad (I.5.15)$$

Отметим еще, что st -компонента тензора \hat{Q} может быть представлена в виде

$$q_{st} = i_s \cdot \hat{Q} \cdot i_t. \quad (I.5.16)$$

I.6. Тензоры высших рангов. Свертывание индексов. Условимся называть скаляр тензором нулевого, вектор — первого ранга. Из трех родов операций над двумя векторами a , b — диадного, векторного и скалярного умножения — наиболее общей является первая; с ее помощью из двух тензоров первого ранга образуется тензор второго ранга ab , задаваемый матрицей компонент $\|a_s b_t\|$; ранг этого тензора понижается на единицу при сопоставлении ему тензора первого ранга — сопутствующего вектора $\frac{1}{2} e_{rst} a_s b_t i_r$. Он понижается на две единицы (тензор становится скаляром), когда в рассмотрение вводится величина $\delta_{st} a_s b_t = a_s b_s = a \cdot b$. Происходит свертывание по паре индексов s, t .

Величина

$$^{(n)}\hat{Q} = q_{s_1 s_2 \dots s_n} i_{s_1} i_{s_2} \dots i_{s_n} \quad (I.6.1)$$

определяет тензор n -го ранга, если его компоненты (их всего 3^n) подчиняются при повороте координатной системы закону преобразования

$$q'_{t_1 t_2 \dots t_n} = q_{s_1 s_2 \dots s_n} \alpha_{t_1 s_1} \alpha_{t_2 s_2} \dots \alpha_{t_n s_n}, \quad (I.6.2)$$

представляющему непосредственное обобщение правила (I.3.6). Ранг тензора снижается на две единицы при каждом свертывании; например, при свертывании по двум последним индексам приходим к тензору

$$^{(n-2)}\hat{Q} = q_{s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_{n-1}} i_{s_1} i_{s_2} \dots i_{s_{n-2}}$$

(по индексу s_{n-1} — суммирование!). Ранг тензора можно понизить на единицу введением «сопутствующего» тензора; одним из них будет тензор

$$\begin{aligned} {}^{(n-1)}\hat{Q} &= -\frac{1}{2} q_{s_1 s_2 \dots s_n} (\mathbf{i}_{s_1} \times \mathbf{i}_{s_2}) \mathbf{i}_{s_3} \dots \mathbf{i}_{s_n} = \\ &= -\frac{1}{2} e_{s_1 s_2 r} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_{s_3} \dots \mathbf{i}_{s_n} q_{s_1 s_2 \dots s_n}. \end{aligned}$$

Свертывание тензора второго ранга приводит к скаляру, называемому следом (Spur) тензора или его первым инвариантом:

$$\text{Sp } \hat{Q} = I_1(\hat{Q}) = q_{st} \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{i}_t = q_{st} \delta_{st} = q_{ss}. \quad (\text{I.6.3})$$

В частности, например, для единичного тензора

$$I_1(\hat{E}) = 3, \quad (\text{I.6.4})$$

а для диады

$$I_1(ab) = \text{Sp } ab = a \cdot b. \quad (\text{I.6.5})$$

С помощью двух тензоров \hat{Q} , \hat{P} второго ранга образуются тензоры четвертого ранга; примерами служат

$$\hat{Q}\hat{P} = q_{st} p_{rq} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t \mathbf{i}_r \mathbf{i}_q, \quad \hat{P}\hat{Q} = p_{rq} q_{st} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_q \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t.$$

Из них можно образовать тензоры второго ранга при однократном свертывании. В частности, произведением \hat{Q} на \hat{P} справа является тензор

$$\hat{Q} \cdot \hat{P} = q_{st} p_{rq} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t \cdot \mathbf{i}_r \mathbf{i}_q = q_{st} p_{tq} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_q. \quad (\text{I.6.6})$$

При вторичном свертывании приходим к инварианту — следу тензора (I.6.6). Он представляется в виде

$$\hat{Q} \cdot \hat{P} = \text{Sp}(\hat{Q} \cdot \hat{P}) = q_{st} p_{tq} \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{i}_q = q_{st} p_{ts}. \quad (\text{I.6.7})$$

Легко проверяется тождество

$$(\hat{Q} \cdot \hat{P})^* = \hat{P}^* \cdot \hat{Q}^* = q_{st} p_{tq} \mathbf{i}_q \mathbf{i}_s, \quad (\text{I.6.8})$$

из которого следует, что тензор $\hat{Q} \cdot \hat{Q}^*$ симметричен; однако $\hat{Q}^* \cdot \hat{Q} \neq \hat{Q} \cdot \hat{Q}^*$.

При $\hat{Q} = \hat{P}$ приходим к тензору второго ранга, называемому квадратом тензора:

$$\hat{Q} \cdot \hat{Q} = \hat{Q}^2 = q_{st} q_{tr} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_r. \quad (\text{I.6.9})$$

Аналогично представляются более высокие степени тензора, например:

$$\hat{Q}^3 = \hat{Q}^2 \cdot \hat{Q} = q_{st} q_{tr} q_{rq} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_q.$$

Следы этих тензоров равны

$$\text{Sp } \hat{Q}^2 = q_{st}q_{ts}, \quad \text{Sp } \hat{Q}^3 = q_{st}q_{tr}q_{rs}. \quad (\text{I.6.10})$$

Степени тензора выше второй выражаются через \hat{Q}^2 , \hat{Q} , $\hat{Q}^0 = \hat{E}$. Эта теорема Кейли — Гамильтона доказывается в п. I. 10, I. 12.

Умножение тензора второго ранга справа или слева на единичный тензор \hat{E} приводит к тому же тензору:

$$\hat{Q} \cdot \hat{E} = \hat{E} \cdot \hat{Q} = \hat{Q}. \quad (\text{I.6.11})$$

Для последующего представит интерес выражение тензора $\hat{Q} \cdot \hat{Q}^*$ через симметричную часть \hat{S} тензора \hat{Q} и сопутствующий вектор ω . Имеем

$$\hat{Q}^* \cdot \hat{Q} = (\hat{S} - \hat{\Omega}) \cdot (\hat{S} + \hat{\Omega}) = \hat{S}^2 - \hat{\Omega} \cdot \hat{S} + \hat{S} \cdot \hat{\Omega} - \hat{\Omega}^2$$

и, сославшись на (I. 4.6), (I. 5.8), найдем

$$\hat{\Omega} \cdot \hat{S} = \omega_{tr} s_{rq} i_t i_q = e_{mrt} \omega_m s_{rq} i_t i_q = \omega \times \hat{S},$$

а учитывая еще, что $\hat{\Omega}^* = -\hat{\Omega}$, $\hat{S}^* = \hat{S}$, получаем по (I. 6.8)

$$(\hat{\Omega} \cdot \hat{S})^* = \hat{S}^* \cdot \hat{\Omega}^* = -\hat{S} \cdot \hat{\Omega} = e_{mrt} \omega_m s_{rq} i_q i_t = (\omega \times \hat{S})^*$$

и также

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega} &= \omega_{st} \omega_{tr} i_s i_r = e_{ism} e_{rtq} \omega_m \omega_q i_s i_r = (\delta_{sq} \delta_{mr} - \delta_{sr} \delta_{mq}) \omega_m \omega_q i_s i_r = \\ &= \omega_r \omega_s i_s i_r - \omega_m \omega_m i_s i_s = \omega \omega - \hat{E} \omega \cdot \omega. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \hat{Q}^* \cdot \hat{Q} &= \hat{S}^2 + \hat{E} \omega \cdot \omega - \omega \omega - \omega \times \hat{S} - (\omega \times \hat{S})^* = \\ &= [s_{ts} s_{rq} - \delta_{tq} \omega_m \omega_m - \omega_t \omega_q - \omega_m (e_{mrt} s_{rq} + e_{mrq} s_{rt})] i_t i_q \end{aligned} \quad (\text{I.6.12})$$

и аналогично

$$\hat{Q} \cdot \hat{Q}^* = \hat{S}^2 + \hat{E} \omega \cdot \omega - \omega \omega + \omega \times \hat{S} + (\omega \times \hat{S})^*, \quad (\text{I.6.13})$$

так что

$$\hat{Q} \cdot \hat{Q}^* - \hat{Q}^* \cdot \hat{Q} = 2[\omega \times \hat{S} + (\omega \times \hat{S})^*]. \quad (\text{I.6.14})$$

Примером тензора третьего ранга является тензор Леви-Чивита — его компонентами служат 27 символов Леви-Чивита (отличны от нуля только шесть). Их тензорный характер легко обнаружить, основываясь на определении (I. 2.1) и на формулах (I. 1.2)

$$e'_{str} = i'_s \cdot (i'_t \times i'_r) = \alpha_{sk} \alpha_{tl} \alpha_{rm} i_k \cdot (i_l \times i_m) = \alpha_{sk} \alpha_{tl} \alpha_{rm} e_{klm}$$

и сославшись на (I. 6.2). Величины $e_{str} e_{klm}$ определяют тензор шестого ранга. Его сворачивание по трем парам индексов приводит к инварианту (I. 2.6), по двум парам индексов — по

(I.2.5) к удвоенному единичному тензору, по одной паре индексов — к тензору четвертого ранга (I.2.4).

Изотропным называют тензор, компоненты которого сохраняют неизменные значения во всех координатных системах, получающихся одна по другой преобразованием поворота. Примером изотропного тензора второго ранга может служить произведение скаляра на единичный тензор $\lambda \hat{E}$, а произведение скаляра на тензор Леви-Чивита есть изотропный тензор третьего ранга. Можно доказать, что других изотропных тензоров второго и третьего ранга не существует. Наиболее общий вид компонент изотропного тензора четвертого ранга представляется формулой, содержащей три скалярных множителя λ , μ , ν :

$$c_{ikmp} = \lambda \delta_{ik} \delta_{mp} + \mu (\delta_{im} \delta_{kp} + \delta_{ip} \delta_{km}) + \nu (\delta_{im} \delta_{kp} - \delta_{ip} \delta_{km}). \quad (\text{I.6.15})$$

При наличии требований симметрии

$$c_{ikmp} = c_{mpik}, \quad c_{ikmp} = c_{ikpm} \quad (\text{I.6.16})$$

третье слагаемое в (I.6.15) отпадает ($\nu = 0$).

I.7. Обратный тензор. Соотношения (I.3.2) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных a_r ; она имеет решение, если матрица $\|q_{st}\|$ невырожденная, то есть ее определитель отличен от нуля:

$$q = \|q_{st}\| \neq 0. \quad (\text{I.7.1})$$

Тогда a_r определяются известными равенствами

$$a_r = \frac{1}{q} (b_1 A_{r1} + b_2 A_{r2} + b_3 A_{r3}) = \frac{1}{q} b_t A_{rt}, \quad (\text{I.7.2})$$

в которых A_{rt} — алгебраическое дополнение элемента q_{tr} определителя q (обратить внимание на расстановку индексов!). Тензор с матрицей компонент

$$q^{rt} = \frac{1}{q} A_{rt} \quad (\text{I.7.3})$$

называется обратным тензору \hat{Q} и обозначается \hat{Q}^{-1} :

$$\hat{Q}^{-1} = i_r i_t q^{rt} = i_r i_t \frac{A_{rt}}{q}. \quad (\text{I.7.4})$$

Соотношения (I.7.2) теперь записываются в виде

$$a = \hat{Q}^{-1} \cdot b, \quad (\text{I.7.5})$$

и подстановка в (I.3.4) приводит к равенству

$$b = \hat{Q} \cdot \hat{Q}^{-1} \cdot b, \quad \hat{Q} \cdot \hat{Q}^{-1} = \hat{E}. \quad (\text{I.7.6})$$

Из него имеем

$$\hat{Q} \cdot \hat{Q}^{-1} = q_{sq} i_s i_q \cdot q^{rt} i_r i_t = q_{sr} q^{rt} i_s i_t = \hat{E} = \delta_{st} i_s i_t, \quad (\text{I.7.7})$$

откуда приходим к известному свойству определителей

$$q_{sr}q^{rt} = \delta_{st}. \quad (I.7.8)$$

Заметим еще также, что

$$A_{tr} = \frac{\partial q}{\partial q_{rt}}, \quad q^{tr} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial q_{rt}}. \quad (I.7.9)$$

Известно, что определитель q представляет сумму взятых с надлежащими знаками произведений вида $q_{st}q_{qr}q_{mn}$, причем в тройках индексов sqm , trn не должно быть одинаковых; в противном случае сумма будет нулем. Нетрудно проверить, что

$$q = \frac{1}{6} e_{sqm} e_{trn} q_{st} q_{qr} q_{mn}. \quad (I.7.10)$$

Введем обозначение

$$q^{ts} = \frac{1}{6q} e_{sqm} e_{trn} q_{st} q_{qr} q_{mn}. \quad (I.7.11)$$

Тогда

$$q_{tt}q^{ts} = \frac{1}{6q} e_{sqm} e_{trn} q_{st} q_{qr} q_{mn} = \begin{cases} 0, & s \neq l \\ 1, & s = l \end{cases} = \delta_{sl},$$

так как при $l \neq s$ в тройках индексов sqm , trn неизбежно повторение; пришли к равенству (I.7.8), откуда следует, что формулой (I.7.11) дается другое представление компонент тензора:

$$\hat{Q}^{-1} = q^{ts} i_t i_s.$$

Заметим еще соотношения

$$(\hat{Q}^{-1})^{-1} = \hat{Q}, \quad (\hat{Q}^{-1})^* = (\hat{Q}^*)^{-1} \quad (I.7.12)$$

— тензор, обратный обратному, равен исходному тензору; транспонирование обратного тензора приводит к тензору, обратному транспонированному. Далее, отметим свойство переставимости

$$\hat{Q} \cdot \hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^{-1} \cdot \hat{Q} = \hat{E} \quad (I.7.13)$$

и соотношение, определяющее тензор, обратный произведению тензоров:

$$(\hat{P} \cdot \hat{Q})^{-1} = \hat{Q}^{-1} \cdot \hat{P}^{-1}, \quad (I.7.14)$$

проверяемое умножением обеих частей на $\hat{P} \cdot \hat{Q}$:

$$\hat{P} \cdot \hat{Q} \cdot (\hat{P} \cdot \hat{Q})^{-1} = \hat{E} = \hat{P} \cdot \hat{Q} \cdot \hat{Q}^{-1} \cdot \hat{P}^{-1} = \hat{P} \cdot \hat{E} \cdot \hat{P}^{-1} = \hat{P} \cdot \hat{P}^{-1} = \hat{E},$$

что и требуется.

I.8. Тензор поворота. Как выше, i_s обозначают единичные векторы осей триэдра $Ox_1x_2x_3$, а i'_s — триэдра $Ox'_1x'_2x'_3$, получающегося из первого с помощью поворота. В рассмотрение

вводится тензор \hat{A} , равный сумме трех диад $i_s i'_s$, и транспонированный ему тензор \hat{A}^* :

$$\hat{A} = i_s i'_s, \quad \hat{A}^* = i'_s i_s. \quad (I.8.1)$$

Умножение \hat{A} слева на вектор a (или \hat{A}^* справа на a) приводит к вектору, обозначаемому \hat{a} :

$$\hat{a} = a \cdot \hat{A} = a \cdot i_s i'_s = a_s i'_s, \quad \hat{A}^* \cdot a = i'_s a_s = \hat{a}. \quad (I.8.2)$$

Проекции этого вектора на новые оси i'_s равны проекциям a_s вектора a на старые оси i_s ; это значит, что вектор \hat{a} получен из a путем поворота последнего вместе с триэдром $Ox_1x_2x_3$. Тензоры \hat{A} , \hat{A}^* , осуществляющие эту операцию, называются тензорами поворота.

Проекции векторов i_1 и i'_1 на старые оси равны соответственно $(1, 0, 0)$ и $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$; поэтому матрица компонент диады $i_1 i'_1$ представляется в виде

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

а компоненты тензора \hat{A} — матрицей косинусов $\|\alpha_{st}\|$. Получаем

$$\hat{A} = \alpha_{st} i_s i'_t, \quad \hat{a} = a \cdot \hat{A} = \alpha_{st} i'_t a_s = i'_s a_s, \quad \hat{a}_s = a_s, \quad (I.8.3)$$

что и требуется.

Отметим еще соотношение

$$\hat{A} \cdot \hat{A}^* = i_s i'_s \cdot i'_k i_k = i_s i_k \delta_{sk} = \hat{E}, \quad \hat{A}^* = \hat{A}^{-1}, \quad (I.8.4)$$

выражающее, что транспонирование тензора поворота приводит к обратному тензору. Это — характеристическое свойство тензора поворота; всякий тензор, обладающий этим свойством, является тензором поворота. Действительно, пусть *

$$\hat{Q} \cdot \hat{Q}^* = \hat{E}, \quad \hat{Q}^* = \hat{Q}^{-1}.$$

Поскольку определители q и q^* , конечно, равны друг другу, а определитель $|\delta_{st}| = 1$, имеем $q^2 = 1$ и примем $q = 1$; в (I.7.8) имеем $q^{rt} = q_{tr}$ и приходим к шести равенствам

$$q_{sr} q_{tr} = \delta_{st},$$

определяющим вместе с условием $q = 1$ по (I.1.5) матрицу косинусов.

Известно, что поворот твердого тела (системы связанных с ним осей из старого положения $Ox_1x_2x_3$ в новое $Ox'_1x'_2x'_3$) может быть задан вектором конечного поворота θ ; этот вектор имеет

направление оси, вокруг которой производится поворот, и величину $2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}$, где χ — угол поворота:

$$\theta = 2k \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}.$$

Вектор \mathbf{a} , заданный в системе осей $Ox_1x_2x_3$, при этом становится вектором $\hat{\mathbf{a}}$, определяемым формулой О. Родрига *):

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \frac{\theta}{1 + \frac{1}{4}\theta^2} \times \left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\theta \times \mathbf{a} \right). \quad (\text{I.8.5})$$

Его можно представить также в виде

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \sin \chi \left[\mathbf{k} \times \mathbf{a} + (\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a}) \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \right]. \quad (\text{I.8.6})$$

Введем кососимметричный тензор

$$\hat{\Omega} = \mathbf{k} \times \hat{E} = k_1 (\mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3) + k_2 (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1) + k_3 (\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2), \quad (\text{I.8.7})$$

так что

$$\mathbf{k} \times \mathbf{a} = \hat{\Omega} \cdot \mathbf{a}.$$

Тогда (I.8.6) можно будет преобразовать к виду

$$\hat{\mathbf{a}} = [(\hat{E} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cos \chi + \mathbf{k}\mathbf{k} + \hat{\Omega} \sin \chi] \cdot \mathbf{a} = \hat{A}^* \cdot \mathbf{a},$$

позволяющему дать инвариантное (не связанное с выбором осей) представление тензоров поворота:

$$\hat{A} = (\hat{E} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cos \chi + \mathbf{k}\mathbf{k} - \hat{\Omega} \sin \chi, \quad \hat{A}^* = (\hat{E} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cos \chi + \mathbf{k}\mathbf{k} + \hat{\Omega} \sin \chi. \quad (\text{I.8.8})$$

1.9. Главные оси и главные значения симметричного тензора. Разыскивается такое направление (определяемое единичным вектором \mathbf{e}), чтобы вектор $\hat{Q} \cdot \mathbf{e}$, где \hat{Q} — заданный симметричный тензор второго ранга, был параллелен этому направлению \mathbf{e} :

$$\hat{Q} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}, \quad (\hat{Q} - \lambda \hat{E}) \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (\text{I.9.1})$$

Здесь λ — пока неизвестный скаляр. Полагая $\mathbf{e} = e_i \mathbf{i}_i$, можно переписать это равенство в виде

$$(q_{st} - \lambda \delta_{st}) e_t = 0 \quad (s = 1, 2, 3). \quad (\text{I.9.2})$$

*) См. п. 1. 10а.

Пришли к трем уравнениям

$$\left. \begin{aligned} (q_{11} - \lambda) e_1 + q_{12} e_2 + q_{13} e_3 &= 0, \\ q_{21} e_1 + (q_{22} - \lambda) e_2 + q_{23} e_3 &= 0, \\ q_{31} e_1 + q_{32} e_2 + (q_{33} - \lambda) e_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.9.3})$$

к которым надо еще присоединить уравнение, выражающее, что e — единичный вектор:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (\text{I.9.4})$$

Им исключается из рассмотрения тривиальное решение ($e_s = 0$) системы линейных однородных уравнений (I.9.3). Ее определитель должен быть равным нулю:

$$P_3(\lambda) = |q_{st} - \lambda \delta_{st}| = \begin{vmatrix} q_{11} - \lambda & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} - \lambda & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{I.9.5})$$

так что числа λ являются корнями этого кубического уравнения — характеристического уравнения тензора \hat{Q} . Они инвариантны относительно преобразования поворота координатной системы, что сразу же следует из соотношения (I.3.8) в применении к тензору $\hat{Q} - \lambda \hat{E}$.

Пусть λ_1, λ_2 — два не равных друг другу корня уравнения (I.9.5), соответствующие им векторы e назовем $e^1 = e_i i_i$, $e^2 = e_i i_i$. Тогда

$$(\hat{Q} - \lambda_1 \hat{E}) \cdot e^1 = 0, \quad (\hat{Q} - \lambda_2 \hat{E}) \cdot e^2 = 0, \quad (\text{I.9.6})$$

откуда следует

$$e^2 \cdot \hat{Q} \cdot e^1 = \lambda_1 e^2 \cdot e^1, \quad e^1 \cdot \hat{Q} \cdot e^2 = \lambda_2 e^1 \cdot e^2,$$

Но для симметричного тензора

$$e^2 \cdot \hat{Q} \cdot e^1 = q_{st} e_s^2 e_t^1 = q_{ts} e_t^2 e_s^1 = q_{st} e_s^1 e_t^2 = e^1 \cdot \hat{Q} \cdot e^2,$$

и поэтому

$$(\lambda_1 - \lambda_2) e^1 \cdot e^2 = 0, \quad e^1 \cdot e^2 = 0. \quad (\text{I.9.7})$$

Если бы корни λ_1, λ_2 были комплексными сопряженными, то таковыми были бы и соответствующие решения e_s^1, e_s^2 систем уравнений (I.9.3) для $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$; но сумма $e_s^1 e_s^2 = |e_s^1|^2$, равная сумме квадратов модулей чисел e_s^1 , не может быть нулем;

этим доказано, что корни полинома $P_3(\lambda)$ вещественны, а векторы, соответствующие его двум различным корням, взаимно перпендикулярны.

1°. Пусть корни полинома $P_3(\lambda)$ простые ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$). Имеем

$$-P'(\lambda_s) = \Delta_{11}(\lambda_s) + \Delta_{22}(\lambda_s) + \Delta_{33}(\lambda_s), \quad (I.9.8)$$

где $\Delta_{ik}(\lambda_s)$ — алгебраическое дополнение элемента i -й строки, k -го столбца определителя (I.9.5) при $\lambda = \lambda_s$. Хотя бы одно слагаемое этой суммы (пусть третье) отлично от нуля — в противном случае имели бы $P'(\lambda_s) = 0$ и корень λ_s не был бы простым. Тогда из первого и второго уравнений (I.9.3) имеем (см. также (I.10.14a))

$$e_1^s = e_3^s \frac{\Delta_{31}(\lambda_s)}{\Delta_{33}(\lambda_s)}, \quad e_2^s = e_3^s \frac{\Delta_{32}(\lambda_s)}{\Delta_{33}(\lambda_s)}$$

и по (I.9.4) найдем

$$e_k^s = \pm \frac{1}{D} \Delta_{sk}(\lambda_s), \quad D^2 = \Delta_{31}^2(\lambda_s) + \Delta_{32}^2(\lambda_s) + \Delta_{33}^2(\lambda_s), \quad (I.9.9)$$

причем, конечно, удовлетворено и третье уравнение (I.9.3), так как

$$q_{31}\Delta_{31}(\lambda_s) + q_{32}\Delta_{32}(\lambda_s) + (q_{33} - \lambda_s)\Delta_{33}(\lambda_s) = P_3(\lambda_s) = 0.$$

Итак, для каждого из корней λ_s уравнения (I.9.5) определено его направляющими косинусами e_k^s направление e^s такое, что

$$\hat{Q} \cdot e^s = \lambda_s e^s \quad (\hat{\Sigma}_s).$$

Эти три направления взаимно ортогональны, их называют главными направлениями тензора \hat{Q} , а числа λ_s — его главными значениями. Из соотношений

$$e^k \cdot \hat{Q} \cdot e^s = \lambda_s e^k \cdot e^s = \lambda_s \delta_{ks} \quad (I.9.10)$$

следует, что в ортогональной системе направлений e^1, e^2, e^3 матрица компонент тензора \hat{Q} является диагональной:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \quad (I.9.11)$$

а диадное представление тензора имеет трехчленный вид *):

$$\hat{Q} = \lambda_1 e^1 e^1 + \lambda_2 e^2 e^2 + \lambda_3 e^3 e^3 = \sum_{s=1}^3 \lambda_s e^s e^s. \quad (I.9.12)$$

*) В подобных записях, когда немой индекс повторяется трижды (а не дважды), предпочтительно сохранить знак суммирования.

2°. Случай двукратного корня ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$). Сказанное выше сохраняется для направления \mathbf{e} — оно ортогонально прочим направлениям:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3 = 0 \quad (s = 1, 2). \quad (\text{I.9.13})$$

Для двойного корня λ_s

$$P'(\lambda_s) = 0, \quad \frac{1}{2} P''(\lambda_s) = (q_{11} - \lambda_s) + (q_{22} - \lambda_s) + (q_{33} - \lambda_s),$$

и хотя бы одно слагаемое в этой сумме, пусть первое, отлично от нуля. Для определения трех неизвестных e_k служат лишь два уравнения — первое уравнение (I.9.3) и уравнение (I.9.4); второе и третье уравнения (I.9.3) удовлетворены тождественно — это следствие того, что $P'(\lambda_1) = 0$, $P(\lambda_1) = 0$. Направление \mathbf{e} доопределяется требованием $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 0$ его ортогональности к \mathbf{e} . Итак, в случае двойного корня лишь одно из трех главных направлений \mathbf{e} определено однозначно, а два других \mathbf{e} , \mathbf{e} произвольно ориентированы в плоскости, перпендикулярной \mathbf{e} , — система направлений \mathbf{e} , \mathbf{e} , \mathbf{e} определена с точностью до поворота вокруг \mathbf{e} . Диадное представление тензора \hat{Q} записывается в виде

$$\hat{Q} = \lambda_1 (\mathbf{e}\mathbf{e} + \mathbf{e}\mathbf{e}) + \lambda_3 \mathbf{e}\mathbf{e} = \lambda_1 \hat{E} + (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{e}\mathbf{e}. \quad (\text{I.9.14})$$

Из него следует, что лишь направление \mathbf{e} является характерным для тензора \hat{Q} .

3°. В случае трехкратного корня ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$)

$$\hat{Q} = \lambda_1 \hat{E} \quad (\text{I.9.15})$$

и главные направления произвольны. Тензор \hat{Q} является изотропным; его называют также шаровым.

В заключение заметим, что определитель произведения двух тензоров равен произведению их определителей; поэтому

$$\det \hat{A} \cdot \hat{B} = \det \hat{A} \det \hat{B} = \det \hat{B} \cdot \hat{A}, \quad (\text{I.9.16})$$

и из (I.9.5) следует, что главные значения тензоров $\hat{A} \cdot \hat{B}$ и $\hat{B} \cdot \hat{A}$ равны.

Рассмотрим еще тензор

$$\hat{Q}' = \hat{A}' \cdot \hat{Q} \cdot \hat{A} = i'_s i_s \cdot q_{ri} i_r i_t \cdot i_m i'_m = q_{sm} i'_s i'_m; \quad (\text{I.9.17})$$

это «повернутый тензор \hat{Q} » — главные значения тензоров \hat{Q} и \hat{Q}' равны, а триэдры главных осей связаны преобразованием поворота.

1.10. Выражение компонент тензора через главные значения. Инварианты. Теорема Кейли — Гамильтона. Совместим «старые» оси с главными направлениями тензора \mathbf{e} и (чтобы не усложнять обозначений) назовем через \mathbf{i}_s единичные векторы новых осей. Тогда по (I.3.6)

$$q_{st} = \lambda_1 \alpha_{s1} \alpha_{t1} + \lambda_2 \alpha_{s2} \alpha_{t2} + \lambda_3 \alpha_{s3} \alpha_{t3} \quad (\text{I. 10.1})$$

— таковы формулы, выражающие компоненты тензора в произвольно направленных осях через его главные значения; в них $\alpha_{sm} = \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{e}^m$ — косинус угла оси \mathbf{i}_s с главным направлением \mathbf{e}^m .

Главные значения симметричного тензора второго ранга являются его инвариантами. Это следует из замечания в п. I.9, что корни полинома $P_3(\lambda)$ не зависят от выбора системы координат, в которой задавалась матрица компонент тензора. Очевидно, что любая функция главных значений тензора $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ является его инвариантом. Наиболее удобны для применения инварианты, являющиеся симметрическими функциями главных значений — корней полинома $P_3(\lambda)$, так как они рационально выражаются через коэффициенты этого полинома, то есть компоненты тензора. Они называются главными инвариантами. Конечно, инварианты тензора не зависят от ориентации триэдра его главных осей — тензоры \hat{Q} и \hat{Q}' имеют одни и те же инварианты.

Развернутая запись полинома $P_3(\lambda)$ имеет вид

$$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2(q_{11} + q_{22} + q_{33}) - \lambda(q_{11}q_{22} + q_{22}q_{33} + q_{33}q_{11} - q_{12}^2 - q_{23}^2 - q_{31}^2) + |q_{st}|. \quad (\text{I. 10.2})$$

Вместе с тем

$$P_3(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad (\text{I. 10.3})$$

и сравнение этих записей позволяет записать следующие выражения главных инвариантов:

$$I_1(\hat{Q}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = q_{11} + q_{22} + q_{33}, \quad (\text{I. 10.4})$$

$$I_2(\hat{Q}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = q_{11}q_{22} - q_{12}^2 + q_{22}q_{33} - q_{23}^2 + q_{33}q_{11} - q_{31}^2 = q(q^{11} + q^{22} + q^{33}), \quad (\text{I. 10.5})$$

$$I_3(\hat{Q}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |q_{st}| = q. \quad (\text{I. 10.6})$$

Отправляясь от диадного представления тензора (I.9.12), можно записать диадное представление \hat{Q}^2 в виде

$$\hat{Q}^2 = \sum_{s=1}^3 \lambda_s^{ss} \cdot \sum_{k=1}^3 \lambda_k^{kk} ee = \sum_{s=1}^3 \sum_{k=1}^3 \lambda_s \lambda_k^{sk} ee \delta_{sk} = \lambda_1^{11} ee + \lambda_2^{22} ee + \lambda_3^{33} ee$$

и вообще

$$\hat{Q}^n = \lambda_1^{n11} ee + \lambda_2^{n22} ee + \lambda_3^{n33} ee. \quad (\text{I. 10.7})$$

Эта формула сохраняет смысл при n целом отрицательном и при нецелых n . Например,

$$\hat{Q}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} {}^{11} ee + \frac{1}{\lambda_2} {}^{22} ee + \frac{1}{\lambda_3} {}^{33} ee \quad (\text{I. 10.8})$$

и при $\lambda_s > 0$

$$\hat{Q}^{1/2} = \sqrt{\lambda_1} {}^{11} ee + \sqrt{\lambda_2} {}^{22} ee + \sqrt{\lambda_3} {}^{33} ee, \quad (\text{I. 10.9})$$

поскольку при таком определении

$$\hat{Q}^{-1} \cdot \hat{Q} = {}^{11} ee + {}^{22} ee + {}^{33} ee = \hat{E}, \quad \hat{Q}^{1/2} \cdot \hat{Q}^{1/2} = \lambda_1 {}^{11} ee + \lambda_2 {}^{22} ee + \lambda_3 {}^{33} ee = \hat{Q},$$

что и требуется.

По (I.6.10) имеем $I_1(\hat{Q}^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, и это позволяет представить $I_2(\hat{Q})$ также в виде

$$I_2(\hat{Q}) = \frac{1}{2} [I_1^2(\hat{Q}) - I_1(\hat{Q}^2)]. \quad (\text{I. 10.10})$$

Используя (I.10.3) и (I.10.7), имеем

$$\hat{Q}^3 = \sum_{s=1}^3 {}^{ss} ee [-P_3(\lambda_s) + I_1(\hat{Q}) \lambda_s^2 - I_2(\hat{Q}) \lambda_s + I_3(\hat{Q})] = \sum_{s=1}^3 \lambda_s^{3ss} ee$$

и, поскольку $P_3(\lambda_s) = 0$,

$$-\hat{Q}^3 + I_1(\hat{Q}) \hat{Q}^2 - I_2(\hat{Q}) \hat{Q} + I_3(\hat{Q}) \hat{E} = 0 \quad (\text{I. 10.11})$$

— тензор удовлетворяет тому же характеристическому уравнению, что и его главные значения. Это — теорема Кейли — Гамильтона, она позволяет выразить любую целую степень тензора Q через \hat{Q}^2 , \hat{Q} , \hat{E} , а его инварианты любой степени — через три главных инварианта. «Отрицательные степени» тензора также выражаются через \hat{Q}^2 , \hat{Q} , \hat{E} . Действительно, по (I.10.11)

$$\hat{Q}^{-1} = \frac{1}{I_3} (\hat{Q}^2 - I_1 \hat{Q} + I_2 \hat{E}), \quad (\text{I. 10.12})$$

$$\hat{Q}^{-2} = \frac{1}{I_3} (\hat{Q} - I_1 \hat{E} + I_2 \hat{Q}^{-1}) = \frac{1}{I_3^2} [(I_2^2 - I_1 I_3) \hat{E} + (I_3 - I_1 I_2) \hat{Q} + I_2 \hat{Q}^2], \quad (\text{I. 10.13})$$

где для краткости принято $I_k = I_k(\hat{Q})$.

Основываясь на этих равенствах, составим выражения инвариантов $I_k(\hat{Q}^{-1})$. Имеем, сославшись на (I. 10.10),

$$I_1(\hat{Q}^{-1}) = \frac{1}{I_3(\hat{Q})} [I_1(\hat{Q}^2) - I_1^2(\hat{Q}) + 3I_2(\hat{Q})] = \frac{I_2(\hat{Q})}{I_3(\hat{Q})}. \quad (\text{I. 10.14})$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_2(\hat{Q}^{-1}) &= \frac{1}{2} [I_1^2(\hat{Q}^{-1}) - I_1(\hat{Q}^{-2})] = \\ &= \frac{1}{2I_3^2} [I_2^2 - 3(I_2^2 - I_1I_3) - (I_3 - I_1I_2)I_1 - I_2(I_1^2 - 2I_2)], \end{aligned}$$

так что

$$I_2(\hat{Q}^{-1}) = \frac{I_1(\hat{Q})}{I_3(\hat{Q})}. \quad (\text{I. 10.15})$$

Наконец, вспомнив известное свойство определителя обратной матрицы, имеем

$$I_3(\hat{Q}^{-1}) = I_3^{-1}(\hat{Q}). \quad (\text{I. 10.16})$$

Теорема Кейли — Гамильтона, доказанная здесь для симметричного тензора второго ранга, имеет место для любой (симметричной или несимметричной) матрицы — матрица удовлетворяет ее характеристическому уравнению.

Симметричный тензор \hat{Q} называется положительным, если образуемая по нему квадратичная форма компонент любого вектора \mathbf{a} — положительная определенная:

$$\mathbf{a} \cdot \hat{Q} \cdot \mathbf{a} = q_{st}a_s a_t \geq 0$$

(знак равенства возможен лишь при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$). Все главные значения λ_s положительного тензора положительны, так как

$$\mathbf{a} \cdot \hat{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \sum_{s=1}^3 \lambda_s \mathbf{e}^s \mathbf{e}^s \cdot \mathbf{a} = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2 \geq 0, \quad \lambda_s > 0$$

(здесь $a_k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^k$ — проекции \mathbf{a} на главные оси). Определение тензора $\hat{Q}^{1/2}$ имеет смысл только для положительных тензоров \hat{Q} . Примером положительного тензора может служить тензор $\hat{P} \cdot \hat{P}^*$, если \hat{P} — невырожденный тензор ($|p_{st}| \neq 0$). Действительно,

$$\mathbf{a} \cdot \hat{P} \cdot \hat{P}^* \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot p_{st} p_{qt} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_q \cdot \mathbf{a} = p_{st} a_s p_{qt} a_q = \sum_t (p_{st} a_s)^2 \geq 0,$$

и равенство нулю возможно только при

$$p_{st} a_s = 0 \quad (t = 1, 2, 3).$$

Но эта однородная система трех уравнений имеет только тривиальное решение ($\alpha_s = 0$), поскольку $|p_{st}| \neq 0$.

Теперь можно доказать, что невырожденный тензор \hat{P} представим в форме произведения тензора поворота слева (или справа) на определяемый по \hat{P} симметричный положительный тензор \hat{H} (или \hat{K}):

$$\hat{P} = \hat{A} \cdot \hat{H} \quad \text{или} \quad \hat{P} = \hat{K} \cdot \hat{B}.$$

Действительно,

$$\hat{P}^* = \hat{H} \cdot \hat{A}^* \quad \text{или} \quad \hat{P}^* = \hat{B}^* \cdot \hat{K},$$

и поэтому

$$\hat{P}^* \cdot \hat{P} = \hat{H} \cdot \hat{A}^* \cdot \hat{A} \cdot \hat{H} = \hat{H}^2 \quad \text{или} \quad \hat{P} \cdot \hat{P}^* = \hat{K} \cdot \hat{B} \cdot \hat{B}^* \cdot \hat{K} = \hat{K}^2.$$

Но по сказанному $\hat{P}^* \cdot \hat{P}$ (равно как $\hat{P} \cdot \hat{P}^*$) — положительный тензор. Поэтому

$$\hat{H} = (\hat{P}^* \cdot \hat{P})^{1/2}, \quad \hat{K} = (\hat{P} \cdot \hat{P}^*)^{1/2}.$$

Итак,

$$\hat{P} = \hat{A} \cdot (\hat{P}^* \cdot \hat{P})^{1/2}, \quad \hat{P} = (\hat{P} \cdot \hat{P}^*)^{1/2} \cdot \hat{B}. \quad (\text{I. 10.17})$$

Из этих представлений следует, что

$$\hat{A} = \hat{P} \cdot (\hat{P}^* \cdot \hat{P})^{-1/2}, \quad \hat{B} = (\hat{P} \cdot \hat{P}^*)^{-1/2} \cdot \hat{P} \quad (\text{I. 10.18})$$

— тензоры поворота; действительно, тензоры $(\hat{P}^* \cdot \hat{P})^{-1/2}$, $(\hat{P} \cdot \hat{P}^*)^{-1/2}$ симметричны, и поэтому

$$\begin{aligned} \hat{A}^* &= (\hat{P}^* \cdot \hat{P})^{-1/2} \cdot \hat{P}^*, \quad \hat{B}^* = \hat{P}^* \cdot (\hat{P} \cdot \hat{P}^*)^{-1/2}, \\ \hat{A}^* \cdot \hat{A} &= (\hat{P}^* \cdot \hat{P})^{-1/2} \cdot \hat{P}^* \cdot \hat{P} \cdot (\hat{P}^* \cdot \hat{P})^{-1/2} = \hat{E}, \quad \hat{A}^* = \hat{A}^{-1}, \\ \hat{B} \cdot \hat{B}^* &= (\hat{P} \cdot \hat{P}^*)^{-1/2} \cdot \hat{P} \cdot \hat{P}^* \cdot (\hat{P} \cdot \hat{P}^*)^{-1/2} = \hat{E}, \quad \hat{B}^{-1} = \hat{B}^*, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

I.10a. Главные оси и главные значения несимметричного тензора. Как и в п. I.9, ограничимся случаем тензора второго ранга. Здесь можно ввести в рассмотрение две системы главных направлений (\mathbf{e} и $\tilde{\mathbf{e}}$) — «правых» и «левых»:

$$\hat{Q} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} \quad \text{или} \quad \tilde{\mathbf{e}} \cdot \hat{Q} = \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{e}}. \quad (\text{I. 10.1a})$$

Скалярные множители λ и $\tilde{\lambda}$ равны друг другу, так как они определяются одним и тем же кубическим уравнением

$$|\hat{Q} - \lambda \hat{E}| = |q_{st} - \lambda \delta_{st}| = 0, \quad |\hat{Q} - \tilde{\lambda} \hat{E}| = |q_{ts} - \tilde{\lambda} \delta_{ts}| = 0.$$

В развернутой записи это уравнение имеет вид

$$-\lambda^3 + I_1(\hat{Q})\lambda^2 - I_2(\hat{Q})\lambda + I_3(\hat{Q}) = 0,$$

причем коэффициенты $I_k(\hat{Q})$ — главные инварианты \hat{Q} — выражаются через компоненты q_{st} по формулам, аналогичным (I. 10.4) — (I. 10.6):

$$I_1(\hat{Q}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = q_{11} + q_{22} + q_{33}, \quad (\text{I. 10.2a})$$

$$I_2(\hat{Q}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = (q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}) + (q_{22}q_{33} - q_{23}q_{32}) + \\ + (q_{33}q_{11} - q_{31}q_{13}) = q(q^{11} + q^{22} + q^{33}) = qI_1(\hat{Q}^{-1}), \quad (\text{I. 10.3a})$$

$$I_3(\hat{Q}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |q_{st}| = q. \quad (\text{I. 10.4a})$$

Вещественный корень этого уравнения обозначается λ_3 , ему соответствует правое главное направление e_3 . Остальные корни λ_1, λ_2 могут быть или вещественными, или комплексными сопряженными: $\lambda_1 = \mu_1 + i\mu_2, \lambda_2 = \mu_1 - i\mu_2$. Остановимся на последнем предположении и назовем через $e_2 + ie_1, e_2 - ie_1$ соответствующие им также комплексные сопряженные векторы e (правые). По определению

$$\hat{Q} \cdot (e_2 \pm ie_1) = (\mu_1 \pm i\mu_2)(e_2 \pm ie_1),$$

так что

$$\hat{Q} \cdot e_2 = \mu_1 e_2 - \mu_2 e_1, \quad \hat{Q} \cdot e_1 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2, \quad \hat{Q} \cdot e_3 = \lambda_3 e_3. \quad (\text{I. 10.5a})$$

Теперь в рассмотрение вводится взаимный (неортогональный) векторный базис

$$e^1 = \frac{1}{g} e_2 \times e_3, \quad e^2 = \frac{1}{g} e_3 \times e_1, \quad e^3 = \frac{1}{g} e_1 \times e_2 \quad (g = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)),$$

так что

$$e^k \cdot e_s = \delta_{ks}. \quad (\text{I. 10.6a})$$

Это позволяет записать диадное (правое) представление \hat{Q} в виде

$$\hat{Q} = \mu_1 (e_1^1 e + e_2^2 e) + \mu_2 (e_2^1 e - e_1^2 e) + \lambda_3 e_3^3 e. \quad (\text{I. 10.7a})$$

Действительно, при этом вследствие (I. 10.6a) выполняются соотношения (I. 10.5a).

Если все корни λ_s вещественны, а e_s — им соответствующие векторы главных направлений, то, определив взаимный базис теми же соотношениями, имеем

$$\hat{Q} = \lambda_1 e_1^1 e + \lambda_2 e_2^2 e + \lambda_3 e_3^3 e. \quad (\text{I. 10.8a})$$

Когда \hat{Q} — симметричный тензор, то e_s — ортонормированный векторный базис, совпадающий со взаимным базисом \tilde{e}_s , — приходим к представлению (I.9.12).

Аналогично вводятся левый базисный и ему взаимный триэдры \tilde{e}_s, \tilde{e}^s главных направлений.

Примеры. 1°. Кососимметричный тензор $\hat{\Omega}$ представляется через сопутствующий вектор ω :

$$\hat{\Omega} = \omega_{st} i_s i_t = \hat{E} \times \omega. \quad (\text{I.10.9a})$$

Поэтому

$$\hat{\Omega} \cdot e = (\hat{E} \times \omega) \cdot e = \omega \times e = \lambda e,$$

и этому соотношению можно удовлетворить, полагая

$$\lambda_3 = 0, \quad e_3 = \frac{\omega}{\omega} \quad (|\dot{e}_3| = 1).$$

Характеристическое уравнение тензора $\hat{\Omega}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & -\lambda & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda\omega^2 = 0 \quad (\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)$$

кроме нулевого имеет два чисто мнимых корня $\pm i\omega$. Через $e_2 \pm ie_1$ обозначаются им соответствующие векторы e , так что

$$\omega \times (e_2 \pm ie_1) = \omega e_3 \times (e_2 \pm ie_1) = \pm i\omega (e_2 \pm ie_1),$$

$$e_1 = e_2 \times e_3, \quad e_2 = e_3 \times e_1.$$

Векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортогональный базис; можно принять, что e_1, e_2 — единичные векторы, они определены с точностью до поворота вокруг e_3 . В таких ортонормированных базисах тензор Ω представляется его диадным разложением

$$\hat{\Omega} = \omega (e_2 e_1 - e_1 e_2). \quad (\text{I.10.10a})$$

Действительно, при этом

$$\hat{\Omega} \cdot (e_2 \pm ie_1) = \omega (e_2 e_1 - e_1 e_2) \cdot (e_2 \pm ie_1) = \pm i\omega (e_2 \pm ie_1),$$

что и требуется.

2°. Тензор поворота $\hat{A} = \alpha_{st} i_s i_t$. Учитывая известные соотношения

$$|\alpha_{st}| = 1, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32} \quad \text{и т. д.},$$

можно записать его характеристическое уравнение в виде

$$-\lambda^3 + \lambda(\lambda - 1)(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) + 1 = 0.$$

Один из корней $\lambda_3 = 1$, а два других представимы в виде $\lambda_1 = e^{-i\omega}$, $\lambda_2 = e^{i\omega}$, причем

$$2 \cos \omega = 1 + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 1 + I_1(\hat{A}). \quad (\text{I. 10.11a})$$

Разыскиваются левые главные направления (правые направления тензора \hat{A}^*). Корню $\lambda_3 = 1$ соответствует направление единичного вектора e_3 , остающееся неизменным при преобразовании поворота, — ось поворота

$$e_3 \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot e_3 = \lambda_3 e_3 = e_3.$$

Векторы $e_1 \pm ie_2$, соответствующие корням λ_1, λ_2 , определяются соотношениями

$$(e_1 \pm ie_2) \cdot \hat{A} = e^{\mp i\omega} (e_1 \pm ie_2), \quad \hat{A}^* \cdot (e_1 \pm ie_2) = e^{\mp i\omega} (e_1 \pm ie_2),$$

так что, поскольку $\hat{A} \cdot \hat{A}^* = \hat{E}$,

$$(e_1 \pm ie_2) \cdot (e_1 \pm ie_2) (1 - e^{\mp 2i\omega}) = 0.$$

Точно так же

$$e_3 \cdot \hat{A} \cdot \hat{A}^* \cdot (e_1 \pm ie_2) = e_3 \cdot (e_1 \pm ie_2) = e_3 \cdot e^{\mp i\omega} (e_1 \pm ie_2),$$

так что, исключая случай $e^{\mp i\omega} = 1$, получаем

$$e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_3 = 0, \quad e_2 \cdot e_3 = 0,$$

причем $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2$. Квадрат модуля векторов $e_1 \pm ie_2$ примем равным 2:

$$(e_1 + ie_2) \cdot (e_1 - ie_2) = e_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2 = 2e_1 \cdot e_1 = 2e_2 \cdot e_2 = 2.$$

Тогда векторы e_1, e_2 будут единичными, а вектор $e_1 + ie_2$ определен с точностью до множителя $e^{i\lambda}$. Итак, векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортонормированный триэдр, причем e_1, e_2 определены с точностью до поворота вокруг e_3 .

Тензор поворота теперь представляется в виде

$$\hat{A} = e_3 e_3 + \frac{1}{2} [(e_1 - ie_2)(e_1 + ie_2)e^{-i\omega} + (e_1 + ie_2)(e_1 - ie_2)e^{i\omega}]. \quad (\text{I. 10.12a})$$

Действительно, при этом выполняются требуемые соотношения

$$e_3 \cdot \hat{A} = e_3, \quad (e_1 \pm ie_2) \cdot \hat{A} = e^{\mp i\omega} (e_1 \pm ie_2).$$

Другая запись формулы (I. 10.8a), повторяющая (I. 8.8), имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{A} &= e_3 e_3 + (e_1 e_1 + e_2 e_2) \cos \omega + (e_1 e_2 - e_2 e_1) \sin \omega = \\ &= \hat{E} \cos \omega + e_3 e_3 (1 - \cos \omega) - e_3 \times \hat{E} \sin \omega. \end{aligned} \quad (\text{I. 10.13a})$$

В этой инвариантной записи тензора поворота \hat{A} вектором e_3 задается ось поворота, ω — угол поворота вокруг нее. В последнем можно убедиться, заметив, что

$$e_1' = e_1 \cdot \hat{A} = e_1 \cos \omega + e_2 \sin \omega, \quad e_2' = e_2 \cdot \hat{A} = -e_1 \sin \omega + e_2 \cos \omega,$$

то есть повернутые векторы e_1' , e_2' образованы поворотом векторов e_1 , e_2 вокруг e_3 на угол ω в положительную сторону.

Отметим также представления диад главных направлений симметричного тензора. Они следуют из соотношений (q_s — главные значения \hat{Q})

$$\begin{aligned} e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3 &= \hat{E}, \\ q_1 e_1 e_1 + q_2 e_2 e_2 + q_3 e_3 e_3 &= \hat{Q}, \\ q_1^2 e_1 e_1 + q_2^2 e_2 e_2 + q_3^2 e_3 e_3 &= \hat{Q}^2. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} e_1 e_1 &= \frac{\hat{E} q_2 q_3 - \hat{Q} (q_2 + q_3) + \hat{Q}^2}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)} = \frac{(\hat{Q} - \hat{E} q_2) \cdot (\hat{Q} - \hat{E} q_3)}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)}, \\ e_2 e_2 &= \frac{\hat{E} q_3 q_1 - \hat{Q} (q_3 + q_1) + \hat{Q}^2}{(q_2 - q_3)(q_2 - q_1)} = \frac{(\hat{Q} - \hat{E} q_3) \cdot (\hat{Q} - \hat{E} q_1)}{(q_2 - q_3)(q_2 - q_1)}, \quad (\text{I. 10.14a}) \\ e_3 e_3 &= \frac{\hat{E} q_1 q_2 - \hat{Q} (q_1 + q_2) + \hat{Q}^2}{(q_3 - q_1)(q_3 - q_2)} = \frac{(\hat{Q} - \hat{E} q_1) \cdot (\hat{Q} - \hat{E} q_2)}{(q_3 - q_1)(q_3 - q_2)}. \end{aligned}$$

Теперь легко получить выражения квадратов косинусов углов $e_k^s = e \cdot i_k$ главных направлений с осями координат и их попарных произведений. Например,

$$\begin{aligned} (e_s^1)^2 &= \frac{q_2 q_3 - q_{ss} (q_2 + q_3) + q_{st} q_{ts}}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)} \quad (s = 1, 2, 3), \\ e_s^1 e_k^1 &= \frac{q_{st} q_{tk} - q_{sk} (q_2 + q_3)}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)}. \end{aligned}$$

I. 11. Разбиение симметричного тензора второго ранга на девиатор и шаровой тензор. Изотропный тензор $\frac{1}{3} I_1(\hat{Q}) \hat{E}$ называется шаровой частью тензора \hat{Q} ; выделяя из тензора \hat{Q} его шаровую часть, приходим к тензору, называемому девиатором тензора \hat{Q} и обозначаемому $\text{Dev } \hat{Q}$:

$$\hat{Q} = \frac{1}{3} I_1(\hat{Q}) \hat{E} + \text{Dev } \hat{Q}, \quad \text{Dev } \hat{Q} = \hat{Q} - \frac{1}{3} I_1(\hat{Q}) \hat{E}. \quad (\text{I. 11.1})$$

Характеристическое уравнение девиатора по (I. 9.5) записывается в виде

$$\left| q_{st} - \delta_{st} \left[\kappa + \frac{1}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \right] \right| = 0, \quad (\text{I. 11.2})$$

откуда следует, что главные значения девиатора равны

$$\kappa_s = \lambda_s - \frac{1}{3} I_1(\hat{Q}),$$

или

$$\kappa_1 = \frac{1}{3} (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3), \quad \kappa_2 = \frac{1}{3} (2\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_1), \quad \kappa_3 = \frac{1}{3} (2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2). \quad (\text{I. 11.3})$$

Его главные направления совпадают с главными направлениями тензора. Действительно, из равенства

$$\hat{Q} \cdot e = \lambda e = \frac{1}{3} I_1(\hat{Q}) e + (\text{Dev } \hat{Q}) \cdot e$$

следует

$$(\text{Dev } \hat{Q}) \cdot e = \left[\lambda - \frac{1}{3} I_1(\hat{Q}) \right] e = \kappa e, \quad (\text{I. 11.4})$$

то есть вектор e , определяемый уравнениями (I.9.1), удовлетворяет также уравнениям (I.11.4).

Инварианты девиатора. Из формул (I.11.3), (I.10.4), (I.10.5) имеем

$$I_1(\text{Dev } \hat{Q}) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0, \quad (\text{I. 11.5})$$

$$I_2(\text{Dev } \hat{Q}) = \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_3 \kappa_1 = I_2(\hat{Q}) - \frac{1}{3} I_1^2(\hat{Q}), \quad (\text{I. 11.6})$$

$$I_3(\text{Dev } \hat{Q}) = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = I_3(\hat{Q}) - \frac{1}{3} I_1(\hat{Q}) I_2(\hat{Q}) + \frac{2}{27} I_1^3(\hat{Q}). \quad (\text{I. 11.7})$$

Легко проверить, обратившись к (I.11.5) и (I.11.6), что выражение второго инварианта девиатора может быть записано также в виде

$$I_2(\text{Dev } \hat{Q}) = -\frac{1}{6} [(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2]. \quad (\text{I. 11.8})$$

Еще одно выражение второго инварианта девиатора можно получить, заменив в (I.10.10) \hat{Q} на $\text{Dev } \hat{Q}$ и учтя (I.11.5):

$$I_2(\text{Dev } \hat{Q}) = -\frac{1}{2} I_1[(\text{Dev } \hat{Q})^2]. \quad (\text{I. 11.9})$$

Заметим, что $I_2(\text{Dev } \hat{Q}) < 0$. Ниже потребуются еще выражение первого инварианта степеней девиатора до четвертой включительно через его второй и третий инварианты. Для их вычисления обратимся к уравнению, выражающему теорему Кейли — Гамильтона (I.10.11) для девиатора. Имеем

$$\left. \begin{aligned} (\text{Dev } \hat{Q})^3 &= -I_2(\text{Dev } \hat{Q}) \text{Dev } \hat{Q} + I_3(\text{Dev } \hat{Q}) \hat{E}, \\ (\text{Dev } \hat{Q})^4 &= -I_2(\text{Dev } \hat{Q}) (\text{Dev } \hat{Q})^2 + I_3(\text{Dev } \hat{Q}) \text{Dev } \hat{Q} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 11.10})$$

и т. д. Отсюда, сославшись на (I. 11.5), (I. 11.9), легко найдем

$$I_1[(\text{Dev } \hat{Q})^3] = 3I_3(\text{Dev } \hat{Q}), \quad I_1[(\text{Dev } \hat{Q})^4] = 2I_2^2(\text{Dev } \hat{Q}). \quad (\text{I. 11.11})$$

Характеристическое уравнение девиатора, сославшись на (I. 11.5), (I. 10.3), можно записать в виде

$$\kappa^3 + I_2(\text{Dev } \hat{Q})\kappa = I_3(\text{Dev } \hat{Q}). \quad (\text{I. 11.12})$$

Это кубическое уравнение, не содержащее квадрата неизвестного и имеющее только вещественные корни; его решение поэтому можно представить в тригонометрической форме, положив

$$\kappa = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-I_2(\text{Dev } \hat{Q})} \sin \psi = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \psi, \quad (\text{I. 11.13})$$

где для краткости принято

$$\Gamma^2 = -I_2(\text{Dev } \hat{Q}). \quad (\text{I. 11.14})$$

Подстановка в (I. 11.12) дает

$$\kappa^3 + I_2(\text{Dev } \hat{Q})\kappa = \frac{2\Gamma^3}{3\sqrt{3}} (4\sin^3 \psi - 3\sin \psi) = -\frac{2\Gamma^3}{3\sqrt{3}} \sin 3\psi,$$

так что

$$I_3(\text{Dev } \hat{Q}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \Gamma^3 \sin 3\psi. \quad (\text{I. 11.15})$$

Отсюда определяются три значения κ и соответствующие им главные значения девиатора:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \psi, \quad \kappa_2 = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \left(\psi + \frac{2\pi}{3} \right), \\ \kappa_3 &= \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \left(\psi + \frac{4\pi}{3} \right) \quad \left(|\psi| < \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 11.16})$$

Величины Γ и ψ , выражающиеся через главные инварианты девиатора, также являются его инвариантами. В некоторых вопросах применение инвариантов $I_1(\hat{Q})$, Γ , ψ следует предпочесть главным инвариантам тензора \hat{Q} .

Формулы (I. 11.9)—(I. 11.11) теперь переписываются в виде

$$I_1[(\text{Dev } \hat{Q})^2] = 2\Gamma^2, \quad I_1[(\text{Dev } \hat{Q})^3] = -\frac{2\Gamma^3}{\sqrt{3}} \sin 3\psi, \quad I_1[(\text{Dev } \hat{Q})^4] = 2\Gamma^4. \quad (\text{I. 11.17})$$

I. 12. Функции тензоров. 1°. Скаляр. Функция $f(\hat{Q})$, удовлетворяющая условию

$$f(\hat{Q}) = f(\hat{A}^* \cdot \hat{Q} \cdot \hat{A}) = f(\hat{Q}), \quad (\text{I. 12.1})$$

называется инвариантным скаляром*). Соотношение (I.12.1) выражает, что не только численное значение, но и форма зависимости $f(\hat{Q})$ от компонент тензора \hat{Q} одинаковы во всех системах осей, связанных преобразованием поворота. Инвариантным скаляром является функция от инвариантов тензора, в частности его главных инвариантов:

$$f(\hat{Q}) = f(I_1(\hat{Q}), I_2(\hat{Q}), I_3(\hat{Q})). \quad (\text{I. 12.2})$$

Термин «инвариантный скаляр» далее применяется в этом (ограниченном) смысле.

2°. Тензорная функция над тензором \hat{Q} . Предполагаются заданными n^2 функций $p_{sh} = f_{sh}(q_{mn})$, причем q_{mn} — компоненты тензора, и известно, что элементы матрицы $\|f_{sh}\|$ также подчинены закону преобразования (I.3.6) компонент тензора. Этим определяется тензорная функция $\hat{P} = \hat{F}(\hat{Q})$ над тензором \hat{Q} .

Тензорной функцией является тензорный степенной ряд

$$\hat{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \hat{Q}^k \quad (\hat{Q}^0 = \hat{E}), \quad (\text{I. 12.3})$$

в котором α_k — инвариантные скаляры. Теорема Кейли — Гамильтона**) позволяет степени \hat{Q} выше второй заменить через \hat{Q}^0 , \hat{Q}^1 , \hat{Q}^2 . Поэтому тензорная функция, о которой известно, что она представима степенным рядом, может быть определена квадратичным трехчленом

$$\hat{P} = A\hat{E} + B\hat{Q} + C\hat{Q}^2, \quad (\text{I. 12.4})$$

где A, B, C — инвариантные скаляры.

Примерами тензорной функции, не представимой степенным рядом, может служить $\hat{P} = \hat{Q}^*$.

Тензор \hat{P} представляет изотропную функцию над тензором \hat{Q} при выполнении равенства

$$\hat{P} = \hat{F}(\hat{Q}) \text{ или } \hat{A}^* \cdot \hat{P} \cdot \hat{A} = \hat{F}(\hat{A}^* \cdot \hat{Q} \cdot \hat{A}). \quad (\text{I. 12.5})$$

Это значит, что в системах осей i_s, i'_s , связанных преобразованием поворота, сохраняется форма зависимости \hat{P} над \hat{Q} , причем численные значения тензоров \hat{P} и \hat{P}^1 (первого в осях i_s , второго в i'_s) равны друг другу. Не следует смешивать термины

*) В наименовании содержится тавтология. Скаляр — инвариант по определению.

**) Ниже эта теорема доказывается и для несимметричного тензора второго ранга.

«изотропная тензорная функция» и «изотропный тензор» — компоненты последнего одинаковы во всех системах осей (п. I.6).

Может быть доказана теорема: симметричная тензорная функция ($\hat{P} = \hat{P}^*$) над симметричным тензором \hat{Q} изотропна тогда и только тогда, когда она представима в форме (I.12.4), причем A, B, C представляют скалярные инварианты вида (I.12.2).

Симметричные тензоры \hat{P} и \hat{Q} в соотношении (I.12.4) соосны.

3°. Градиент скаляра по тензору. Пусть $f(q_{11}, \dots, q_{31}) = f(q_{st})$ — функция компонент тензора \hat{Q} , заданных в осях i_s . Элементы матрицы $\left\| \frac{\partial f}{\partial q_{st}} \right\|$ преобразуются при задании компонент \hat{Q} в новых осях по правилу (I.3.7); действительно,

$$\frac{\partial f}{\partial q'_{mn}} = \frac{\partial f}{\partial q_{st}} \frac{\partial q_{st}}{\partial q'_{mn}} = \alpha_{ms} \alpha_{nt} \frac{\partial f}{\partial q_{st}},$$

что и требуется. Поэтому величина, обозначаемая

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{Q}} = \hat{F}(\hat{Q}) = \frac{\partial f}{\partial q_{st}} i_s i_t, \quad (\text{I.12.6})$$

представляет тензор второго ранга — градиент функции f по \hat{Q} .

Из этого определения следует соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{Q}} \cdot \delta \hat{Q}^* = \frac{\partial f}{\partial q_{st}} i_s i_t \cdot i_m i_n \delta q_{nm} = \frac{\partial f}{\partial q_{st}} \delta q_{st} = \delta f. \quad (\text{I.12.7})$$

Пусть f — инвариантный скаляр; тогда в соответствии с определением (I.12.1) $f(\hat{Q}) = f(\hat{Q})$, $q_{st} = \hat{q}_{st}$ и по (I.12.3)

$$\hat{F}(\hat{Q}) = \hat{F}(\hat{A}^* \cdot \hat{Q} \cdot \hat{A}) = \frac{\partial f}{\partial q_{st}} i'_s i'_t = \hat{A}^* \cdot i_s \frac{\partial f}{\partial q_{st}} i_t \cdot \hat{A} = \hat{A}^* \cdot \hat{F}(\hat{Q}) \cdot \hat{A},$$

так что в этом предположении $\hat{F}(\hat{Q})$ — изотропная функция тензора \hat{Q} .

4°. Производные главных инвариантов тензора по тензору. Сославшись на (I.7.9), (I.12.6), имеем

$$\frac{\partial I_3(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} = I_3(\hat{Q}) (\hat{Q}^*)^{-1}. \quad (\text{I.12.8})$$

Вместе с тем

$$I_3(\hat{Q} - \lambda \hat{E}) = |\hat{Q} - \lambda \hat{E}| = -\lambda^3 + \lambda^2 I_1(\hat{Q}) - \lambda I_2(\hat{Q}) + I_3(\hat{Q}) \quad (\text{I.12.9})$$

и по (I.12.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{Q}} I_3(\hat{Q} - \lambda \hat{E}) &= I_3(\hat{Q} - \lambda \hat{E}) [(\hat{Q} - \lambda \hat{E})^*]^{-1} = \\ &= \lambda^2 \frac{\partial I_1(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} - \lambda \frac{\partial I_2(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} + I_3(\hat{Q}) (\hat{Q}^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\hat{E}I_3(\hat{Q} - \lambda\hat{E}) = (\hat{Q} - \lambda\hat{E})^* \cdot \left[\lambda^2 \frac{\partial I_1(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} - \lambda \frac{\partial I_2(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} + I_3(\hat{Q})(\hat{Q}^*)^{-1} \right].$$

Заменив теперь левую часть ее выражением (I. 12.9) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим выражения тензорных функций

$$\frac{\partial I_1(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} = \hat{E}, \quad \frac{\partial I_2(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} = \hat{E}I_1(\hat{Q}) - \hat{Q}^* \quad (\text{I. 12.10})$$

и соотношение

$$\hat{Q}^* \cdot \frac{\partial I_2(\hat{Q})}{\partial \hat{Q}} + I_3(\hat{Q})(\hat{Q}^*)^{-1} = \hat{E}I_2(\hat{Q}).$$

Оно по (I. 12.10) преобразуется к виду

$$-\hat{Q}^{*2} + \hat{Q}^*I_1(\hat{Q}) - \hat{E}I_2(\hat{Q}) + I_3(\hat{Q})(\hat{Q}^*)^{-1} = 0, \quad (\text{I. 12.11})$$

определяющему одну из форм записи теоремы Кейли — Гамильтона (I. 10.11). Действительно, имея в виду, что $I_k(\hat{Q}^*) = I_k(\hat{Q})$, можно представить (I. 12.11) после умножения на \hat{Q}^* в виде (I. 10.11).

5°. Градиент инвариантного скаляра. Выражение этой величины непосредственно следует из формул (I. 12.8), (I. 12.10):

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{Q}} = \left(\frac{\partial f}{\partial I_1} + I_1(\hat{Q}) \frac{\partial f}{\partial I_2} \right) \hat{E} - \frac{\partial f}{\partial I_2} \hat{Q} + \frac{\partial f}{\partial I_3} I_3(\hat{Q}) \hat{Q}^{-1} \quad (\hat{Q} = \hat{Q}^*). \quad (\text{I. 12.12})$$

Заменив здесь \hat{Q}^{-1} значением (I. 10.12), придем к другой форме записи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \hat{Q}} = & \left[\frac{\partial f}{\partial I_1} + I_1(\hat{Q}) \frac{\partial f}{\partial I_2} + I_2(\hat{Q}) \frac{\partial f}{\partial I_3} \right] \hat{E} - \\ & - \left(\frac{\partial f}{\partial I_2} + I_1(\hat{Q}) \frac{\partial f}{\partial I_3} \right) \hat{Q} + \frac{\partial f}{\partial I_3} \hat{Q}^2. \end{aligned} \quad (\text{I. 12.13})$$

Здесь изотропная тензорная функция, образованная с помощью инвариантного скаляра $f(\hat{Q})$, представлена в виде квадратичного полинома (или в эквивалентном виде (I. 12.12)) над тензором $\hat{Q} = \hat{Q}^*$ с коэффициентами, являющимися инвариантными скалярами. Это — частный случай представления (I. 12.4) изотропной тензорной функции $\hat{P} = f(\hat{Q})$.

З а м е ч а н и е. Соотношением (I. 12.4), конечно, не исчерпывается многообразие соотношений между двумя симметричными тензорами. В выражение инвариантной связи между ними

$$\hat{P} = \hat{F}(\hat{Q}, I_s(\hat{Q}), I_k(\hat{P}), \hat{R}, \hat{S}, \dots)$$

могут входить некоторые тензоры \hat{R} , \hat{S} , с помощью которых может быть из тензора \hat{Q} сконструирован симметричный тензор \hat{P} . Примером может служить соотношение

$$\hat{P} = {}^{(4)}\hat{R} \cdot \hat{Q}, \quad p_{st} = r_{stmn} q_{mn}, \quad (\text{I.12.14})$$

в котором тензор \hat{P} получен двойным свертыванием тензора шестого ранга ${}^{(4)}\hat{R}\hat{Q}$. Компоненты тензора ${}^{(4)}\hat{R}$ должны быть при этом симметричны относительно индексов в каждой паре st , mn , что уменьшает их число от 81 до 36. Такова, в частности, связь тензоров напряжения и деформации в упругом анизотропном теле (тогда число независимых компонент ${}^{(4)}\hat{R}$ уменьшается до 21).

I.13. Выделение шаровой и девиаторной частей. Возвращаясь к общему представлению изотропной тензорной функции (I.12.4), выделим в нем шаровую и девиаторную части тензора \hat{P}

$$I_1(\hat{P}) = 3A + BI_1(\hat{Q}) + CI_1(\hat{Q}^2), \quad (\text{I.13.1})$$

$$\text{Dev } \hat{P} = \hat{P} - \frac{1}{3} \hat{E} I_1(\hat{P}) = B \text{Dev } \hat{Q} + C \text{Dev } \hat{Q}^2. \quad (\text{I.13.2})$$

Вместе с тем по (I.10.10) и (I.11.6)

$$I_1(\hat{Q}^2) = I_1^2(\hat{Q}) - 2I_2(\hat{Q}) = \frac{1}{3} I_1^2(\hat{Q}) - 2I_2(\text{Dev } \hat{Q}),$$

$$\hat{Q}^2 = \left[\text{Dev } \hat{Q} + \frac{1}{3} \hat{E} I_1(\hat{Q}) \right]^2 = (\text{Dev } \hat{Q})^2 + \frac{2}{3} I_1(\hat{Q}) \text{Dev } \hat{Q} + \frac{1}{9} \hat{E} I_1^2(\hat{Q}),$$

так что

$$\text{Dev } \hat{Q}^2 = \hat{Q}^2 - \frac{1}{3} \hat{E} I_1(\hat{Q}^2) = (\text{Dev } \hat{Q})^2 + \frac{2}{3} I_1(\hat{Q}) \text{Dev } \hat{Q} + \frac{2}{3} I_2(\text{Dev } \hat{Q}) \hat{E},$$

и подстановка в (I.13.1) приводит к соотношениям

$$I_1(\hat{P}) = 3A + BI_1(\hat{Q}) + C \left[\frac{1}{3} I_1^2(\hat{Q}) + 2I_2 \right], \quad (\text{I.13.3})$$

$$\text{Dev } \hat{P} = \left[B + \frac{2}{3} CI_1(\hat{Q}) \right] \text{Dev } \hat{Q} + C \left[(\text{Dev } \hat{Q})^2 - \frac{2}{3} \hat{E} I_2 \right]. \quad (\text{I.13.4})$$

Введя теперь новые обозначения

$$I_1(\hat{P}) = 3kI_1(\hat{Q}), \quad \alpha = B + \frac{2}{3} CI_1(\hat{Q}), \quad \beta = C, \quad (\text{I.13.5})$$

можно представить общую форму зависимости между двумя соосными тензорами в виде

$$\hat{P} = kI_1(\hat{Q}) \hat{E} + \alpha \text{Dev } \hat{Q} + \beta \left[(\text{Dev } \hat{Q})^2 - \frac{2}{3} \hat{E} I_2 \right], \quad (\text{I.13.6})$$

причем

$$\text{Dev } \hat{P} = \alpha \text{Dev } \hat{Q} + \beta \left[(\text{Dev } \hat{Q})^2 - \frac{2}{3} \hat{E} I_2 \right]. \quad (\text{I.13.7})$$

Постоянные α и β можно связать с инвариантами $\text{Dev } \hat{P}$. Для вычисления его второго инварианта используется первая формула (I. 11.17) в виде

$$2\tau^2 = I_1 [(\text{Dev } \hat{P})^2],$$

где обозначено

$$\tau^2 = -I_2 (\text{Dev } \hat{P}). \quad (\text{I. 13.8})$$

Имеем

$$(\text{Dev } \hat{P})^2 = \alpha^2 (\text{Dev } \hat{Q})^2 + 2\alpha\beta \left[(\text{Dev } \hat{Q})^3 - \frac{2}{3} \Gamma^2 \text{Dev } \hat{Q} \right] + \beta^2 \left[(\text{Dev } \hat{Q})^4 - \frac{4}{3} \Gamma^2 (\text{Dev } \hat{Q})^2 + \frac{4}{9} \hat{E} \Gamma^4 \right]$$

и, сославшись снова на (I. 11.17), после простого вычисления найдем

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{1}{2} I_1 [(\text{Dev } \hat{P})^2] = \Gamma^2 \left(\alpha^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \alpha\beta\Gamma \sin 3\psi + \Gamma^2 \frac{\beta^2}{3} \right) = \\ &= \Gamma^2 \left[\left(\alpha - \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \beta \sin 3\psi \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}} \Gamma \cos 3\psi \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

При обозначении

$$\mu = \frac{\tau}{\Gamma} = \sqrt{\frac{I_2 (\text{Dev } \hat{P})}{I_2 (\text{Dev } \hat{Q})}}, \quad (\text{I. 13.9})$$

получаем

$$\mu^2 = \left(\alpha - \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \beta \sin 3\psi \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}} \Gamma \cos 3\psi \right)^2.$$

Мы удовлетворим этому соотношению, положив

$$\mu \cos \omega = \alpha - \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \beta \sin 3\psi, \quad \mu \sin \omega = -\frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \beta \cos 3\psi,$$

или

$$\alpha = \mu \frac{\cos(\omega + 3\psi)}{\cos 3\psi}, \quad \beta = -\frac{\sqrt{3}}{\Gamma} \mu \frac{\sin \omega}{\cos 3\psi}. \quad (\text{I. 13.10})$$

Теперь формула (I. 13.7) записывается в виде

$$\text{Dev } \hat{P} = \frac{\mu}{\cos 3\psi} \left\{ \cos(\omega + 3\psi) \text{Dev } \hat{Q} - \frac{\sqrt{3}}{\Gamma} \sin \omega \left[(\text{Dev } \hat{Q})^2 - \frac{2}{3} \hat{E} \Gamma^2 \right] \right\}, \quad (\text{I. 13.11})$$

причем введенный в рассмотрение вспомогательный угол ω может быть выражен через главные значения $\text{Dev } \hat{P}$; следуя (I. 11.16), представим их в виде

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{2\tau}{\sqrt{3}} \sin \chi, & v_2 &= \frac{2\tau}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi + \frac{2\pi}{3} \right), \\ v_3 &= \frac{2\tau}{\sqrt{3}} \sin \left(\chi + \frac{4\pi}{3} \right) & (|\chi| < \frac{\pi}{6}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 13.12})$$

Соотношение, связывающее главные значения тензора $\text{Dev } \hat{P}$ и $\text{Dev } \hat{Q}$, в соответствии с (I.3.11) можно записать в виде

$$\nu = \frac{\mu}{\cos 3\psi} \left[\cos(\omega + 3\psi) \kappa - \frac{\sqrt{3}}{\Gamma} \sin \omega \left(\kappa^2 - \frac{2}{3} \Gamma^2 \right) \right].$$

Заменив здесь ν и κ их значениями [см. (I.13.12), (I.11.16)] и учитывая (I.13.9), получим

$$\begin{aligned} \sin \chi &= \frac{1}{\cos 3\psi} [\cos(\omega + 3\psi) \sin \psi - \sin \omega (2 \sin^2 \psi - 1)] = \\ &= \cos \omega \sin \psi + \frac{\sin \omega}{\cos 3\psi} (\cos 2\psi - \sin 3\psi \sin \psi) = \cos \omega \sin \psi + \sin \omega \cos \psi. \end{aligned}$$

Итак, величина ω определяется равенством

$$\sin \chi = \sin(\omega + \psi), \quad \omega = \chi - \psi. \quad (\text{I.13.13})$$

При $\omega = 0$, $\chi = \psi$ отношения главных значений девиаторов тензоров \hat{P} и \hat{Q} равны друг другу:

$$\frac{\nu_1}{\kappa_1} = \frac{\nu_2}{\kappa_2} = \frac{\nu_3}{\kappa_3} = \frac{\tau}{\Gamma} = \mu; \quad (\text{I.13.14})$$

такие соосные тензоры называются подобными. Это дает основание назвать ω углом подобия девиаторов. Соосные девиаторы подобны при $\omega = 0$, отличие ω от нуля определяет степень их «неподобия».

Итак, формула (I.13.6) связи между двумя соосными тензорами приведена к виду

$$\begin{aligned} \hat{P} &= k I_1(\hat{Q}) \hat{E} + \frac{\mu}{\cos 3\psi} \left\{ \cos(\omega + 3\psi) \text{Dev } \hat{Q} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{3}}{\Gamma} \sin \omega \left[(\text{Dev } \hat{Q})^2 - \frac{2}{3} \hat{E} \Gamma^2 \right] \right\}. \quad (\text{I.13.15}) \end{aligned}$$

В задание тензора \hat{P} входят три величины — это определяемые формулами (I.13.5) и (I.13.9) модули k и μ и фаза подобия девиаторов ω . Их следует рассматривать как функции трех инвариантных характеристик тензора \hat{Q} — его первого инварианта $I_1(\hat{Q})$ и величин Γ и ψ , определяемых по второму и третьему инвариантам $\text{Dev } \hat{Q}$ с помощью формул (I.11.14) и (I.11.15).

Совершенно очевидно, что при перестановке \hat{P} и \hat{Q} местами следует заменить Γ на τ , ψ на χ , а k и μ соответственно на

$$k_1 = \frac{1}{3} \frac{I_1(\hat{Q})}{I_1(\hat{P})} = \frac{1}{9k}, \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{I_2(\text{Dev } \hat{Q})}{I_2(\text{Dev } \hat{P})}} = \frac{1}{\mu}. \quad (\text{I.13.16})$$

Этим решается задача обращения соотношения (I.13.15):

$$\hat{Q} = \frac{1}{9k} I_1(\hat{P}) \hat{E} + \frac{1}{\mu \cos 3\chi} \left\{ \cos(3\chi - \omega) \text{Dev } \hat{P} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{\tau} \sin \omega \left[(\text{Dev } \hat{P})^2 - \frac{2}{3} \hat{E} \tau^2 \right] \right\}.$$

Предложенное В. В. Новожиловым преобразование исходного соотношения (I.12.4) между двумя соосными тензорами к форме (I.13.15) позволило выразить исходные коэффициенты A , B , C через величины, поддающиеся интерпретации в терминах механики сплошной среды. Решение задачи обращения становится при этом прозрачно простым. Можно, конечно, предложить и ее прямое решение; для этого достаточно, записав выражение тензора \hat{Q} через \hat{P} в виде

$$\hat{Q} = A_1 \hat{E} + B_1 \hat{P} + C_1 \hat{P}^2, \quad (\text{I.13.17})$$

подставить в него выражение (I.12.4) тензора \hat{P} , заменив при этом \hat{Q}^3 , \hat{Q}^4 с помощью теоремы Кейли — Гамильтона через \hat{E} , \hat{Q} , \hat{Q}^2 . Придем к трем линейным уравнениям, которые позволят выразить неизвестные A_1 , B_1 , C_1 через A , B , C и главные инварианты $I_k(\hat{Q})$. Соотношения оказываются громоздкими; они несколько упрощаются, если выделить из \hat{P} его шаровую часть, $\text{Dev } \hat{P}$ представить в форме (I.13.7), а решение задачи обращения разыскивать в этой же форме:

$$\text{Dev } \hat{Q} = \alpha_1 \text{Dev } \hat{P} + \beta_1 \left[(\text{Dev } \hat{P})^2 + \frac{2}{3} \hat{E} I_2(\text{Dev } \hat{P}) \right]. \quad (\text{I.13.18})$$

Здесь по (I.13.1), (I.13.5)

$$\left. \begin{aligned} I_1(\hat{Q}) &= 3A_1 + B_1 I_1(\hat{P}) + C_1 \left[\frac{1}{3} I_1^2(\hat{P}) - 2I_2(\text{Dev } \hat{P}) \right], \\ \alpha_1 &= B_1 + \frac{2}{3} C_1 I_1(\hat{P}), \quad \beta_1 = C_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.13.19})$$

Для определения α_1 и β_1 подставим в правую часть (I.13.18) выражение (I.13.7). Получающееся равенство может быть при использовании теоремы Кейли — Гамильтона записано в виде

$$\text{Dev } \hat{Q} = \alpha_1 \left\{ \alpha \text{Dev } \hat{Q} + \beta \left[(\text{Dev } \hat{Q})^2 + \frac{2}{3} \hat{E} I_2(\text{Dev } \hat{Q}) \right] \right\} + \\ + \beta_1 \left\{ \alpha^2 \left[(\text{Dev } \hat{Q})^2 + \frac{2}{3} \hat{E} I_2(\text{Dev } \hat{Q}) \right] - \frac{2}{3} \alpha \beta \text{Dev } \hat{Q} I_2(\text{Dev } \hat{Q}) + \right. \\ \left. + \beta^2 \left[\text{Dev } \hat{Q} I_3(\text{Dev } \hat{Q}) + \frac{1}{3} I_2(\text{Dev } \hat{Q}) (\text{Dev } \hat{Q})^2 + \frac{2}{9} \hat{E} I_2^2(\text{Dev } \hat{Q}) \right] \right\} + \\ + \beta_1 \hat{E} \left[\frac{2}{3} I_2(\text{Dev } \hat{P}) - \frac{2}{3} \alpha^2 I_2(\text{Dev } \hat{Q}) + 2\alpha\beta I_3(\text{Dev } \hat{Q}) + \frac{2}{9} \beta^2 I_2^2(\text{Dev } \hat{Q}) \right].$$

Теперь замечая, что

$$I_1(\text{Dev } \hat{Q}) = 0, \quad I_1[(\text{Dev } \hat{Q})^2] = -2I_2(\text{Dev } \hat{Q})$$

по условию обращения в нуль $I_1(\text{Dev } \hat{P})$, приходим к соотношению

$$I_2(\text{Dev } \hat{P}) = \alpha^2 I_2(\text{Dev } \hat{Q}) - 3\alpha\beta I_3(\text{Dev } \hat{Q}) - \frac{1}{3}\beta^2 I_2^2(\text{Dev } \hat{Q}), \quad (\text{I. 13.20})$$

представляющему другую форму записи связи τ с Γ . Для определения α_1 и β_1 получаем два уравнения:

$$\alpha_1\alpha + \beta_1\left[-\frac{2}{3}\alpha\beta I_2(\text{Dev } \hat{Q}) + \beta^2 I_3(\text{Dev } \hat{Q})\right] = 1,$$

$$\alpha_1\beta + \beta_1\left[\alpha^2 + \frac{1}{3}\beta^2 I_2(\text{Dev } \hat{Q})\right] = 0,$$

из которых получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{H}\left[\alpha^2 + \frac{1}{3}\beta^2 I_2(\text{Dev } \hat{Q})\right], & \beta_1 &= -\frac{\beta}{H}, \\ H &= \alpha^3 + I_2(\text{Dev } \hat{Q})\alpha\beta^2 - I_3(\text{Dev } \hat{Q})\beta^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 13.21})$$

I. 14. Линейная связь между тензорами. Соотношения становятся весьма простыми. Имеем

$$\hat{P} = A\hat{E} + B\hat{Q}, \quad (\text{I. 14.1})$$

так что

$$I_1(\hat{P}) = 3A + BI_1(\hat{Q}), \quad \text{Dev } \hat{P} = B \text{Dev } \hat{Q} \quad (\text{I. 14.2})$$

и, далее,

$$I_2(\text{Dev } \hat{P}) = B^2 I_2(\text{Dev } \hat{Q}). \quad (\text{I. 14.3})$$

Получаем

$$\hat{P} = \frac{1}{3} I_1(\hat{Q}) \frac{I_1(\hat{P})}{I_1(\hat{Q})} \hat{E} + \sqrt{\frac{I_2(\text{Dev } \hat{P})}{I_2(\text{Dev } \hat{Q})}} \text{Dev } \hat{Q}$$

или, при обозначениях (I. 13.5) и (I. 13.9),

$$\hat{P} = kI_1(\hat{Q}) \hat{E} + \mu \text{Dev } \hat{Q}. \quad (\text{I. 14.4})$$

Сославшись на (I. 11.6), легко получить также соотношение

$$I_2(\hat{P}) = 3A^2 + 2ABI_1(\hat{Q}) + B^2 I_2(\hat{Q}). \quad (\text{I. 14.5})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

II. 1. Набла-оператор. В скалярном поле, задаваемом функцией координат $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, может быть определен вектор $\text{grad } \varphi$ (градиент), проекции которого на оси ортогональной декартовой системы координат равны частным производным от скаляра φ по x_s :

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \mathbf{i}_s. \quad (\text{II. 1.1})$$

Скалярное произведение $\text{grad } \varphi$ на вектор $d\mathbf{r}$, определяющий взаимное расположение двух бесконечно близких точек M и M' с вектор-радиусами \mathbf{r} и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, представляет скаляр:

$$\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{i}_k dx_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx_s = d\varphi, \quad (\text{II. 1.2})$$

и этим доказывается, что $\text{grad } \varphi$ представляет вектор (см. п. I.1).

Операция вычисления градиента может быть записана с помощью символического вектора — набла-оператора Гамильтона:

$$\nabla = \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s}, \quad (\text{II. 1.3})$$

так что

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi.$$

Проекции набла-оператора — операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_s}$ — подчинены закону преобразования проекций вектора; действительно, при повороте координатной системы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x_s} = \alpha_{ks} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_s} = \alpha_{ks} \frac{\partial}{\partial x'_k}$$

в соответствии с формулами (I. 1.6).

Известное правило дифференцирования произведения распространяется на набла-оператор:

$$\nabla \varphi \psi = \psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi. \quad (\text{II. 1.4})$$

II.2. Дифференциальные операции в векторном поле. Известно (п. I.6), что операции над двумя векторами сводятся к построениям их скалярного инварианта $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и тензора — диады \mathbf{ab} . В соответствии с этим простейшей дифференциальной операцией в векторном поле служит образование скалярного произведения набла-оператора на вектор:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot a_k \mathbf{i}_k = \frac{\partial a_s}{\partial x_s} = \text{div } \mathbf{a}. \quad (\text{II.2.1})$$

Этот скаляр называется дивергенцией вектора.

Следующий шаг — образование вектора

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \times a_k \mathbf{i}_k = e_{rsk} \frac{\partial a_k}{\partial x_s} \mathbf{i}_r = \text{rot } \mathbf{a}, \quad (\text{II.2.2})$$

называемого ротором (вихрем) вектора.

Наконец, образование диады приводит к тензору второго ранга

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \mathbf{i}_k a_k = \mathbf{i}_s \mathbf{i}_k \frac{\partial a_k}{\partial x_s} = \text{grad } \mathbf{a} \quad (\text{II.2.3})$$

— градиенту вектора. Транспонированный тензор

$$(\nabla \mathbf{a})^* = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s \frac{\partial a_k}{\partial x_s} \quad (\text{II.2.4})$$

имеет матрицу компонент

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{array} \right\|. \quad (\text{II.2.5})$$

Произведение справа этого тензора на вектор $d\mathbf{r}$ приводит к вектору $d\mathbf{a}$:

$$(\nabla \mathbf{a})^* \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s \frac{\partial a_k}{\partial x_s} \cdot \mathbf{i}_q dx_q = \mathbf{i}_k \frac{\partial a_k}{\partial x_s} dx_s = \mathbf{i}_k da_k = d\mathbf{a},$$

и, основываясь на этом равенстве, естественно называть тензор $(\nabla \mathbf{a})^*$ производной вектора \mathbf{a} по вектор-радиусу \mathbf{r} и принять обозначение

$$(\nabla \mathbf{a})^* = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}. \quad (\text{II.2.6})$$

Выделяя из тензора $(\nabla \mathbf{a})^*$ его симметричную часть, получаем тензор

$$\frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{a})^* + \nabla \mathbf{a}] = \text{def } \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_s} + \frac{\partial a_s}{\partial x_k} \right), \quad (\text{II.2.7})$$

называемый деформацией вектора \mathbf{a} . Сопутствующий тензору $(\nabla \mathbf{a})^*$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ по (I. 4.9) определяется равенством

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} e_{rst} \frac{\partial a_t}{\partial x_s} \mathbf{i}_r = \frac{1}{2} \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_t \frac{\partial a_t}{\partial x_s} = \frac{1}{2} \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \times \mathbf{i}_t a_t = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{a}. \quad (\text{II. 2.8})$$

Обозначая еще через $\hat{\Omega}$ кососимметричную часть $(\nabla \mathbf{a})^*$, имеем

$$(\nabla \mathbf{a})^* = \text{def } \mathbf{a} + \hat{\Omega}, \quad \nabla \mathbf{a} = \text{def } \mathbf{a} - \hat{\Omega}, \quad (\nabla \mathbf{a})^* = \nabla \mathbf{a} + 2\hat{\Omega}, \quad (\text{II. 2.9})$$

причем

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_s} - \frac{\partial a_s}{\partial x_k} \right), \quad \Omega_{ks} = e_{rsk} \omega_r. \quad (\text{II. 2.10})$$

Получаем

$$d\mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a})^* \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{a} = \text{def } \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \hat{\Omega} \cdot d\mathbf{r} = \text{def } \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}. \quad (\text{II. 2.11})$$

Применение набла-оператора к композициям из двух векторов иллюстрируется приводимыми ниже примерами.

1°. Градиент скалярного произведения

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s} a_k b_k = \mathbf{i}_s \frac{\partial a_k}{\partial x_s} b_k + a_k \mathbf{i}_s \frac{\partial b_k}{\partial x_s} = \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s \frac{\partial a_k}{\partial x_s} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s \frac{\partial b_k}{\partial x_s} = \mathbf{b} \cdot (\nabla \mathbf{a})^* + \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^* = (\nabla \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (\text{II. 2.12})$$

Это правило дифференцирования вполне аналогично (II. 1.4). Его записывают еще в другой форме, вводя в рассмотрение вектор, называемый производной \mathbf{b} по направлению \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot [(\nabla \mathbf{b})^* - 2\hat{\Omega}] = \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^* + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^* - \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b},$$

так что

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b})^* &= \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b}; \quad \text{grad } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \\ &= \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (\text{II. 2.13})$$

2°. Дивергенция векторного произведения

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{i}_s \cdot \left(\mathbf{i}_q \frac{\partial a_q}{\partial x_s} \times \mathbf{b} \right) + \mathbf{i}_s \cdot \left(\mathbf{a} \times \mathbf{i}_q \frac{\partial b_q}{\partial x_s} \right) = \\ &= \left(\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_q \frac{\partial a_q}{\partial x_s} \right) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_q \frac{\partial b_q}{\partial x_s} \right) = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (\text{II. 2.14})$$

3°. Ротор векторного произведения

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [\mathbf{i}_s \times (\mathbf{i}_q \times \mathbf{i}_r)] \frac{\partial}{\partial x_s} a_q b_r = \\ &= (\mathbf{i}_q \delta_{rs} - \mathbf{i}_r \delta_{sq}) \left(\frac{\partial a_q}{\partial x_s} b_r + a_q \frac{\partial b_r}{\partial x_s} \right),\end{aligned}$$

откуда следует

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}. \quad (\text{II. 2.15})$$

II. 3. Дифференциальные операции над тензорами. Сказанное в п. II.2 обобщается на тензорные поля любого ранга. Ранг тензора уменьшается на единицу при умножении его слева на набла-оператор — образовании дивергенции тензора:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot {}^{(n)}\hat{Q} &= \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot q_{s_1 s_2 \dots s_n} \mathbf{i}_{s_1} \mathbf{i}_{s_2} \dots \mathbf{i}_{s_n} = \\ &= \mathbf{i}_{s_2} \dots \mathbf{i}_{s_n} \frac{\partial}{\partial x_s} q_{ss_2 \dots s_n} = \operatorname{div}^{(n)} \hat{Q}.\end{aligned} \quad (\text{II. 3.1})$$

Векторное умножение слева на ∇ приводит к тензору того же ранга — ротору тензора

$$\nabla \times {}^{(n)}\hat{Q} = e_{ss_1} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_{s_1} \mathbf{i}_{s_2} \dots \mathbf{i}_{s_n} \frac{\partial}{\partial x_s} q_{s_1 \dots s_n} = \operatorname{rot}^{(n)} \hat{Q}. \quad (\text{II. 3.2})$$

Наконец, градиент тензора образуется при диадном умножении его слева на ∇ :

$$\nabla {}^{(n)}\hat{Q} = \mathbf{i}_s \mathbf{i}_{s_1} \dots \mathbf{i}_{s_n} \frac{\partial}{\partial x_s} q_{s_1 s_2 \dots s_n} = \operatorname{grad}^{(n)} \hat{Q}.$$

В частности, дивергенция тензора второго ранга представляет вектор

$$\operatorname{div} \hat{Q} = \nabla \cdot \hat{Q} = \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot q_{rt} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_t = \frac{\partial q_{st}}{\partial x_s} \mathbf{i}_t, \quad (\text{II. 3.3})$$

а для кососимметричного тензора

$$\operatorname{div} \hat{\Omega} = \mathbf{i}_t \frac{\partial \Omega_{rt}}{\partial x_r} = \mathbf{i}_t e_{str} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_r} = \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_s \frac{\partial \omega_s}{\partial x_r} = \nabla \times \boldsymbol{\omega} \equiv \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{II. 3.4})$$

Поэтому, выделив из тензора \hat{Q} его кососимметричную часть, получим

$$\operatorname{div} \hat{Q} = \operatorname{div} \hat{S} + \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{II. 3.5})$$

Дивергенция диады выражается через дифференциальные операции над ее векторами

$$\operatorname{div} \mathbf{ab} = \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b}. \quad (\text{II. 3.6})$$

Ротор тензора второго ранга представляет тензор второго ранга

$$\operatorname{rot} \hat{Q} = \nabla \times \hat{Q} = \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_r \mathbf{i}_t \frac{\partial q_{rt}}{\partial x_s} = e_{srq} \mathbf{i}_q \mathbf{i}_t \frac{\partial q_{rt}}{\partial x_s}. \quad (\text{II. 3.7})$$

Развернутая матрица его компонент дается таблицей (I.5.9), в ней надо a_s заменить на $\frac{\partial}{\partial x_s}$. Свертывая этот тензор, получим, сославшись на (I.4.9), его след

$$\text{Sp rot } \hat{Q} = e_{srq} \delta_{qt} \frac{\partial q_{rt}}{\partial x_s} = e_{srt} \frac{\partial q_{rt}}{\partial x_s} = -2 \frac{\partial \omega_s}{\partial x_s} = -2 \text{div } \omega, \quad (\text{II.3.8})$$

где ω — сопутствующий \hat{Q} вектор.

В случае кососимметричного тензора

$$\begin{aligned} \text{rot } \hat{\Omega} &= e_{srq} i_q i_t \frac{\partial \omega_{rt}}{\partial x_s} = e_{srq} e_{trm} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_s} i_q i_t = (\delta_{st} \delta_{qm} - \delta_{sm} \delta_{qt}) \frac{\partial \omega_m}{\partial x_s} i_q i_t = \\ &= i_q i_t \frac{\partial \omega_q}{\partial x_t} - i_q i_q \frac{\partial \omega_s}{\partial x_s} = (\nabla \omega)^* - \hat{E} \text{div } \omega. \end{aligned} \quad (\text{II.3.9})$$

Приведем еще многократно используемую в механике сплошной среды формулу для дивергенции вектора $\hat{Q} \cdot a$:

$$\text{div } \hat{Q} \cdot a = i_s \frac{\partial}{\partial x_s} \cdot q_{rt} i_r a_t = \frac{\partial q_{st}}{\partial x_s} a_t + q_{st} \frac{\partial a_t}{\partial x_s} = a \cdot \text{div } \hat{Q} + \hat{Q} \cdot (\nabla a)^*, \quad (\text{II.3.10})$$

так как по (I.6.7) и (II.2.4)

$$q_{st} \frac{\partial a_t}{\partial x_s} = \hat{Q} \cdot (\nabla a)^* = \hat{Q}^* \cdot \nabla a. \quad (\text{II.3.11})$$

II.4. Двукратное дифференцирование. По вектору $\nabla \varphi$ определяется симметричный тензор второго ранга $\nabla \nabla \varphi$:

$$\nabla \nabla \varphi = i_s i_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial x_k} = i_k i_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial x_k}. \quad (\text{II.4.1})$$

Его след $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$ представляет лапласиан скаляра φ :

$$\nabla^2 \varphi = i_k \cdot i_s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial x_s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}. \quad (\text{II.4.2})$$

Сопутствующий симметричному тензору вектор равен нулю — в применении к тензору $\nabla \nabla \varphi$ приходим к известному свойству градиента скаляра:

$$\nabla \times \nabla \varphi = \text{rot grad } \varphi = 0.$$

Тензор третьего ранга $\nabla \nabla a$ допускает следующие свертывания, снижающие его ранг на две единицы:

а) образование вектора-лапласиана

$$\nabla \cdot \nabla a = \nabla^2 a = \text{div grad } a = i_k \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_s \partial x_s}; \quad (\text{II.4.3})$$

б) вектор-градиент дивергенции a :

$$\nabla \nabla \cdot a = \text{grad div } a = i_s \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_s \partial x_k}; \quad (\text{II.4.4})$$

в) вектор-ротор ротора \mathbf{a} :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s} \times \left(\mathbf{i}_t \frac{\partial}{\partial x_t} \times \mathbf{i}_q \mathbf{a}_q \right) = (\mathbf{i}_t \delta_{sq} - \mathbf{i}_q \delta_{st}) \frac{\partial^2 \mathbf{a}_q}{\partial x_s \partial x_t},$$

так что

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}. \quad (\text{II. 4.5})$$

Тензоры второго ранга получим, снижая ранг $\nabla \nabla \mathbf{a}$ на единицу; это ротор градиента вектора \mathbf{a}

$$\begin{aligned} \text{rot grad } \mathbf{a} &= \nabla \times \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x_s} \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_t \mathbf{i}_q \frac{\partial \mathbf{a}_q}{\partial x_t} = e_{str} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_q \frac{\partial^2 \mathbf{a}_q}{\partial x_s \partial x_t} = \\ &= e_{tsr} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_q \frac{\partial^2 \mathbf{a}_q}{\partial x_t \partial x_s} = -e_{str} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_q \frac{\partial^2 \mathbf{a}_q}{\partial x_s \partial x_t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II. 4.6})$$

и градиент его ротора

$$\text{grad rot } \mathbf{a} = \nabla (\nabla \times \mathbf{a}) = \mathbf{i}_s \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_t \frac{\partial^2 \mathbf{a}_t}{\partial x_s \partial x_r} = e_{rts} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_q \frac{\partial^2 \mathbf{a}_t}{\partial x_s \partial x_r}. \quad (\text{II. 4.7})$$

След этого тензора равен нулю:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= \text{div rot } \mathbf{a} = e_{rts} \frac{\partial^2 \mathbf{a}_t}{\partial x_r \partial x_s} = e_{str} \frac{\partial^2 \mathbf{a}_t}{\partial x_s \partial x_r} = \\ &= -e_{rts} \frac{\partial^2 \mathbf{a}_t}{\partial x_r \partial x_s} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II. 4.8})$$

Переходим к тензору четвертого ранга $\nabla \nabla \hat{Q}$:

$$\nabla \nabla \hat{Q} = \mathbf{i}_s \mathbf{i}_t \mathbf{i}_k \mathbf{i}_m \frac{\partial^2 q_{km}}{\partial x_s \partial x_t}.$$

Из возможных свертываний по двум парам индексов отметим

$$\text{div div } \hat{Q} = \nabla \cdot \nabla \cdot \hat{Q} = \delta_{kt} \delta_{sm} \frac{\partial^2 q_{km}}{\partial x_s \partial x_t} = \frac{\partial^2 q_{ts}}{\partial x_s \partial x_t}. \quad (\text{II. 4.9})$$

Свертывание по одной паре индексов дают тензоры второго ранга

$$\nabla \cdot \nabla \hat{Q} = \text{div grad } \hat{Q} = \nabla^2 \hat{Q}, \quad \nabla \nabla \cdot \hat{Q} = \text{grad div } \hat{Q}, \quad \nabla \nabla \text{Sp } \hat{Q}. \quad (\text{II. 4.10})$$

Можно образовать также тензоры третьего ранга

$$\nabla \times (\nabla \hat{Q}) = \text{rot grad } \hat{Q}, \quad \nabla (\nabla \times \hat{Q}) = \text{grad rot } \hat{Q} \quad (\text{II. 4.11})$$

и тензор второго ранга

$$\nabla \times (\nabla \times \hat{Q}) = \text{rot rot } \hat{Q} = \nabla \nabla \cdot \hat{Q} - \nabla^2 \hat{Q}. \quad (\text{II. 4.12})$$

Большое значение в механике сплошной среды имеет тензор второго ранга, представляющий ротор транспонированного ротора тензора второго ранга:

$$\hat{M} = \text{rot}(\text{rot } \hat{Q})^* = \nabla \times (\nabla \times \hat{Q})^* = e_{tmq} e_{srk} i_k i_q \frac{\partial^2 q_{mr}}{\partial x_s \partial x_t}. \quad (\text{II. 4.13})$$

Этот тензор симметричен, если \hat{Q} — симметричный тензор. Действительно,

$$m_{kq} = e_{tmq} e_{srk} \frac{\partial^2 q_{mr}}{\partial x_s \partial x_t} = e_{srq} e_{tmk} \frac{\partial^2 q_{rm}}{\partial x_t \partial x_s} = e_{tmk} e_{srq} \frac{\partial^2 q_{mr}}{\partial x_s \partial x_t} = m_{qk}.$$

В литературе этот тензор называют $\text{Ink } \hat{Q}$, причем Ink — первые буквы слова «Inkompatibilität» — несовместимость (см. п. 2.1 гл. II):

$$\text{Ink } \hat{Q} = \text{rot}(\text{rot } \hat{Q})^* = \nabla \times (\nabla \times \hat{Q})^*. \quad (\text{II. 4.14})$$

Таблица компонент $\text{Ink } \hat{Q}$, когда \hat{Q} — симметричный тензор, записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= \frac{\partial^2 q_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 q_{22}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 q_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ m_{22} &= \frac{\partial^2 q_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 q_{33}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 q_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ m_{33} &= \frac{\partial^2 q_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 q_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 q_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ m_{12} = m_{21} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial q_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial q_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 q_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ m_{23} = m_{32} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial q_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial q_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial q_{23}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 q_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ m_{31} = m_{13} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial q_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial q_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial q_{31}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 q_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 4.15})$$

Из тензоров третьего ранга (II. 4.11) при свертывании пары индексов образуются векторы

$$\left. \begin{aligned} \text{rot grad Sp } \hat{Q} &= 0, \\ \text{rot div } \hat{Q} &= \nabla \times (\nabla \cdot \hat{Q}) = e_{sqi} i_t \frac{\partial^2 q_{rq}}{\partial x_s \partial x_r}, \\ \text{div rot } \hat{Q} &= \nabla \cdot (\nabla \times \hat{Q}) = e_{srq} i_t \frac{\partial^2 q_{rt}}{\partial x_s \partial x_q} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 4.16})$$

Приведем еще выражения некоторых дифференциальных операций над произведением вектора на скаляр:

$$\nabla \psi \mathbf{a} = (\nabla \psi) \mathbf{a} + \psi \nabla \mathbf{a}, \quad (\text{II. 4.17})$$

$$\operatorname{div} \psi \mathbf{a} = \psi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \psi, \quad \operatorname{rot} \psi \mathbf{a} = \psi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \psi \times \mathbf{a}, \quad (\text{II. 4.18})$$

$$\nabla^2 \psi \mathbf{a} = \psi \nabla^2 \mathbf{a} + \mathbf{a} \nabla^2 \psi + 2 \nabla \psi \cdot \nabla \mathbf{a}. \quad (\text{II. 4.19})$$

Лапласиан произведения скаляров определяется соотношением

$$\nabla^2 \varphi \psi = \varphi \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \varphi + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla \psi. \quad (\text{II. 4.20})$$

II.5. Преобразование объемного интеграла в поверхностный. Предполагается известной формула Гаусса — Остроградского

$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} d\tau = \iint_O n_s \varphi do. \quad (\text{II. 5.1})$$

В ней $d\tau$ — элемент объема V , do — элемент поверхности O , ограничивающей этот объем, n_s — проекции на ось x_s единичного вектора нормали \mathbf{n} к этой поверхности, направленной вовне объема. Функция φ непрерывна вместе с ее частными производными первого порядка в замкнутом объеме $V + O$. Простейшим обобщением формулы (II. 5.1) служит соотношение

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} d\tau = \iiint_V \frac{\partial a_s}{\partial x_s} d\tau = \iint_O n_s a_s do = \iint_O \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} do, \quad (\text{II. 5.2})$$

связывающее интеграл по замкнутому объему от дивергенции вектора с потоком вектора через ограничивающую этот объем поверхность.

Заключающееся в формуле (II. 5.2) правило замены оператора в объемном интеграле вектором \mathbf{n} в поверхностном можно распространить на более сложные соотношения, поскольку в конечном счете дело сводится к исходному преобразованию Гаусса — Остроградского (II. 5.1). Например,

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{a} d\tau = \iiint_V \operatorname{rot} \mathbf{a} d\tau = \iint_O \mathbf{n} \times \mathbf{a} do, \quad (\text{II. 5.3})$$

так как

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \times \mathbf{a} d\tau &= \iiint_V \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_k \frac{\partial a_k}{\partial x_s} d\tau = \\ &= \iint_O \mathbf{i}_s n_s \times \mathbf{i}_k a_k do = \iint_O \mathbf{n} \times \mathbf{a} do. \end{aligned}$$

Другими столь же просто проверяемыми примерами служат

$$\int_V \int \nabla \mathbf{a} d\tau = \int_0 \int \mathbf{n} \mathbf{a} d\sigma, \quad \int_V \int (\nabla \mathbf{a})^* d\tau = \int_0 \int (\mathbf{n} \mathbf{a})^* d\sigma = \int_0 \int \mathbf{a} \mathbf{n} d\sigma. \quad (\text{II. 5.4})$$

В применении к тензору второго ранга имеем формулы

$$\int_V \int \nabla \cdot \hat{Q} d\tau = \int_0 \int \mathbf{n} \cdot \hat{Q} d\sigma, \quad \int_V \int \nabla \times \hat{Q} d\tau = \int_0 \int \mathbf{n} \times \hat{Q} d\sigma. \quad (\text{II. 5.5})$$

Как пример приведем еще преобразование

$$\begin{aligned} \int_0 \int \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \hat{Q}) d\sigma &= - \int_0 \int (\mathbf{n} \cdot \hat{Q}) \times \mathbf{r} d\sigma = \\ &= - \int_V \int (\nabla \cdot \hat{Q}) \times \mathbf{r} d\tau - \int_V \int (\mathbf{i}_s \cdot \hat{Q}) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_s} d\tau = \\ &= \int_V \int \mathbf{r} \times \nabla \cdot \hat{Q} d\tau + \int_V \int \mathbf{i}_s \times (\mathbf{i}_s \cdot \hat{Q}) d\tau. \end{aligned}$$

Но

$$\mathbf{i}_s \times (\mathbf{i}_s \cdot \hat{Q}) = \mathbf{i}_s \times \mathbf{i}_r q_{sr} = e_{srl} q_{sr} \mathbf{i}_l = -2\omega,$$

где ω — сопутствующий \hat{Q} вектор. Итак,

$$\int_0 \int \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \hat{Q}) d\sigma = \int_V \int (\mathbf{r} \times \text{div } \hat{Q} - 2\omega) d\tau. \quad (\text{II. 5.6})$$

II. 6. Преобразование Стокса. Известно, что линейный интеграл (циркуляция) вектора по дуге C

$$\int_{M_0}^M \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{II. 6.1})$$

не зависит от выбора C , а определяется лишь координатами начальной и конечной точек M_0, M при условии

$$\text{rot } \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi. \quad (\text{II. 6.2})$$

Тогда

$$\int_{M_0}^M \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^M \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^M d\varphi = \varphi_M - \varphi_{M_0}. \quad (\text{II. 6.3})$$

Аналогичное равенство для линейного интеграла от тензора

$$\int_{M_0}^M \hat{Q} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{a}_M - \mathbf{a}_{M_0}, \quad (\text{II. 6.4})$$

имеет место при условии

$$\hat{Q} = \frac{da}{dr} = (\nabla a)^*, \quad \hat{Q}^* = \nabla a, \quad \text{rot } \hat{Q}^* = 0. \quad (\text{II. 6.5})$$

Действительно, тогда

$$\int_{M_0}^M \hat{Q} \cdot dr = \int_{M_0}^M \frac{da}{dr} \cdot dr = \int_{M_0}^M da = a_M - a_{M_0}.$$

Аналогично доказывается, что условием независимости от пути интеграла

$$\int_{M_0}^M dr \cdot \hat{Q} = \int_{M_0}^M \hat{Q}^* \cdot dr \quad (\text{II. 6.6})$$

служит равенство

$$\text{rot } \hat{Q} = 0, \quad \hat{Q} = \nabla a. \quad (\text{II. 6.7})$$

Согласно теореме Стокса

$$\oint a \cdot dr = \iint_S n \cdot \text{rot } a \, do$$

— циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур. Поверхность, не выходящую из рассматриваемого объема, можно построить на замкнутом контуре, сводимом в точку непрерывным преобразованием, при котором не пересекается граница области; в односвязном объеме — это любой замкнутый контур. Однако в двусвязном объеме, например в торе или в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами, существуют контуры, назовем их K -контурами, сводимые непрерывным

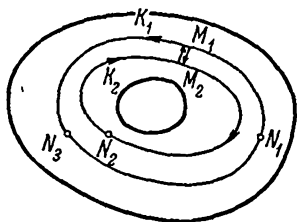


Рис. 50.

преобразованием друг к другу, но не сводимые в точку. Таковы осевая линия в торе, окружность в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, охватывающая внутренний цилиндр. Двусвязная область может быть превращена в односвязную проведением барьера. Например, область между коаксиальными цилиндрами становится односвязной, если построить плоский барьер, проходящий через ось цилиндра и начинающийся на ней. После проведения барьера двусвязная область не теряет связности, не распадается на два куска.

Пусть выполнено условие интегрируемости (II. 6.2). Но поскольку теорема Стокса не может быть применена к K -контуре, циркуляция по нему может быть отличной от нуля; скаляр ϕ

в этом случае — неоднозначная функция координат:

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint d\varphi = \chi, \quad (\text{II. 6.8})$$

причем циклическая постоянная χ одна и та же для всех K -контуров. Доказательство заключается в рассмотрении интеграла по замкнутому контуру $N_1 M_1 M_2 N_2 M_2 M_1 N_3 N_1$ (рис. 50), сводимому непрерывным преобразованием в точку. К нему применима теорема Стокса

$$\int_{M_1}^{M_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{K_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{M_2}^{M_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{K_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_M^{N_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

и, поскольку

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{M_2}^{M_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \int_{M_1}^{N_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{N_1}^{M_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

имеем

$$\oint_{K_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{K_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \oint_{K_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{K_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

что и требуется.

Сказанное здесь распространяется на интегралы вида (II. 6.4). При соблюдении условия интегрируемости (II. 6.5)

$$\oint_K \hat{Q} \cdot d\mathbf{r} = \oint_K d\mathbf{a} = \mathbf{c} \quad (\text{II. 6.9})$$

причем \mathbf{c} — циклический постоянный вектор, один и тот же для всех K -контуров.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

III. 1. Определения. Три числа, задающие положение точки в пространстве, обозначаемые q^1, q^2, q^3 , называются ее криволинейными координатами. Связь декартовых координат с криволинейными выражается тремя соотношениями

$$x_s = x_s(q^1, q^2, q^3) \quad (\text{III. 1.1})$$

или, в векторной записи (R — вектор-радиус),

$$R = i_s x_s = R(q^1, q^2, q^3). \quad (\text{III. 1.2})$$

Функции (III. 1.1) предполагаются в области их задания непрерывными, однозначными и имеющими непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Они должны быть разрешимы единственным образом относительно q^1, q^2, q^3 ; это условие равносильно требованию необращения в нуль якобиана

$$J = \left| \frac{\partial x_s}{\partial q^k} \right|. \quad (\text{III. 1.3})$$

Нумерация координат предполагается выбранной так, чтобы якобиан был положительным.

Преобразование (III. 1.1) определяет три семейства поверхностей $q^r = q_0^r$; координатные линии представляют кривые, по которым пересекаются координатные поверхности. Вдоль координатной линии, обозначаемой $[q^s]$, переменной является координата q^s . Координатные поверхности одного и того же семейства при условии (III. 1.3) не пересекаются.

Хорошо известными примерами являются цилиндрические и сферические координаты. Для цилиндрических координат $q^1 = r$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = z$ — радиус, азимутальный угол, высота. Формулы (III. 1.1) имеют вид

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z. \quad (\text{III. 1.4})$$

Область их задания представляется неравенствами

$$0 < r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Координатными поверхностями являются круговые цилиндры $r = r_0$, осью которых служит ось Ox_3 , полуплоскости $\varphi = \varphi_0$, проходящие через эту ось, плоскости $z = z_0$, ей перпендикулярные. Координатными линиями в пересечении соответствующих пар поверхностей являются прямые $[z]$, параллельные оси Ox_3 , радиально направленные полупрямые $[r]$, окружности $[\varphi]$. Якобиан $J = r$ обращается в нуль на оси Ox_3 , по которой пересекаются плоскости $\varphi = \varphi_0$; эта прямая не включается в область задания координат.

Для сферических координат $q^1 = R$, $q^2 = \vartheta$, $q^3 = \lambda$ (радиус, угол, отсчитываемый по меридиану от северного полюса, долгота) имеем

$$x_1 = R \sin \vartheta \cos \lambda, \quad x_2 = R \sin \vartheta \sin \lambda, \quad x_3 = R \cos \vartheta. \quad (\text{III. 1.5})$$

Область их задания определена неравенствами

$$0 < R < \infty, \quad 0 < \vartheta < \pi, \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi.$$

Координатными поверхностями являются сферы $R = R_0$ с центром в начале координат O , круговые конусы $\vartheta = \vartheta_0$ с вершиной в этой точке, проходящие через ось Ox_3 , полуплоскости $\lambda = \lambda_0$. Координатные линии представляют параллельные круги $[\lambda]$, по которым пересекаются поверхности сфер и конусов, радиально расходящиеся из центра O полупрямые $[R]$ и меридианы $[\vartheta]$. Якобиан $J = R^2 \sin \vartheta$ обращается в нуль в центре O и в полюсах сфер.

III. 2. Квадрат линейного элемента. В рассмотрение вводится тройка векторов, обозначаемых R_k :

$$R_k = \frac{\partial R}{\partial q^k}, \quad (\text{III. 2.1})$$

имеющих направления касательных к координатным линиям $[q^k]$. Ими в окрестности точки $M(q^1, q^2, q^3)$ определяется бесконечно малый вектор

$$dR = R_k dq^k. \quad (\text{III. 2.2})$$

Квадрат его длины — квадрат линейного элемента, выраженный через криволинейные координаты, — определяется из равенства

$$ds^2 = dR \cdot dR = R_s dq^s \cdot R_k dq^k = g_{sk} dq^s dq^k. \quad (\text{III. 2.3})$$

Шесть величин

$$g_{sk} = g_{ks} = R_s \cdot R_k \quad (\text{III. 2.4})$$

определяют метрику в принятой системе координат. Это — ковариантные компоненты метрического тензора *).

*) См. далее п. V.1.

Вторые производные вектор-радиуса R обозначаются

$$R_{st} = \frac{\partial^2 R}{\partial q^s \partial q^t} = R_{ts}. \quad (\text{III. 2.5})$$

Далее потребуется знание скалярных произведений $R_{st} \cdot R_k$; они выражаются через производные от ковариантных компонент метрического тензора. Имеем

$$\frac{\partial g_{st}}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial q^k} R_s \cdot R_t = R_{sk} \cdot R_t + R_s \cdot R_{tk}$$

и два равенства, получающихся из написанного круговой перестановкой индексов. Приходим к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_{st}}{\partial q^k} &= R_{sk} \cdot R_t + R_s \cdot R_{tk}, \\ \frac{\partial g_{tk}}{\partial q^s} &= R_{ts} \cdot R_k + R_t \cdot R_{ks}, \\ \frac{\partial g_{ks}}{\partial q^t} &= R_{kt} \cdot R_s + R_k \cdot R_{st}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 2.6})$$

К искомому соотношению приходим, вычитая первое из суммы второго с третьим:

$$R_{st} \cdot R_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial q^t} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial q^s} - \frac{\partial g_{st}}{\partial q^k} \right) = [st, k] = [ts, k]. \quad (\text{III. 2.7})$$

Эти величины называются символами Кристоффеля первого рода (или прямыми скобками Кристоффеля).

III. 3. Ортогональная криволинейная система координат. Базисные векторы. Для ортогональной системы криволинейных координат выполнены равенства

$$R_s \cdot R_t = g_{sk} = \begin{cases} 0, & s \neq k, \\ H_s^2, & s = k. \end{cases} \quad (\text{III. 3.1})$$

Величины H_s называются коэффициентами Ляме. Они равны модулям векторов R_s :

$$|R_s| = H_s = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q^s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q^s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q^s}\right)^2}. \quad (\text{III. 3.2})$$

Ортогональный триэдр единичных векторов e_s , касательных к координатным линиям $[q^s]$, направленных в сторону возрастания q^s :

$$e_s = \frac{R_s}{H_s}, \quad e_s \cdot e_k = \delta_{sk} \quad \left(\sum_s \right)^*), \quad (\text{III. 3.3})$$

*) Напомним, что перечеркнутый знак суммы \sum_s обозначает: «не суммировать по s ».

представляет векторный базис в принятой системе ортогональных криволинейных координат. Векторы e_s , очевидно, имеют также направления нормалей к координатным поверхностям q_0^s .

Векторы и тензоры задаются их представлениями в векторном базисе e_s :

$$a = a_s e_s, \quad \hat{Q} = q_{sk} e_s e_k, \quad (\text{III. 3.4})$$

но существенное отличие от декартовой ортогональной системы состоит в том, что векторы e_s не сохраняют, подобно i_s , неизменных направлений, поэтому, например, компоненты a_s постоянного вектора a меняются от точки к точке и, наоборот, из постоянства a_s нельзя заключить, что a — постоянный вектор.

Следствием (III. 3.3) являются формулы

$$e_s = i_k \frac{1}{H_s} \frac{\partial x_k}{\partial q^s}, \quad i_k = e_s \frac{1}{H_s} \frac{\partial x_k}{\partial q^s}, \quad \frac{\partial q^s}{\partial x_k} = \frac{1}{H_s^2} \frac{\partial x_k}{\partial q^s}, \quad (\text{III. 3.5})$$

причем последняя группа формул проверяется соотношением

$$\frac{\partial q^s}{\partial q^t} = \delta_{st} = \frac{\partial q^s}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial q^t} = \frac{1}{H_s^2} \frac{\partial x_r}{\partial q^s} \frac{\partial x_r}{\partial q^t} = \frac{1}{H_s^2} R_s \cdot R_t = \begin{cases} 0, & s \neq t, \\ 1, & s = t, \end{cases}$$

что и требуется.

Квадрат линейного элемента по (III. 2.3) и (III. 3.1) в ортогональных криволинейных координатах задается выражением

$$ds^2 = H_1^2 dq^1{}^2 + H_2^2 dq^2{}^2 + H_3^2 dq^3{}^2. \quad (\text{III. 3.6})$$

Проведение действий векторного и тензорного анализа в криволинейных координатах целиком связывается со знанием величин g_{sk} , а в случае ортогональных криволинейных координат — коэффициентов Ляме H_s . Часто для вычисления последних можно избежать использования формул (III. 3.2), требующих применения соотношений связи (III. 1.1), заменив его рассмотрением элемента дуги $d_k s$ координатной линии $[q^k]$:

$$d_k s = H_k dq^k \quad \left(\sum_k \right). \quad (\text{III. 3.7})$$

Далее знак «не суммировать» $\left(\sum_k \right)$ будет опускаться, когда индекс входит в правую и левую части формулы.

Набла-оператор ∇ , как и в п. II. 1, вводится с помощью определения градиента скалярного поля

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial q^s} dq^s = dR \cdot \nabla \varphi = R_s dq^s \cdot \nabla \varphi = H_s e_s \cdot \text{grad } \varphi dq^s,$$

так что по (III. 3.4)

$$e_s \cdot \text{grad } \varphi = \frac{1}{H_s} \frac{\partial \varphi}{\partial q^s}, \quad \text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{e_s}{H_s} \frac{\partial \varphi}{\partial q^s} \quad (\text{III. 3.8})$$

и набла-оператор следует определить равенством

$$\nabla = \frac{1}{H_s} \mathbf{e}_s \frac{\partial}{\partial q^s}. \quad (\text{III. 3.9})$$

Элемент объема в ортогональных криволинейных координатах задается очевидным выражением

$$\begin{aligned} d\tau &= \mathbf{R}_1 dq^1 \cdot (\mathbf{R}_2 dq^2 \times \mathbf{R}_3 dq^3) = H_1 H_2 H_3 \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) dq^1 dq^2 dq^3 = \\ &= H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3 \end{aligned}$$

или

$$d\tau = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3, \quad \sqrt{g} = H_1 H_2 H_3 = \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) = J. \quad (\text{III 3.10})$$

Здесь J — якобиан (III. 1.3).

III. 4. Дифференцирование базисных векторов. Проведение операций векторного и тензорного анализа в криволинейных координатах усложняется необходимостью учета изменчивости векторного базиса \mathbf{e}_s ; обязательно знание выражений производных этих векторов по координатам q^h .

Представив формулы (III. 3.1) в виде

$$g_{sk} = H_s^2 \delta_{sk} = H_k^2 \delta_{sk} = H_s H_k \delta_{sk},$$

имеем по (III. 2.7)

$$\mathbf{R}_{st} \cdot \mathbf{R}_k = H_s \frac{\partial H_k}{\partial q^t} \delta_{sk} + H_t \frac{\partial H_k}{\partial q^s} \delta_{kt} - H_t \frac{\partial H_s}{\partial q^k} \delta_{st}.$$

Учитывая, что левая часть этого соотношения представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^t} (H_s \mathbf{e}_s) \cdot H_k \mathbf{e}_k = \frac{\partial H_s}{\partial q^t} H_k \delta_{sk} + H_s H_k \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial q^t} \cdot \mathbf{e}_k,$$

приходим к равенству

$$\frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial q^t} \cdot \mathbf{e}_k = \frac{H_t}{H_s H_k} \left(\frac{\partial H_k}{\partial q^s} \delta_{kt} - \frac{\partial H_s}{\partial q^k} \delta_{st} \right) = \frac{\partial H_k}{H_s \partial q^s} \delta_{kt} - \frac{\partial H_s}{H_k \partial q^k} \delta_{st}. \quad (\text{III. 4.1})$$

Его правая часть равна нулю при $s = k$ и меняет знак при перемене s и k местами; так и должно быть, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial q^t} \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial q^t} \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^t} = 0. \quad (\text{III. 4.2})$$

Итак, матрица скалярных произведений (t фиксировано)

$$\|a_{ks}\| = \left\| \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial q^t} \right\| \quad (\text{III. 4.3})$$

кососимметрична и для ее задания достаточно трех чисел ${}^t O_r$, представимых в виде

$${}^t O_r = \frac{1}{2} e_{rsk} e_k \cdot \frac{\partial e_s}{\partial q^t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_t}{H_s \partial q^s} e_{rst} + \frac{\partial H_t}{H_k \partial q^k} e_{rkt} \right) = \frac{\partial H_t}{H_m \partial q^m} e_{rmt} \quad (\text{III.4.4})$$

(суммирование по $m!$). Введя теперь в рассмотрение векторы

$$\mathbf{o} = \mathbf{e}_r \mathbf{O}_r,$$

имеем

$$\mathbf{o} = \frac{\partial H_t}{H_m \partial q^m} e_{rmt} \mathbf{e}_r = \frac{\partial H_t}{H_m \partial q^m} \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_t = \text{grad } H_t \times \mathbf{e}_t. \quad (\text{III.4.5})$$

Таково выражение сопутствующего матрице (III.4.3) вектора \mathbf{o} . Выражение ее компонент по (III.4.4) и (I.4.6) записывается в виде

$$\frac{\partial e_s}{\partial q^t} \cdot \mathbf{e}_k = e_{rsk} \mathbf{O}_r, \quad (\text{III.4.6})$$

так что

$$\frac{\partial e_s}{\partial q^t} = e_{rsk} \mathbf{O}_r \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_s \mathbf{O}_r = \mathbf{o} \times \mathbf{e}_s. \quad (\text{III.4.7})$$

Это — искомые формулы дифференцирования базисных векторов (дериивационные формулы). По (III.4.5) они записываются также в виде

$$\frac{\partial e_s}{\partial q^t} = \mathbf{e}_s \times (\mathbf{e}_t \times \text{grad } H_t) = \mathbf{e}_t \frac{\partial H_t}{H_s \partial q^s} - \delta_{st} \text{grad } H_t. \quad (\text{III.4.8})$$

Формулы (III.4.7) допускают кинематическую интерпретацию, известную под наименованием «метод подвижного триэдра». Пусть вершина M триэдра базисных векторов \mathbf{e}_s движется с единичной скоростью $v=1$ по координатной линии $[q^m]$, так что $d_m s = H_m dq^m = dt$ (здесь t — время). В каждом мгновенном положении триэдра векторы \mathbf{e}_s должны иметь направления касательных к координатным линиям в точке M . Поэтому движение этой точки сопровождается вращением триэдра вокруг нее, вектор угловой скорости этого вращения назовем $\mathbf{\omega}^m$. По известной формуле кинематики твердого тела скорости концов единичных векторов \mathbf{e}_s относительно вершины триэдра при этом будут равны

$$\frac{d\mathbf{e}_s}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial q^m} = \mathbf{\omega}^m \times \mathbf{e}_s,$$

откуда сравнением с (III.4.7) находим

$$\omega = \frac{\overset{m}{o}}{H_m}. \quad (\text{III.4.9})$$

Часто вектор $\overset{m}{o}$ можно найти без вычисления, основываясь на этом кинематическом истолковании.

III.5. Дифференциальные операции в ортогональных криволинейных координатах. Вычисления основываются на определении набла-оператора (III.3.9) и на дериационных формулах (III.4.8).

1°. Градиент вектора. Имеем

$$\begin{aligned} \nabla a &= \frac{e_t}{H_t} \frac{\partial}{\partial q^t} a_s e_s = e_t e_s \frac{\partial a_s}{H_t \partial q^t} + e_t \frac{a_s}{H_t} \overset{t}{o} \times e_s = \\ &= e_t e_s \frac{\partial a_s}{H_t \partial q^t} + \frac{a_s}{H_t} \overset{t}{o}_r e_{rsk} e_t e_k = e_t e_s \left(\frac{\partial a_s}{H_t \partial q^t} + \frac{a_k}{H_t} \overset{t}{o}_r e_{rks} \right). \end{aligned}$$

Но по (III.4.4)

$$\begin{aligned} \overset{t}{o}_r e_{rks} &= \frac{\partial H_t}{H_m \partial q^m} e_{rmt} e_{rks} = \frac{\partial H_t}{H_m \partial q^m} (\delta_{mk} \delta_{ts} - \delta_{ms} \delta_{tk}) = \\ &= \frac{\partial H_t}{H_k \partial q^k} \delta_{ts} - \frac{\partial H_t}{H_s \partial q^s} \delta_{tk} \quad \left(\sum_{kst} \right), \end{aligned}$$

и выражение ∇a приводится к виду

$$\nabla a = e_t e_s \left(\frac{\partial a_s}{H_t \partial q^t} - \frac{a_t}{H_t H_s} \frac{\partial H_t}{\partial q^s} + \delta_{ts} \frac{a_k}{H_t H_k} \frac{\partial H_t}{\partial q^k} \right). \quad (\text{III.5.1})$$

2°. Дивергенция вектора. Основываясь на (III.3.10), запишем соотношение

$$\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial q^s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^s} = \frac{\partial \ln H_1}{\partial q^s} + \frac{\partial \ln H_2}{\partial q^s} + \frac{\partial \ln H_3}{\partial q^s}, \quad (\text{III.5.2})$$

так что, образуя след тензора ∇a , найдем

$$\text{div } a = \nabla \cdot a = \frac{\partial a_s}{H_s \partial q^s} - \frac{a_s}{H_s^2} \frac{\partial H_s}{\partial q^s} + \frac{a_k}{H_k} \frac{\partial \sqrt{g}}{\sqrt{g} \partial q^k} = \frac{\partial}{\partial q^s} \frac{a_s}{H_s} + \frac{a_s}{H_s} \frac{\partial \sqrt{g}}{\sqrt{g} \partial q^s}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \text{div } a &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^s} \left(\frac{\sqrt{g}}{H_s} a_s \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} H_2 H_3 a_1 + \frac{\partial}{\partial q^2} H_3 H_1 a_2 + \frac{\partial}{\partial q^3} H_1 H_2 a_3 \right). \quad (\text{III.5.3}) \end{aligned}$$

3°. Лапласиан скаляра. Если, в частности,

$$a = \text{grad } \psi, \quad a_s = \frac{1}{H_s} \frac{\partial \psi}{\partial q^s}, \quad (\text{III.5.4})$$

то

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^s} \frac{\sqrt{g}}{H_s^2} \frac{\partial \psi}{\partial q^s} = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q^3} \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q^3} \right).\end{aligned}\quad (\text{III. 5.5})$$

4°. Ротор вектора. Следует заменить в (III. 5.1) диады векторными произведениями

$$e_t e_s \text{ на } e_t \times e_s = \frac{1}{2} e_t \times e_s - \frac{1}{2} e_s \times e_t.$$

Придем к выражению

$$\begin{aligned}\nabla \times a &= \operatorname{rot} a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_s}{H_t \partial q^t} - \frac{a_t}{H_t H_s} \frac{\partial H_t}{\partial q^s} \right) e_t \times e'_s - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_t}{H_s \partial q^s} - \frac{a_s}{H_s H_t} \frac{\partial H_s}{\partial q^t} \right) e_t \times e_s\end{aligned}$$

или

$$\operatorname{rot} a = \frac{1}{2 H_s H_t} \left(\frac{\partial}{\partial q^t} H_s a_s - \frac{\partial}{\partial q^s} H_t a_t \right) e_t \times e_s. \quad (\text{III. 5.6})$$

Проекция этого вектора равны

$$e_q \cdot \operatorname{rot} a = \frac{e_{qts}}{2 H_t H_s} \left(\frac{\partial}{\partial q^t} H_s a_s - \frac{\partial}{\partial q^s} H_t a_t \right). \quad (\text{III. 5.7})$$

5°. Тензор $\operatorname{def} a$. Он был определен формулой (II. 2.7). Со-
славшись на (III. 5.1), получим

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} = \operatorname{def} a &= \frac{1}{2} e_t e_s \left(\frac{\partial a_s}{H_t \partial q^t} + \frac{\partial a_t}{H_s \partial q^s} - \frac{a_t}{H_s H_t} \frac{\partial H_t}{\partial q^s} - \frac{a_s}{H_s H_t} \frac{\partial H_s}{\partial q^t} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \delta_{ts} \frac{a_k}{H_t H_k} \frac{\partial H_t}{\partial q^k} \right).\end{aligned}\quad (\text{III. 5.8})$$

Выражения компонент этого тензора записываются в виде

$$\left. \begin{aligned}e_{11} &= \frac{\partial a_1}{H_1 \partial q^1} + \frac{a_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} + \frac{a_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q^3}, \\ e_{12} = e_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_1}{H_2 \partial q^2} + \frac{\partial a_2}{H_1 \partial q^1} - \frac{a_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} - \frac{a_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q^1} \right).\end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 5.9})$$

6°. Дивергенция тензора второго ранга

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \hat{T} = \nabla \cdot \hat{T} &= \frac{e_r}{H_r} \cdot \frac{\partial}{\partial q^r} t_{st} e_s e_t = \\ &= \frac{1}{H_s} \frac{\partial t_{st}}{\partial q^s} e_t + \frac{t_{st}}{H_r} \left[e_r \cdot (e' \times e_s) e_t + \delta_{rs} \frac{\partial e_t}{\partial q^r} \right].\end{aligned}$$

По (III.4.5)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot (\overset{r}{\mathbf{o}} \times \mathbf{e}_s) &= \mathbf{e}_r \cdot [(\text{grad } H_r \times \mathbf{e}_r) \times \mathbf{e}_s] = \\ &= \frac{\partial H_r}{H_s \partial q^s} - \delta_{rs} \frac{\partial H_r}{H_r \partial q^r} = \frac{\partial H_r}{H_s \partial q^s} - \frac{\partial H_s}{H_s \partial q^s}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \text{div } \hat{T} &= \left(\frac{1}{H_s} \frac{\partial t_{st}}{\partial q^s} + \frac{t_{st}}{H_r H_s} \frac{\partial H_r}{\partial q^s} - \frac{t_{st}}{H_s^2} \frac{\partial H_s}{\partial q^s} \right) \mathbf{e}_t + \frac{t_{st}}{H_s} \frac{\partial \mathbf{e}_t}{\partial q^s} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial q^s} \frac{t_{st}}{H_s} + \frac{t_{st}}{H_s} \frac{\partial \sqrt{g}}{\sqrt{g} \partial q^s} \right) \mathbf{e}_t + \frac{t_{st}}{H_s} \frac{\partial \mathbf{e}_t}{\partial q^s} \end{aligned}$$

и в окончательном виде

$$\begin{aligned} \text{div } \hat{T} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^s} \frac{\sqrt{g}}{H_s} t_{st} \mathbf{e}_t = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} H_2 H_3 t_{1t} \mathbf{e}_t + \frac{\partial}{\partial q^2} H_3 H_1 t_{2t} \mathbf{e}_t + \frac{\partial}{\partial q^3} H_1 H_2 t_{3t} \mathbf{e}_t \right). \quad (\text{III.5.10}) \end{aligned}$$

7°. Тензор $\nabla \nabla \psi$. Вычисление дает

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \psi &= \frac{\mathbf{e}_s}{H_s} \frac{\partial}{\partial q^s} \frac{\mathbf{e}_t}{H_t} \frac{\partial \psi}{\partial q^t} = \\ &= \frac{\mathbf{e}_s \mathbf{e}_t}{H_s H_t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^s \partial q^t} - \frac{\partial \ln H_t}{\partial q^s} \frac{\partial \psi}{\partial q^t} - \frac{\partial \ln H_s}{\partial q^t} \frac{\partial \psi}{\partial q^s} \right) + \frac{\mathbf{e}_s \mathbf{e}_s}{H_r^2} \frac{\partial \ln H_s}{\partial q^r} \frac{\partial \psi}{\partial q^r}. \end{aligned} \quad (\text{III.5.11})$$

Отсюда следует запись выражения лапласиана

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = \frac{1}{H_s^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^{s^2}} - 2 \frac{\partial \ln H_s}{\partial q^s} \frac{\partial \psi}{\partial q^s} \right) + \frac{1}{H_r^2 H_s} \frac{\partial H_s}{\partial q^r} \frac{\partial \psi}{\partial q^r} \quad (\text{III.5.12})$$

легко преобразуемая в (III.5.5).

III. 6. Зависимости Ляме. Соотношения

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_s}{\partial q^r \partial q^t} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_s}{\partial q^t \partial q^r} \quad (\text{III.6.1})$$

с помощью деривационных формул (III.4.7) представляются в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^r} (\overset{t}{\mathbf{o}} \times \mathbf{e}_s) = \frac{\partial \overset{t}{\mathbf{o}}}{\partial q^r} \times \mathbf{e}_s + \overset{t}{\mathbf{o}} \times (\overset{r}{\mathbf{o}} \times \mathbf{e}_s) = \frac{\partial \overset{r}{\mathbf{o}}}{\partial q^t} + \overset{r}{\mathbf{o}} \times (\overset{t}{\mathbf{o}} \times \mathbf{e}_s)$$

или

$$\left(\frac{\partial \overset{t}{\mathbf{o}}}{\partial q^r} - \frac{\partial \overset{r}{\mathbf{o}}}{\partial q^t} + \overset{t}{\mathbf{o}} \times \overset{r}{\mathbf{o}} \right) \times \mathbf{e}_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3).$$

Полученные дифференциальные соотношения между векторами $\overset{t}{o}$

$$\frac{\partial \overset{t}{o}}{\partial q^r} - \frac{\partial \overset{r}{o}}{\partial q^t} + \overset{t}{o} \times \overset{r}{o} = 0 \quad (\text{III.6.2})$$

преобразуются в зависимости, связывающие* коэффициенты Ляме. Вычислим для этого проекции векторов, входящих в (III.6.2), на оси триэдра e_s . По (III.4.7) имеем

$$\begin{aligned} e_s \cdot \left(\frac{\partial \overset{t}{o}}{\partial q^r} - \frac{\partial \overset{r}{o}}{\partial q^t} + \overset{t}{o} \times \overset{r}{o} \right) &= \\ &= \frac{\partial e_s \cdot \overset{t}{o}}{\partial q^r} - \frac{\partial e_s \cdot \overset{r}{o}}{\partial q^t} - \overset{t}{o} \cdot (\overset{r}{o} \times e_s) + \overset{r}{o} \cdot (\overset{t}{o} \times e_s) + (\overset{t}{o} \times \overset{r}{o}) \cdot e_s = \\ &= \frac{\partial \overset{t}{o} \cdot e_s}{\partial q^r} - \frac{\partial \overset{r}{o} \cdot e_s}{\partial q^t} - (\overset{t}{o} \times \overset{r}{o}) \cdot e_s = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.6.3})$$

Далее,

$$\begin{aligned} \overset{t}{o} \cdot e_s &= \text{grad } H_t \cdot (e_t \times e_s) = \frac{1}{H_m} \frac{\partial H_t}{\partial q^m} e_{tsm}, \\ (\overset{t}{o} \times \overset{r}{o}) \cdot e_s &= \frac{\partial H_t}{H_m \partial q^m} \frac{\partial H_r}{H_s \partial q^s} e_{trm} - (\text{grad } H_r \times \text{grad } H_t) \cdot e_t \delta_{rs}, \end{aligned}$$

и подстановка в (III.6.3) дает равенство

$$\begin{aligned} e_{tsm} \frac{\partial}{\partial q^r} \frac{1}{H_m} \frac{\partial H_t}{\partial q^m} - e_{rsm} \frac{\partial}{\partial q^t} \frac{1}{H_m} \frac{\partial H_r}{\partial q^m} + \frac{\partial H_t}{H_m \partial q^m} \frac{\partial H_r}{H_s \partial q^s} e_{rtm} + \\ + (\text{grad } H_r \times \text{grad } H_t) \cdot e_t \delta_{rs} = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.6.4})$$

Конечно, оно удовлетворяется при $t = r$. Поэтому далее надо рассмотреть случаи: а) $s \neq t \neq r$, б) $s = t$ и, значит, $s \neq r$.

а) $e_{tsm} = e_{tsr}$, $e_{rsm} = e_{rst}$, $e_{rtm} = e_{rts}$, $\delta_{rs} = 0$. Получаем

$$\frac{\partial}{\partial q^r} \frac{1}{H_r} \frac{\partial H_t}{\partial q^r} + \frac{\partial}{\partial q^t} \frac{1}{H_t} \frac{\partial H_r}{\partial q^t} + \frac{1}{H_s^2} \frac{\partial H_r}{\partial q^s} \frac{\partial H_t}{\partial q^s} = 0, \quad (\text{III.6.5})$$

и, поскольку r, t входят симметрично, а $s \neq t \neq r$, здесь имеется только три различных соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial q^3} \frac{\partial H_2}{\partial q^3} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q^3} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q^3} + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial q^1} \frac{\partial H_3}{\partial q^1} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q^3} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q^3} + \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q^1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_3}{\partial q^2} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.6.6})$$

б) В случае $s = t \neq r$

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial q^t \partial q^m} = \frac{1}{H_m} \frac{\partial H_m}{\partial q^t} \frac{\partial H_r}{\partial q^m} + \frac{1}{H_t} \frac{\partial H_r}{\partial q^t} \frac{\partial H_t}{\partial q^m}, \quad (\text{III.6.7})$$

причем m, t, r различны. Получаем еще три соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial q^2 \partial q^3} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q^2} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} \frac{\partial H_2}{\partial q^3}, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial q^3 \partial q^1} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q^3} \frac{\partial H_2}{\partial q^1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q^3} \frac{\partial H_3}{\partial q^1}, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial q^1 \partial q^2} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q^1} \frac{\partial H_3}{\partial q^2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q^1} \frac{\partial H_1}{\partial q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.6.8})$$

Шесть зависимостей Ляме (III.6.6), (III.6.8), полученные преобразованием тождества (III.6.1), тождественно удовлетворяются, если коэффициенты Ляме определены по заданному точечному преобразованию (III.1.1) с помощью формул (III.3.2). Обратно, три наперед заданные функции $H_s(q^1, q^2, q^3)$ являются при выполнении этих зависимостей коэффициентами Ляме для некоторого преобразования, определяемого системой дифференциальных уравнений (III.3.2); зависимости Ляме представляют условия интегрируемости этой системы.

III.7. Цилиндрические координаты. Базисные векторы $e_1 = e_r$, $e_2 = e_\varphi$, $e_3 = k$ имеют направления радиусов окружностей, касательных к ним, и оси концентрических цилиндров. Коэффициенты Ляме равны

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\varphi = r, \quad H_3 = H_z = 1. \quad (\text{III.7.1})$$

Векторы o, o равны нулю, поскольку движение вершины базисного триэдра по координатным линиям $[z]$, $[r]$ — поступательное; угловая скорость, которую приобретает этот триэдр при движении его вершины по окружности $[\varphi]$, определяется вектором

$$\omega = \frac{1}{r} k.$$

Итак,

$$\overset{z}{o} = 0, \quad \overset{r}{o} = 0, \quad \overset{\varphi}{o} = k \quad (\text{III.7.2})$$

и отличны от нуля только производные

$$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = k \times e_r = e_\varphi, \quad \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = k \times e_\varphi = -e_r. \quad (\text{III.7.3})$$

По определению (III.3.9) набла-оператора имеем теперь

$$\nabla e_r = \frac{e_\varphi}{r} \frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} e_\varphi e_\varphi, \quad \nabla e_\varphi = \frac{e_\varphi}{r} \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} e_\varphi e_r \quad (\text{III.7.4})$$

и, далее,

$$\nabla^2 e_r = \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{1}{r} e_\varphi e_\varphi = -\frac{1}{r^2} e_r, \quad \nabla^2 e_\varphi = -\frac{1}{r^2} e_\varphi. \quad (\text{III. 7.5})$$

Лапласиан в цилиндрических координатах по (III. 5.5) записывается в виде

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{III. 7.6})$$

III. 8. Сферические координаты. Базисные векторы $e_1 = e_R$, $e_2 = e_\vartheta$, $e_3 = e_\lambda$ имеют направления: e_R — радиуса (восходящей вертикали места), e_ϑ — касательной к меридиану (на юг), $e_\lambda = e_R \times e_\vartheta$ — перпендикулярна к плоскости меридиана (на восток). Коэффициенты Ляме легко определяются по (III. 3.7):

$$H_1 = H_R = 1, \quad H_2 = H_\vartheta = R, \quad H_3 = H_\lambda = R \sin \vartheta. \quad (\text{III. 8.1})$$

Вектор $\mathbf{o} = 0$; угловая скорость триэдра при движении его вершины по меридиану $[\vartheta]$ определяется вектором $\mathbf{\omega} = \frac{1}{R} e_\lambda$, а при движении по параллельному кругу $[\lambda]$ — вектором $\mathbf{\omega} = \frac{1}{R \sin \vartheta} \mathbf{k}$, где \mathbf{k} — единичный вектор, направленный по оси Ox_3 к северному полюсу.

Итак,

$$\mathbf{o} = 0, \quad \mathbf{\omega} = \frac{1}{R} e_\lambda, \quad \mathbf{\omega} = \frac{1}{R \sin \vartheta} \mathbf{k} = e_R \cos \vartheta - e_\vartheta \sin \vartheta \quad (\text{III. 8.2})$$

и по дериwационным формулам (III. 4.7)

$$\frac{\partial e_s}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial e_s}{\partial \vartheta} = e_\lambda \times e_s, \quad \frac{\partial e_s}{\partial \lambda} = e_R \times e_s \cos \vartheta - e_\vartheta \times e_s \sin \vartheta, \quad (\text{III. 8.3})$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_R}{\partial \vartheta} &= e_\vartheta, & \frac{\partial e_\vartheta}{\partial \vartheta} &= -e_R, & \frac{\partial e_\lambda}{\partial \vartheta} &= 0, \\ \frac{\partial e_R}{\partial \lambda} &= e_\lambda \sin \vartheta, & \frac{\partial e_\vartheta}{\partial \lambda} &= e_\lambda \cos \vartheta, & \frac{\partial e_\lambda}{\partial \lambda} &= -(e_R \sin \vartheta + e_\vartheta \cos \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 8.4})$$

Выражение лапласиана в сферических координатах записывается в виде

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right), \quad (\text{III. 8.5})$$

причем введена новая переменная

$$\mu = \cos \vartheta.$$

III. 9. Тела вращения. Формулы вида (III. 1.1.), выражающие декартовы координаты через криволинейные q^1 , q^2 , $q^3 = \varphi$,

где φ — азимутальный угол цилиндрической системы координат, задаются в виде

$$x_1 = r(q^1, q^2) \cos \varphi, \quad x_2 = r(q^1, q^2) \sin \varphi, \quad x_3 = z(q^1, q^2). \quad (\text{III. 9.1})$$

Координатными поверхностями q_0^1, q_0^2 являются поверхности вращения вокруг оси Ox_3 , меридиональные сечения которых плоскостями φ^0 представляют ортогональные семейства кривых

$$\left. \begin{aligned} q^1 = q_0^1: \quad r = r(q_0^1, q^2), \quad z = z(q_0^1, q^2), \\ q^2 = q_0^2: \quad r = r(q^1, q_0^2), \quad z = z(q^1, q_0^2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 9.2})$$

Вектор-радиус точки $R(q^1, q^2, \varphi)$ представляется в виде

$$R = r(q^1, q^2) e_r + z(q^1, q^2) k. \quad (\text{III. 9.3})$$

Отсюда имеем

$$R_s = \frac{\partial r}{\partial q^s} e_r + \frac{\partial z}{\partial q^s} k \quad (s = 1, 2), \quad R_3 = r(q^1, q^2) e_\varphi, \quad (\text{III. 9.4})$$

так что

$$H_s^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial q^s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^s} \right)^2, \quad H_3 = r, \quad (\text{III. 9.5})$$

а условие ортогональности семейств кривых (III. 9.2) записывается в виде

$$R_1 \cdot R_2 = \frac{\partial r}{\partial q^1} \frac{\partial r}{\partial q^2} + \frac{\partial z}{\partial q^1} \frac{\partial z}{\partial q^2} = 0. \quad (\text{III. 9.6})$$

Единичные векторы ортогонального триэдра касательных к координатным линиям $[q^s]$ представляются в виде

$$e_s = \frac{1}{H_s} R_s \quad (s = 1, 2), \quad e_3 = e_\varphi. \quad (\text{III. 9.7})$$

Они связаны с единичными векторами k, e_r цилиндрической системы осей равенствами

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial z}{\partial q^1} k + \frac{1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q^1} e_r = \frac{1}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q^2} k - \frac{1}{H_2} \frac{\partial z}{\partial q^2} e_r, \\ e_2 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial z}{\partial q^2} k + \frac{1}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q^2} e_r = - \frac{1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q^1} k + \frac{1}{H_1} \frac{\partial z}{\partial q^1} e_r. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 9.8})$$

Отметим еще, что третья группа формул (III. 3.5) приобретает вид

$$\frac{\partial q^s}{\partial z} = \frac{1}{H_s^2} \frac{\partial z}{\partial q^s}, \quad \frac{\partial q^s}{\partial r} = \frac{1}{H_s^2} \frac{\partial r}{\partial q^s}. \quad (\text{III. 9.9})$$

Выражения векторов $\overset{s}{o}$ по (III. 4.5) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \overset{s}{o} &= \text{grad } H_s \times e_s \quad (s = 1, 2), \\ \overset{3}{o} &= - \frac{1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q^1} e_2 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q^2} e_1 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial z}{\partial q^2} e_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial z}{\partial q^1} e_1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 9.10})$$

и дериwационные формулы будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_s}{\partial q^t} &= e_t \frac{\partial H_t}{H_s \partial q^s} - \delta_{st} \operatorname{grad} H_t, \quad \frac{\partial e_s}{\partial \varphi} = e_\varphi \frac{\partial r}{H_s \partial q^s} \quad (s, t = 1, 2), \\ \frac{\partial e_\varphi}{\partial q^t} &= 0, \quad \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = - \left(\frac{e_1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q^1} + \frac{e_2}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.9.11})$$

Упрощаются зависимости Ляме; две из них тождественно удовлетворяются, а остающиеся четыре записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q^1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial r}{\partial q^2} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q^2} + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial r}{\partial q^1} \frac{\partial H_2}{\partial q^1} &= 0, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial q^1 \partial q^2} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q^1} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial r}{\partial q^2} \frac{\partial H_2}{\partial q^1} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial q^1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.9.12})$$

III.10. Вырожденные эллиптические координаты. Одним из семейств координатных поверхностей служат эллипсоиды вращения вокруг оси Ox_3 ; по отдельности рассматриваются два случая: первый, когда ось вращения эллипсоида является его меньшей осью (сжатые эллипсоиды, сфероиды), второй — его большей осью.

1°. Связь цилиндрических координат с криволинейными

$$q^1 = s, \quad q^2 = \mu, \quad q^3 = \varphi$$

задается формулами

$$r = a \sqrt{1 + s^2} \sqrt{1 - \mu^2}, \quad z = a s \mu. \quad (\text{III.10.1})$$

Координатными поверхностями $s = \text{const}$ служат сжатые эллипсоиды вращения, а $\mu = \text{const}$ — однополые гиперболоиды вращения вокруг оси z . Два взаимно ортогональных семейства кривых в меридиональном сечении $\varphi = \text{const}$ представляют эллипсы

$$\frac{r^2}{1 + s^2} + \frac{z^2}{s^2} - a^2 = 0 \quad (\text{III.10.2})$$

и софокусные с ними гиперболы

$$\frac{r^2}{1 - \mu^2} - \frac{z^2}{\mu^2} - a^2 = 0. \quad (\text{III.10.3})$$

«Эллипсоид», на котором $s = 0$, вырождается в круговую пластинку радиуса a

$$r = a \sqrt{1 - \mu^2}, \quad z = 0, \quad (\text{III.10.4})$$

на «верхней» стороне которой $\mu > 0$, а на «нижней» $\mu < 0$.

«Гиперболоид» $\mu = 0$ представляет часть плоскости $z = 0$ вне круга радиуса

$$r = a \sqrt{1 + s^2}, \quad z = 0. \quad (\text{III. 10.5})$$

Окружность $r = a$ в плоскости $z = 0$ является геометрическим местом фокусов поверхностей (III. 10.2), (III. 10.3) (фокальный круг). На нем $\mu = 0, s = 0$.

Область задания параметров s, μ при решении краевых задач для эллипсоидов определяется неравенствами

$$0 \leq s < \infty, \quad |\mu| \leq 1, \quad (\text{III. 10.6})$$

а для гиперболоидов — неравенствами

$$-\infty < s < \infty, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (\text{III. 10.7})$$

Коэффициенты Ляме вычисляются по формулам (III. 9.5):

$$\left. \begin{aligned} H_1 = H_s = a \sqrt{\frac{s^2 + \mu^2}{1 + s^2}}, \quad H_2 = H_\mu = a \sqrt{\frac{s^2 + \mu^2}{1 - \mu^2}}, \\ H_3 = H_\varphi = a \sqrt{(1 + s^2)(1 - \mu^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 10.8})$$

так что якобиан преобразования оказывается равным

$$\sqrt{g} = a^3 (s^2 + \mu^2)$$

и фокальный круг является особой линией преобразования.

Выражения единичных векторов триэдра касательных к координатным линиям $[q^s]$ или, что (в рассматриваемом случае ортогональной системы) то же самое, нормалей к поверхностям $q^s = \text{const}$ через единичные векторы цилиндрической системы задаются формулами

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + \mu^2}} (k_\mu \sqrt{1 + s^2} + e_r s \sqrt{1 - \mu^2}), \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + \mu^2}} (k_s \sqrt{1 - \mu^2} - e_r \mu \sqrt{1 + s^2}), \\ e_3 &= e_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 10.9})$$

Приведем еще выражение лапласиана скаляра; по (III. 5.5) имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{1}{a^2 (s^2 + \mu^2)} \left[\frac{\partial}{\partial s} (1 + s^2) \frac{\partial \psi}{\partial s} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \left(\frac{s^2}{1 + s^2} + \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III. 10.10})$$

2°. Для второй координатной системы — системы вытянутого эллипсоида

$$r = a \sqrt{(1 - \mu^2)(s^2 - 1)}, \quad z = as\mu \quad (\text{III. 10.11})$$

и ортогональные семейства кривых в меридиональной плоскости $\varphi = \text{const}$ представляют эллипсы

$$\frac{r^2}{s^2-1} + \frac{z^2}{s^2} = a^2 \quad (\text{III. 10.12})$$

и софокусные с ними двуполые гиперболоиды

$$\frac{z^2}{\mu^2} - \frac{r^2}{1-\mu^2} - a^2 = 0 \quad (\text{III. 10.13})$$

с общими фокусами в точках $\pm a$ на оси z . Областью задания переменных s, μ служит

$$1 \leq s < \infty, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (\text{III. 10.14})$$

«Эллипсоид» $s = 1$ вырождается в отрезок $|z| \leq a$ оси z , а «гиперболоиды» $\mu = \pm 1$ — в полупрямые $a \leq z < \infty$ и $-\infty < z \leq -a$ этой оси. Коэффициенты Ляме равны

$$H_1 = H_s = a \sqrt{\frac{s^2 - \mu^2}{s^2 - 1}}, \quad H_2 = H_\mu = a \sqrt{\frac{s^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad (\text{III. 10.15})$$

$$H_3 = H_\varphi = a \sqrt{(s^2 - 1)(1 - \mu^2)}.$$

Выражение лапласиана имеет вид

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2 (s^2 - \mu^2)} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \left(\frac{s^2}{s^2 - 1} + \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (\text{III. 10.16})$$

III. 11. Эллиптические координаты (общий случай). Рассматривается эллипсоид

$$\frac{x_1^2}{\rho_0^2} + \frac{x_2^2}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{x_3^2}{\rho_0^2 - 1} - a^2 = 0 \quad (\rho_0 > 1 > e) \quad (\text{III. 11.1})$$

и семейство софокусных с ним поверхностей

$$\frac{x_1^2}{\sigma} + \frac{x_2^2}{\sigma - e^2} + \frac{x_3^2}{\sigma - 1} - a^2 = 0, \quad (\text{III. 11.2})$$

где σ — переменный параметр. Считая x_1, x_2, x_3 заданными, будем рассматривать (III. 11.2) как кубическое уравнение относительно σ :

$$Q(\sigma) = \frac{P(\sigma)}{f(\sigma)} = 0, \quad (\text{III. 11.3})$$

в котором

$$P(\sigma) = x_1^2(\sigma - e^2)(\sigma - 1) + x_2^2(\sigma - 1)\sigma + x_3^2(\sigma - e^2)\sigma - a^2 f(\sigma), \quad (\text{III. 11.4})$$

$$f(\sigma) = \sigma(\sigma - e^2)(\sigma - 1). \quad (\text{III. 11.5})$$

Придавая σ положительные значения, получим следующую таблицу чередования знаков:

$$P(0) > 0, \quad P(e^2) < 0, \quad P(1) > 0, \quad P(\infty) < 0.$$

Из нее следует, что корни полинома $P(\sigma)$ расположены в промежутках $(0, e^2)$, $(e^2, 1)$, $(1, \infty)$. Обозначим их соответственно v^2 , μ^2 , ρ^2 :

$$0 \leq v^2 \leq e^2, \quad e^2 \leq \mu^2 \leq 1, \quad 1 \leq \rho^2 < \infty. \quad (\text{III. 11.6})$$

Этим определяются три семейства софокусных поверхностей второго порядка: двуполые гиперболоиды $v = \text{const}$

$$\frac{x_1^2}{v^2} - \frac{x_2^2}{e^2 - v^2} - \frac{x_3^2}{1 - v^2} - a^2 = 0, \quad (\text{III. 11.7})$$

однополые гиперболоиды

$$\frac{x_1^2}{\mu^2} + \frac{x_2^2}{\mu^2 - e^2} - \frac{x_3^2}{1 - \mu^2} - a^2 = 0 \quad (\text{III. 11.8})$$

и эллипсоиды

$$\frac{x_1^2}{\rho^2} + \frac{x_2^2}{\rho^2 - e^2} + \frac{x_3^2}{\rho^2 - 1} - a^2 = 0. \quad (\text{III. 11.9})$$

При принятом обозначении его корней полином $P(\sigma)$ может быть записан в виде

$$P(\sigma) = -a^2(\sigma - v^2)(\sigma - \mu^2)(\sigma - \rho^2), \quad (\text{III. 11.10})$$

и по (III. 11.2), (III. 11.3) приходим к основному тождеству:

$$\frac{x_1^2}{\sigma} + \frac{x_2^2}{\sigma - e^2} + \frac{x_3^2}{\sigma - 1} - a^2 = -a^2 \frac{(\sigma - v^2)(\sigma - \mu^2)(\sigma - \rho^2)}{f(\sigma)}. \quad (\text{III. 11.11})$$

Из него легко выразить x_1^2 , x_2^2 , x_3^2 через введенные параметры v , μ , ρ . Так, умножая обе части этого тождества на σ и затем полагая $\sigma = 0$, найдем x_1^2 , а умножением на $\sigma - e^2$, $\sigma - 1$ и последующей заменой σ на e^2 и соответственно σ на 1 получим x_2^2 и x_3^2 . Приходим к равенствам

$$\left. \begin{aligned} e^2 x_1^2 &= a^2 \rho^2 \mu^2 v^2, \\ (1 - e^2) e^2 x_2^2 &= a^2 (\rho^2 - e^2) (\mu^2 - e^2) (e^2 - v^2), \\ (1 - e^2) x_3^2 &= a^2 (\rho^2 - 1) (1 - \mu^2) (1 - v^2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 11.12})$$

Таким образом, через корни полинома (III. 11.4) при заданных координатах x_1 , x_2 , x_3 точки M определяются единственным образом три координатные поверхности (III. 11.7) — (III. 11.9), проходящие через эту точку; обратно, задав ρ , μ , v , по (III. 11.12)

определяем с точностью до знака декартовы координаты точек пересечения этих поверхностей в каждом из восьми октантов системы осей x_1, x_2, x_3 .

Числами ρ, μ, ν :

$$q^1 = \rho, \quad q^2 = \mu, \quad q^3 = \nu, \quad (\text{III. 11.13})$$

определяется криволинейная система эллиптических координат. Положение точки на поверхности эллипсоида $\rho = \text{const}$ задается параметрами μ, ν , и заданная на нем функция может быть выражена через эти параметры. В частности, при $\rho = 1$

$$e^2 x_1^2 = a^2 \mu^2 \nu^2, \quad e^2 x_2^2 = a^2 (\mu^2 - e^2) (e^2 - \nu^2), \quad x_3 = 0. \quad (\text{III. 11.14})$$

Кривые $\mu = \text{const}$ представляют эллипсы E с полуосями $a\mu, a\sqrt{\mu^2 - e^2}$:

$$(E) \quad \frac{x_1^2}{\mu^2} + \frac{x_2^2}{\mu^2 - e^2} - a^2 = 0, \quad (\text{III. 11.15})$$

расположенные между отрезком $(-ae, ae)$ оси x_1 и эллипсом (E_0) с полуосями $a, a\sqrt{1 - e^2}$:

$$(E_0) \quad x_1^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2} - a^2 = 0. \quad (\text{III. 11.16})$$

Итак, «эллипсоид» $\rho = 1$ представляет эллиптическую пластинку в плоскости $x_3 = 0$, ограниченную эллипсом (E_0) .

Однополый гиперболоид при $\mu = 1$ вырождается в часть плоскости $x_3 = 0$ вне эллипса (E_0) , на которой

$$e^2 x_1^2 = a^2 \rho^2 \nu^2, \quad e^2 x_2^2 = a^2 (\rho^2 - e^2) (e^2 - \nu^2). \quad (\text{III. 11.17})$$

Эллипс (E_0) является линией пересечения поверхностей $\rho = 1, \mu = 1$. Он представляет геометрическое место фокусов системы координатных поверхностей.

Переходим к вычислению коэффициентов Ляме. По (III. 11.12)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{x_1} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\nu}{\nu}, \\ \frac{dx_2}{x_2} &= \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - e^2} + \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - e^2} - \frac{\nu d\nu}{e^2 - \nu^2}, \\ \frac{dx_3}{x_3} &= \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - 1} - \frac{\mu d\mu}{1 - \mu^2} - \frac{\nu d\nu}{1 - \nu^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 11.18})$$

Отсюда получаем таблицу производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} &= \frac{x_1}{\rho}, & \frac{\partial x_2}{\partial \rho} &= \frac{x_2 \rho}{\rho^2 - e^2}, & \frac{\partial x_3}{\partial \rho} &= \frac{x_3 \rho}{\rho^2 - 1}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \mu} &= \frac{x_1}{\mu}, & \frac{\partial x_2}{\partial \mu} &= \frac{x_2 \mu}{\mu^2 - e^2}, & \frac{\partial x_3}{\partial \mu} &= -\frac{x_3 \mu}{1 - \mu^2}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \nu} &= \frac{x_1}{\nu}, & \frac{\partial x_2}{\partial \nu} &= -\frac{x_2 \nu}{e^2 - \nu^2}, & \frac{\partial x_3}{\partial \nu} &= -\frac{x_3 \nu}{1 - \nu^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 11.19})$$

и по (III. 2.4) находим

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \rho}\right)^2 = \rho^2 \left[\frac{x_1^2}{\rho^4} + \frac{x_2^2}{(\rho^2 - e^2)^2} + \frac{x_3^2}{(\rho^2 - 1)^2} \right],$$

$$g_{12} = g_{\rho\mu} = \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial x_1}{\partial \mu} + \frac{\partial x_2}{\partial \rho} \frac{\partial x_2}{\partial \mu} + \frac{\partial x_3}{\partial \rho} \frac{\partial x_3}{\partial \mu} =$$

$$= \rho\mu \left[\frac{x_1^2}{\rho^2\mu^2} + \frac{x_2^2}{(\rho^2 - e^2)(\mu^2 - e^2)} + \frac{x_3^2}{(\rho^2 - 1)(\mu^2 - 1)} \right]$$

и т. д. При $s \neq k$, заменив в выражениях g_{sk} декартовы координаты их значениями (III. 11.12), получим

$$g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0, \quad (\text{III. 11.20})$$

чем устанавливается ортогональность системы эллиптических координат. Имеем, далее,

$$\left. \begin{aligned} g_{\rho\rho} &= H_\rho^2 = \rho^2 \left[\frac{x_1^2}{\rho^4} + \frac{x_2^2}{(\rho^2 - e^2)^2} + \frac{x_3^2}{(\rho^2 - 1)^2} \right] = \rho^2 D_\rho^2, \\ g_{\mu\mu} &= H_\mu^2 = \mu^2 \left[\frac{x_1^2}{\mu^4} + \frac{x_2^2}{(\mu^2 - e^2)^2} + \frac{x_3^2}{(1 - \mu^2)^2} \right] = \mu^2 D_\mu^2, \\ g_{\nu\nu} &= H_\nu^2 = \nu^2 \left[\frac{x_1^2}{\nu^4} + \frac{x_2^2}{(e^2 - \nu^2)^2} + \frac{x_3^2}{(1 - \nu^2)^2} \right] = \nu^2 D_\nu^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 11.21})$$

Исключение из этих выражений декартовых координат проще всего осуществить, дифференцируя по σ основное тождество (III. 11.11)

$$\frac{x_1^2}{\sigma^2} + \frac{x_2^2}{(\sigma - e^2)^2} + \frac{x_3^2}{(\sigma - 1)^2} = \frac{a^2}{f(\sigma)} \left[\frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)} (\sigma - \nu^2)(\sigma - \mu^2)(\sigma - \rho^2) + \right.$$

$$\left. + (\sigma - \mu^2)(\sigma - \rho^2) + (\sigma - \rho^2)(\sigma - \nu^2) + (\sigma - \nu^2)(\sigma - \mu^2) \right]$$

и последовательно полагая $\sigma = \rho^2$, $\sigma = \mu^2$, $\sigma = \nu^2$. Получаем

$$H_\rho^2 = \rho^2 \frac{a^2}{f(\rho^2)} (\rho^2 - \nu^2)(\rho^2 - \mu^2) = a^2 \frac{(\rho^2 - \nu^2)(\rho^2 - \mu^2)}{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}$$

и т. д. Приходим к равенствам

$$\left. \begin{aligned} H_\rho &= a \sqrt{\frac{(\rho^2 - \nu^2)(\rho^2 - \mu^2)}{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}}, \quad H_\mu = a \sqrt{\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - e^2)(1 - \mu^2)}}, \\ H_\nu &= a \sqrt{\frac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(e^2 - \nu^2)(1 - \nu^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 11.22})$$

При обозначениях

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\rho) &= \sqrt{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}, \\ \Delta_1(\mu) &= \sqrt{(\mu^2 - e^2)(1 - \mu^2)}, \\ \Delta(\nu) &= \sqrt{(e^2 - \nu^2)(1 - \nu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 11.23})$$

якобиан оказывается равным

$$\sqrt{g} = H_\rho H_\mu H_\nu = a^3 \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\Delta(\rho) \Delta_1(\mu) \Delta(\nu)}, \quad (\text{III. 11.24})$$

и выражение лапласиана по (III. 5.5) приводится к виду

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \left[(\mu^2 - \nu^2) \Delta(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta(\rho) \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \right. \\ \left. + (\rho^2 - \nu^2) \Delta_1(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \Delta_1(\mu) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + (\rho^2 - \mu^2) \Delta(\nu) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta(\nu) \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right]. \quad (\text{III. 11.25})$$

Сославшись на (III. 3.5) и на (III. 11.19), отметим также формулы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} &= \frac{1}{H_\rho^2} \frac{x_1}{\rho} = \frac{x_1}{\rho^3 D_\rho^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = \frac{1}{H_\rho^2} \frac{x_2 \rho}{\rho^2 - e^2} = \frac{x_2}{\rho(\rho^2 - e^2) D_\rho^2}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_3} &= \frac{1}{H_\rho^2} \frac{x_3 \rho}{\rho^2 - 1} = \frac{x_3}{\rho(\rho^2 - 1) D_\rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 11.26})$$

Предельный переход к координатам сплюсненного эллипсоида (сфероида), назовем их здесь s, q, φ , осуществляется, если принять, что $e = 0, \nu \rightarrow 0$, но ν/e остается конечным, и положить

$$\rho^2 = 1 + s^2, \quad \mu^2 = 1 - q^2, \quad \nu = e \cos \varphi. \quad (\text{III. 11.27})$$

Тогда по (III. 11.12) получим

$$x_1 = \sqrt{1 + s^2} \sqrt{1 - q^2} \cos \varphi, \quad x_2 = \sqrt{1 + s^2} \sqrt{1 - q^2} \sin \varphi, \quad x_3 = asq, \quad (\text{III. 11.28})$$

что и требуется [см. (III. 10.1)]. Здесь q — координата, которая в п. III. 10 обозначалась μ .

Для перехода к координатам вытянутого эллипсоида полагаем

$$\rho = s, \quad e \rightarrow 1, \quad \frac{\nu}{e} \rightarrow q, \quad \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{1 - e^2}} \rightarrow \sin \varphi, \quad \sqrt{\frac{\mu^2 - e^2}{1 - e^2}} \rightarrow \cos \varphi.$$

Тогда по (III. 11.12)

$$x_1 = asq, \quad x_2 = a \sqrt{s^2 - 1} \sqrt{1 - q^2} \cos \varphi, \quad x_3 = a \sqrt{s^2 - 1} \sqrt{1 - q^2} \sin \varphi \quad (\text{III. 11.29})$$

и координатными поверхностями $s = \text{const}$ служат эллипсоиды вращения вокруг оси x_1 :

$$\frac{x_1^2}{a^2 s^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{a^2 (s^2 - 1)} - 1 = 0. \quad (\text{III. 11.30})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА В КОСОУГОЛЬНОМ БАЗИСЕ

IV.1. Основной и взаимный базисы. В рассмотрение вводятся три некопланарных вектора, обозначаемые e_1, e_2, e_3 . Это не единичные и не взаимно ортогональные векторы. Объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, обозначается v :

$$v = e_1 \cdot (e_2 \times e_3). \quad (\text{IV.1.1})$$

Распоряжаясь нумерацией векторов, можно принять $v > 0$. Векторы e_1, e_2, e_3 образуют основной базис. Взаимный базис определяется векторами e^1, e^2, e^3 :

$$e^1 = \frac{1}{v} e_2 \times e_3, \quad e^2 = \frac{1}{v} e_3 \times e_1, \quad e^3 = \frac{1}{v} e_1 \times e_2, \quad (\text{IV.1.2})$$

и из этого определения следуют соотношения

$$e^s \cdot e_k = g_k^s = \begin{cases} 0, & s \neq k, \\ 1, & s = k. \end{cases} \quad (\text{IV.1.3})$$

В рассмотрение вводятся также скалярные произведения векторов основного и взаимного базисов

$$e_k \cdot e_s = g_{ks} = g_{sk}, \quad e^k \cdot e^s = g^{ks} = g^{sk}. \quad (\text{IV.1.4})$$

Нетрудно проверить, что базис, взаимный со взаимным, — это основной базис. Действительно,

$$v^* = e^1 \cdot (e^2 \times e^3) = \frac{1}{v^2} e^1 \cdot [(e_3 \times e_1) \times (e_1 \times e_2)] = \frac{1}{v} e^1 \cdot e_1 = \frac{1}{v}, \quad (\text{IV.1.5})$$

и поэтому

$$\frac{1}{v^*} e^2 \times e^3 = \frac{1}{v} (e_3 \times e_1) \times (e_1 \times e_2) = e_1,$$

что и требовалось.

IV.2. Вектор в косоугольном базисе. Вектор a может быть представлен его разложениями в основном и во взаимном базисах:

$$a = a^s e_s = a_s e^s. \quad (\text{IV.2.1})$$

Здесь s — немой индекс. В ранее принятых обозначениях, когда использовались ортогональные декартовы координаты (ортогональный триэдр единичных векторов i_s), не было нужды в различении верхних и нижних индексов. В общем тензорном анализе оно должно последовательно проводиться; немые индексы всегда располагаются один сверху, второй снизу, а свободные имеют одинаковое расположение в левой и правой частях формулы. По повторяющемуся дважды снизу или дважды сверху индексу суммирование не ведется. Например $g_s^s = 3$ (три слагаемых), тогда как запись g_{ss} представляет одночлен (значение g_{st} при $s = t$).

По (IV. 2.1) и (IV. 1.3) имеем

$$a^s = a \cdot e^s, \quad a_s = a \cdot e_s. \quad (\text{IV. 2.2})$$

Величины a^s называют контравариантными, a_s — ковариантными компонентами a . Они равны произведениям проекций вектора a на векторы взаимного и соответственно основного базисов на модули этих векторов:

$$|e^s| = \sqrt{g^{ss}}, \quad |e_s| = \sqrt{g_{ss}}. \quad (\text{IV. 2.3})$$

Другое истолкование основывается на представлении (IV. 2.1); каждое слагаемое в суммах $a^s e_s$, $a_s e^s$ представляет ребро косоугольного параллелепипеда, построенного на векторах основного и взаимного базисов, a — диагональ этого параллелепипеда. Это показано на рис. 51, построенном в предположении, что вектор e_3 перпендикулярен плоскости векторов e_1, e_2 , а вектор a расположен в ней. Пояснение терминов «ко-» и «контравариантный» дается ниже (п. IV. 6).

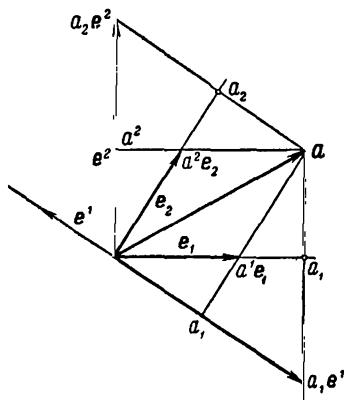


Рис. 51.

Формулы, выражающие одни компоненты через другие, следуют из (IV. 1.3), (IV. 1.4):

$$a^s = g^{sk} a_k, \quad a_s = g_{sk} a^k. \quad (\text{IV. 2.4})$$

Величины

$$\frac{a_s}{\sqrt{g_{ss}}} = a_{(s)}, \quad \frac{a^s}{\sqrt{g^{ss}}} = a^{(s)} \quad (\text{IV. 2.5})$$

называются физическими компонентами a ; они равны проекциям этого вектора на e_s и e^s . Квадрат величины вектора по (IV. 2.1)

можно представить в одном из видов

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^s \mathbf{e}_s \cdot a^k \mathbf{e}_k = g_{sk} a^s a^k, \\ a^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_s \mathbf{e}^s \cdot a_k \mathbf{e}^k = g^{sk} a_s a_k, \\ a^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_s \mathbf{e}^s \cdot a^k \mathbf{e}_k = g_k^s a_s a^k = a_s a^s. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 2.6})$$

IV. 3. Метрический тензор. Из формул (IV.2.6) следует, что величины g_{sk} (g^{sk}) являются коэффициентами инвариантной квадратичной формы переменных a^s (или a_s), а отсюда по сказанному в п. I. 4 следует заключить, что этими величинами определен симметричный тензор второго ранга, обозначаемый \hat{g} ; g_{sk} и g^{ks} — его ко- и контравариантные компоненты; его смешанные компоненты g_k^s суть коэффициенты билинейной формы переменных a_s , a^k . Тензор \hat{g} определяет в принятом базисе квадрат длины. Это объясняет его наименование — метрический тензор. Диадное представление тензора \hat{g} записывается в одном из трех видов

$$\hat{g} = g^{sk} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k = g_{sk} \mathbf{e}^s \mathbf{e}^k = g_k^s \mathbf{e}^s \mathbf{e}_s = \mathbf{e}^s \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_s \mathbf{e}^s. \quad (\text{IV. 3.1})$$

Из них следует:

$$g^{sk} \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_q = \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_r \mathbf{e}^r \cdot \mathbf{e}_q; \quad g^{sk} g_s^m g_{kq} = g_r^m g_q^r,$$

или

$$g^{mk} g_{kq} = g_q^m. \quad (\text{IV. 3.2})$$

Этой формулой определяется правило свертывания по немому индексу с помощью компонент метрического тензора, тогда как формулы (IV.2.4) иллюстрируют операции подъема и опускания индекса — перехода от ковариантных компонент к контравариантным (и обратно) путем умножения на g^{sk} (на g_{sk}) с последующим свертыванием по немому индексу.

К метрическому тензору в косоугольном базисе отходит роль единичного тензора. Это следует из того, что его произведение на вектор \mathbf{a} справа или слева приводит к тому же вектору:

$$\left. \begin{aligned} \hat{g} \cdot \mathbf{a} &= g_{sk} \mathbf{e}^s \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}^s g_{sk} a^k = \mathbf{e}^s a_s = \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \cdot \hat{g} &= \mathbf{a} \cdot g^{sk} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k = a_s g^{sk} \mathbf{e}_k = a^k \mathbf{e}_k = \mathbf{a}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 3.3})$$

Еще проще это доказывается, если исходить из билинейного представления

$$\mathbf{a} \cdot \hat{g} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^s \mathbf{e}_s = a^s \mathbf{e}_s = \mathbf{a}, \quad \hat{g} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}^s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}^s a_s = \mathbf{a}.$$

Обозначим на минуту \hat{g} в его контравариантном представлении через \hat{g}^* . Тогда

$$\hat{g} \cdot \hat{g}^* = g_{sk} \mathbf{e}^s \mathbf{e}^k \cdot g^{rt} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_t = g_{sk} g^{rt} g_r^k \mathbf{e}^s \mathbf{e}_t = g_{st} g^{kt} \mathbf{e}^s \mathbf{e}_t = g_s^t \mathbf{e}^s \mathbf{e}_t = \mathbf{e}^s \mathbf{e}_s = \hat{g} = \hat{E},$$

так что

$$\hat{g}^* = \hat{g}^{-1}. \quad (\text{IV. 3.4})$$

Этого следовало ожидать, поскольку свойство единичного тензора быть равным своему обратному сохраняется в любом координатном базисе, а \hat{g}^* — это тот же тензор \hat{g} , но иначе обозначенный.

Из (IV. 3.4) следует, что матрицы $\|g_{sk}\|$ и $\|g^{sk}\|$ обратные; поэтому, обозначив $A^{sk} = A^{ks}$ алгебраическое дополнение элемента g_{sk} первой матрицы, имеем

$$g^{sk} = \frac{A^{sk}}{g}, \quad (\text{IV. 3.5})$$

где $g = |g_{sk}|$ — определитель матрицы ковариантных компонент метрического тензора. К этому же легко прийти, рассматривая произведение определителей g и g^* матриц $\|g_{sk}\|$ и $\|g^{sk}\|$.

Площадь o параллелограмма, построенного на векторах e_2, e_3^*), может быть представлена в двух видах:

$$o = |e_2 \times e_3| = v |e^1| = v \sqrt{g^{11}},$$

$$o = \sqrt{e_2 \cdot e_2 e_3 \cdot e_3 - (e_2 \cdot e_3)^2} = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} = \sqrt{A^{11}} = \sqrt{g^{11}g}.$$

Итак,

$$v = \sqrt{g}, \quad o = \sqrt{g^{ss}g}. \quad (\text{IV. 3.6})$$

IV. 4. Тензор Леви-Чивита. Его компоненты в косоугольном базисе, основном и взаимном, определяются подобно (I. 2.1) формулами

$$\epsilon_{skt} = e_s \cdot (e_k \times e_t), \quad \epsilon^{skt} = e^s \cdot (e^k \times e^t) \quad (\text{IV. 4.1})$$

и будут равны нулю, если в числе индексов skt имеются одинаковые, равны \sqrt{g} в первом определении и $1/\sqrt{g}$ — во втором, когда индексы следуют в порядке 123, 231, 312; при нарушении этого порядка они соответственно равны $-\sqrt{g}$, $-1/\sqrt{g}$. Сказанное может быть записано и в виде

$$\epsilon_{skt} = \sqrt{g} e_{skt}, \quad \epsilon^{skt} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{skt}, \quad (\text{IV. 4.2})$$

где символам e_{skt}, e^{skt} приписываются значения нуль или ± 1 по сформулированным правилам.

С помощью этих определений можно составить выражений ко- и контравариантных компонент векторного произведения:

$$\begin{aligned} c &= a \times b = a^k b^t e_k \times e_t, & c_s &= c \cdot e_s = a^k b^t \epsilon_{kts}, \\ c &= a \times b = a_k b_t e^k \times e^t, & c^s &= c \cdot e^s = a_k b_t \epsilon^{kts}, \end{aligned}$$

*) Индекс над буквой применен для обозначения номера величины; характер ее вариантности этим индексом не указывается.

так что

$$c_s = \epsilon_{skt} a^k b^t = \sqrt{g} e_{skt} a^k b^t, \quad c^s = \epsilon^{skt} a_k b_t = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{skt} a_k b_t. \quad (\text{IV. 4.3})$$

В частности,

$$e_k \times e_s = \sqrt{g} e_{kst} e^t, \quad e^k \times e^s = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{kst} e_t, \quad (\text{IV. 4.4})$$

и обратные формулы имеют вид

$$e^t = \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{kst} e_k \times e_s, \quad e_t = \frac{1}{2} \sqrt{g} e_{kst} e^k \times e^s. \quad (\text{IV. 4.5})$$

IV.5. Тензоры в косоугольном базисе. С помощью векторов основного и взаимного базисов образуется четыре типа диад:

$$e_s e_k, \quad e^s e^k, \quad e_s e^k, \quad e^s e_k. \quad (\text{IV. 5.1})$$

Им соответствуют выражения вида

$$p^{sk} e_s e_k, \quad p_{sk} e^s e^k, \quad p^s_k e_s e^k, \quad p^k_s e^s e_k. \quad (\text{IV. 5.2})$$

Если их произведения справа на вектор a определяют один и тот же вектор b , то этим они представляют различные записи одной и той же инвариантной величины — тензора \hat{P} второго ранга:

$$b = \hat{P} \cdot a = p^{sk} e_s a_k = p_{sk} e^s a^k = p^s_k e_s a^k = p^k_s e^s a_k, \quad (\text{IV. 5.3})$$

причем

$$p^{sk}, \quad p_{sk}, \quad p^s_k, \quad p^k_s$$

определяют контра-, ко-, контрако- и коконтравариантные компоненты этого тензора. Связь между ними легко устанавливается. Действительно, по (IV. 5.3) и (IV. 2.4)

$$b^s = p^{sk} a_k = g^{sr} b_r = g^{sr} p_{rm} a^m = p_{rm} g^{sr} g^{km} a_k,$$

так что

$$p^{sk} = g^{sr} g^{km} p_{rm}$$

и, далее, по (IV. 3.2)

$$p^{sk} g_{sq} g_{kt} = g^{sr} g_{sq} g^{km} g_{kt} p_{rm} = g^r_q g^m_t p_{rm} = p_{qt}.$$

Приходим к соотношениям

$$p^{sk} = g^{sr} g^{km} p_{rm}, \quad p_{sk} = g_{sr} g_{km} p^{rm}, \quad p^s_k = g^{sr} p_{rk}, \quad p^k_s = g^{kr} p_{sr} \quad (\text{IV. 5.4})$$

и т. д., подтверждающим те же легко запоминаемые правила подъема, опускания и свертывания индексов.

Для симметричного тензора $p^{sk} = p^{ks}$, $p_{sk} = p_{ks}$ и нет нужды указывать место индекса смешанных компонент ($p^s_k = p^s_k = p^s_k$). Свойство тензора быть симметричным инвариантно по отноше-

нию к выбору базиса. Тензор, симметричный в ортогональном базисе единичных векторов i_s , остается симметричным в косоугольном базисе; действительно, называя $p_{(st)}$ компоненты \hat{P} в базисе i_s , имеем

$$\begin{aligned} e_i \cdot \hat{P} \cdot e_k &= p^{ik} = p_{(st)} e_i \cdot i_s i_t \cdot e_k = p_{(ts)} e_i \cdot i_t i_s \cdot e_k = \\ &= p_{(st)} e_i \cdot i_t i_s \cdot e_k = p^{ki}. \end{aligned} \quad (\text{IV. 5.5})$$

Аналогично доказывается, что $p_{ik} = p_{ki}$.

IV. 6. Преобразование базиса. Векторы нового базиса обозначаются e'_s ; они связаны линейными соотношениями с векторами исходного базиса

$$e'_s = c'^r{}_s e_r, \quad c'^r{}_s = e'_s \cdot e^r \quad (\text{IV. 6.1})$$

с определителем $|c'^r{}_s|$, отличным от нуля; обратные соотношения записываются в виде

$$e_s = c^r{}_s e'_r, \quad c^r{}_s = e_s \cdot e'^r, \quad (\text{IV. 6.2})$$

так что

$$e'_s = c'^r{}_s c^k{}_r e'_k, \quad c'^r{}_s c^k{}_r = \delta^k_s = \begin{cases} 0, & s \neq k, \\ 1, & s = k. \end{cases} \quad (\text{IV. 6.3})$$

Формулы, определяющие векторы e'^q взаимного базиса, получим, сославшись на (IV. 3.3) и (IV. 6.2):

$$\left. \begin{aligned} e'^q &= \hat{g} \cdot e'^q = e^r e_r \cdot e'^q = e^r c^q{}_r, \\ e^q &= \hat{g}' \cdot e^q = e'^r e'_r \cdot e^q = e'^r c^q{}_r. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 6.4})$$

Теперь, представив вектор a через его ковариантные компоненты, имеем

$$a = a_q e^q = a_q e'^r c^q{}_r = a'_r e'^r, \quad a'_r = a_q c^q{}_r, \quad (\text{IV. 6.5})$$

и сравнение с (IV. 6.1) показывает, что эти компоненты преобразуются как базисные векторы, чем объясняется их наименование («ковариантные»). Контравариантные компоненты преобразуются как векторы взаимного базиса:

$$a = a^s e_s = a^s c^r{}_s e'_r = a'^r e'_r, \quad a'^r = a^s c^r{}_s. \quad (\text{IV. 6.6})$$

Подобным же образом получим формулы преобразования компонент тензора:

$$p'^{st} = c'^r{}_s c'^q{}_t p_{rq}, \quad p'^{st} = c^s{}_r c^t{}_q p^{rq}, \quad p'^s{}_t = c^s{}_r c'^q{}_t p^r{}_q. \quad (\text{IV. 6.7})$$

IV.7. Главные оси симметричного тензора. Главные инварианты. Основываясь на инвариантном определении п. I.9 главных направлений тензора

$$\hat{P} \cdot n = \lambda n,$$

где n — единичный вектор, имеем

$$p_s^t e^s e_t \cdot n = p_s^t e^s n_t = \lambda e^t n_t = \lambda g_s^t e^s n_t. \quad (\text{IV. 7.1})$$

Приходим к системе трех уравнений

$$(p_s^t - \lambda g_s^t) n_t = 0, \quad (\text{IV. 7.2})$$

в которой неизвестные n_t связаны также соотношением

$$n \cdot n = g^{rt} n_r n_t = 1. \quad (\text{IV. 7.3})$$

Запись характеристического уравнения тензора

$$P_3(\lambda) = |p_s^t - \lambda g_s^t| = 0 \quad (\text{IV. 7.4})$$

отличается от (I. 9.5) только лишь тем, что роль компонент в ортогональной системе отошла к смешанным компонентам. Поэтому в выражения главных инвариантов (I. 10.4), (I. 10.6) достаточно внести измененные обозначения и далее использовать формулы преобразования (IV. 5.4). Получаем

$$I_1(\hat{P}) = p_s^s = g^{sk} p_{ks} = g_{sk} p^{ks}, \quad (\text{IV. 7.5})$$

$$I_3(\hat{P}) = |p_t^t| = |g^{rk} p_{kt}| = |g^{rk}| |p_{kt}| = \frac{1}{g} |p_{kt}| = |g_{tk} p^{kr}| = g |p^{kr}|. \quad (\text{IV. 7.6})$$

Второй главный инвариант вычислим, сославшись на соотношение (I. 10.14):

$$I_2(\hat{P}) = I_1(\hat{P}^{-1}) I_3(\hat{P}). \quad (\text{IV. 7.7})$$

Здесь тензор \hat{P}^{-1} по (I. 7.8) определяется выражением

$$\hat{P}^{-1} = \tilde{p}^{st} e_s e_t, \quad (\text{IV. 7.8})$$

причем

$$\tilde{p}^{st} p_{tq} = \delta_q^s. \quad (\text{IV. 7.9})$$

Тогда

$$\hat{P}^{-1} \cdot \hat{P} = \tilde{p}^{sr} e_s e_r \cdot p_{tq} e^t e^q = \tilde{p}^{sr} p_{rq} e_s e^q = \delta_q^s e_s e^q = e_s e^s = \hat{g},$$

что и требуется; так как \hat{g} — единичный тензор. Было бы ошибкой отождествить \tilde{p}^{st} с контравариантными компонентами \hat{P} ; последние определяются по его ковариантным компонентам с помощью (IV. 5.4), тогда как определение \tilde{p}^{st} требует построения матрицы, обратной $\|p_{st}\|$.

По (IV. 7.5) и (IV. 7.7) теперь получаем

$$I_2(\hat{P}) = \frac{p}{g} g_{st} \tilde{p}^{ts}, \quad p = |p_{st}|. \quad (\text{IV. 7.10})$$

Другую форму записи второго главного инварианта получим, основываясь на соотношении (I. 10.10). Имеем

$$\hat{P}^2 = p_{st} p_{qr} e^s e^r g^{tq}, \quad I_1(\hat{P}^2) = g^{sr} g^{tq} p_{st} p_{qr}$$

и поэтому

$$I_2(\hat{P}) = \frac{1}{2} [I_1^2(\hat{P}) - I_1(\hat{P}^2)] = \frac{1}{2} (g^{st} g^{qr} - g^{sr} g^{tq}) p_{st} p_{qr}. \quad (\text{IV. 7.11})$$

Величину в скобках можно записать также в виде

$$\begin{aligned} e^s \cdot (e^t e^q \cdot e^r - e^r e^t \cdot e^q) &= e^s \cdot [e^q \times (e^t \times e^r)] = \\ &= (e^s \times e^q) \cdot (e^t \times e^r) = \epsilon^{sqm} \epsilon^{trn} e_m \cdot e_n, \end{aligned}$$

так что по (IV. 4.2)

$$I_2(\hat{P}) = \frac{1}{2g} g_{mn} e^{sqm} e^{trn} p_{st} p_{qr}. \quad (\text{IV. 7.12})$$

Конечно, эту же формулу можно получить непосредственно по (IV. 7.10), используя определение (I. 7.11) компонент обратного тензора.

ПРИЛОЖЕНИЕ V

ОПЕРАЦИИ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

V.1. Введение базисов. В отличие от ранее принятого обозначения в этом Приложении декартовы координаты точки обозначаются a_1, a_2, a_3 , а вектор-радиус ее — через r :

$$r = i_s a_s. \quad (V.1.1)$$

Для криволинейных координат сохраняются обозначения q^1, q^2, q^3 Приложения III, так что

$$a_s = a_s(q^1, q^2, q^3), \quad r = r(q^1, q^2, q^3), \quad (V.1.2)$$

причем в области их задания якобиан

$$J = \left| \frac{\partial a_s}{\partial q^k} \right| \quad (V.1.3)$$

отличен от нуля и положителен.

Основной векторный базис определяется тройкой векторов

$$r_s = \frac{\partial r}{\partial q^s}, \quad (V.1.4)$$

и соотношениями (IV.1.2), (IV.4.5) задается взаимный базис

$$r^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kst} r_s \times r_t = \frac{1}{2\sqrt{g}} e^{kst} r_s \times r_t. \quad (V.1.5)$$

В рассмотрение вводится метрический тензор

$$\hat{g} = g_{sk} r^s r^k = g^{sk} r_s r_k = g_k^s r_s r^k = r_s r^s, \quad (V.1.6)$$

причем величины

$$g_{sk} = r_s \cdot r_k, \quad g^{sk} = r^s \cdot r^k, \quad g_k^s = r^s \cdot r_k \quad (V.1.7)$$

представляют его ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты.

Бесконечно малый вектор dr определяется очевидным равенством

$$dr = r_s dq^s, \quad (V.1.8)$$

и квадрат его длины — квадрат линейного элемента — выражается через ковариантные компоненты метрического тензора:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_s dq^s \cdot \mathbf{r}_k dq^k = g_{sk} dq^s dq^k. \quad (\text{V.1.9})$$

С изменением обозначения \mathbf{e}_s на \mathbf{r}_s далее можно повторить все сказанное в Приложении IV.

Ограничимся приведением выражений элемента объема

$$d\tau = \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3 \quad (\text{V.1.10})$$

и элементов поверхностей

$$d\sigma^1 = \sqrt{g g^{11}} dq^2 dq^3, \quad d\sigma^2 = \sqrt{g g^{22}} dq^3 dq^1, \quad d\sigma^3 = \sqrt{g g^{33}} dq^1 dq^2, \quad (\text{V.1.11})$$

причем

$$g = |g_{st}|, \quad \sqrt{g} = \frac{1}{6} e^{stq} \mathbf{r}_s \cdot (\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_q) = J. \quad (\text{V.1.12})$$

Формулы (V.1.11) можно представить также в единой записи:

$$d\sigma^s = \sqrt{g^{ss}} \frac{d\tau}{dq^s}. \quad (\text{V.1.13})$$

V.2. Производные базисных векторов. Векторы

$$\mathbf{r}_{st} = \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q^t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^t \partial q^s} = \mathbf{r}_{ts} \quad (\text{V.2.1})$$

могут быть представлены их разложениями по базисным векторам. Эти разложения можно записать в виде

$$\mathbf{r}_{st} = \mathbf{r}_{ts} = \left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\} \mathbf{r}_k, \quad (\text{V.2.2})$$

и речь будет идти о вычислении коэффициентов этого разложения, обозначенных фигурными скобками и называемых символами Кристоффеля второго рода; другое их обозначение:

$$\Gamma_{st}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\}. \quad (\text{V.2.3})$$

В формулах (V.2.2) свободные индексы расположены снизу, а немой повторен один раз сверху и второй — снизу. Из самого определения (V.2.2) следует симметрия по нижним индексам:

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} k \\ ts \end{matrix} \right\}, \quad (\text{V.2.4})$$

так что общее число символов равно 18. По (V.2.2) имеем

$$\mathbf{r}_{st} \cdot \mathbf{r}_q = g_{qk} \left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\}. \quad (\text{V.2.5})$$

Величины слева — скалярные произведения $\mathbf{r}_{st} \cdot \mathbf{r}_q$ — были введены в п. III.2, это символы Кристоффеля первого рода (прямые скобки), определяемые формулами (III.2.7):

$$\mathbf{r}_{st} \cdot \mathbf{r}_q = [st, q] = [ts, q] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sq}}{\partial q^t} + \frac{\partial g_{tq}}{\partial q^s} - \frac{\partial g_{st}}{\partial q^q} \right). \quad (\text{V.2.6})$$

Возвращаясь к (V.2.5), имеем

$$[st, q] = g_{kq} \left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} r \\ st \end{matrix} \right\} = g^{rq} [st, q], \quad (\text{V.2.7})$$

причем вторая группа формул получена из первой с помощью (IV.3.2).

Этим вполне определены производные векторов основного базиса. Для вычисления производных векторов взаимного базиса исходим из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial q^t} g_k^s = \frac{\partial}{\partial q^t} \mathbf{r}^s \cdot \mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}^s}{\partial q^t} \cdot \mathbf{r}_k + \mathbf{r}^s \cdot \left\{ \begin{matrix} m \\ tk \end{matrix} \right\} \mathbf{r}_m = 0.$$

Из него имеем

$$\frac{\partial \mathbf{r}^s}{\partial q^t} \cdot \mathbf{r}_k = - \left\{ \begin{matrix} s \\ tk \end{matrix} \right\} \quad (\text{V.2.8})$$

и, сославшись на (IV.2.2), (IV.2.1), найдем

$$\frac{\partial \mathbf{r}^s}{\partial q^t} = - \left\{ \begin{matrix} s \\ tq \end{matrix} \right\} \mathbf{r}^q. \quad (\text{V.2.9})$$

V.3. Ковариантное дифференцирование. Проведение вычислений с векторными и тензорными величинами требует введения координатного базиса и рассмотрения в нем компонент той или иной природы (ко-, контравариантных, смешанных). Изменение инварианта (скаляра, вектора, тензора) при смещении из данной точки в соседнюю обусловлено лишь свойствами этого инварианта; иначе обстоит дело с компонентами, так как их изменения зависят еще от величин и направлений базисных векторов. Пусть, например, контравариантные компоненты a^h вектора \mathbf{a} не зависят от координат q^h , их частные производные по этим переменным — нули, но было бы ошибкой считать, что остается неизменным и вектор \mathbf{a} . Верно и обратное: при постоянном векторе \mathbf{a} его компоненты a^s или a_s не сохраняют постоянных значений. Задачей последующего является введение таких характеристик изменяемости векторов и тензоров, в которых учитывались бы изменения как самих этих величин, так и координатного базиса, к которому они отнесены. Это достигается введением операции ковариантного (или абсолютного) дифференцирования.

Рассмотрим производную a по q^s ; начнем со случая задания a его контравариантными компонентами. Имеем

$$\frac{\partial a}{\partial q^s} = \frac{\partial}{\partial q^s} a^k r_k = \frac{\partial a^k}{\partial q^s} r_k + a^k \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} r_t$$

или, после замены немых индексов,

$$\frac{\partial a}{\partial q^s} = \left(\frac{\partial a^k}{\partial q^s} + \left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\} a^t \right) r_k. \quad (V. 3.1)$$

Аналогично, сославшись на (V. 2.9), имеем

$$\frac{\partial a}{\partial q^s} = \left(\frac{\partial a_k}{\partial q^s} - \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} a_t \right) r^k. \quad (V. 3.2)$$

Выражения

$$\nabla_s a^k = \frac{\partial a^k}{\partial q^s} + \left\{ \begin{matrix} k \\ st \end{matrix} \right\} a^t, \quad \nabla_s a_k = \frac{\partial a_k}{\partial q^s} - \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} a_t \quad (V. 3.3)$$

называют ковариантными (абсолютными) производными от контравариантных и ковариантных компонент вектора a . При этих обозначениях

$$\frac{\partial a}{\partial q^s} = r_k \nabla_s a^k = r^k \nabla_s a_k. \quad (V. 3.4)$$

Величины $\nabla_s a^k$ и $\nabla_s a_k$ представляют соответственно контра- и ковариантные компоненты вектора $\partial a / \partial q^s$.

Сказанное обобщается на тензоры любого ранга. Например, представляя тензор второго ранга его контравариантными компонентами, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}}{\partial q^r} &= \frac{\partial}{\partial q^r} p^{sk} r_s r_k = \frac{\partial p^{sk}}{\partial q^r} r_s r_k + p^{sk} \left(\left\{ \begin{matrix} t \\ sr \end{matrix} \right\} r_t r_k + \left\{ \begin{matrix} t \\ kr \end{matrix} \right\} r_s r_t \right) = \\ &= \left(\frac{\partial p^{sk}}{\partial q^r} + \left\{ \begin{matrix} s \\ qr \end{matrix} \right\} p^{qk} + \left\{ \begin{matrix} k \\ qr \end{matrix} \right\} p^{sq} \right) r_s r_k, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial q^r} = r_s r_k \nabla_r p^{sk}, \quad \nabla_r p^{sk} = \frac{\partial p^{sk}}{\partial q^r} + \left\{ \begin{matrix} s \\ rq \end{matrix} \right\} p^{qk} + \left\{ \begin{matrix} k \\ rq \end{matrix} \right\} p^{sq}. \quad (V. 3.5)$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial q^r} = r^s r^k \nabla_r p_{sk}, \quad \nabla_r p_{sk} = \frac{\partial p_{sk}}{\partial q^r} - \left\{ \begin{matrix} q \\ rs \end{matrix} \right\} p_{qk} - \left\{ \begin{matrix} q \\ rk \end{matrix} \right\} p_{sq}, \quad (V. 3.6)$$

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial q^r} = r^s r_k \nabla_r p_s^k, \quad \nabla_r p_s^k = \frac{\partial p_s^k}{\partial q^r} - \left\{ \begin{matrix} q \\ rs \end{matrix} \right\} p_q^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ rq \end{matrix} \right\} p_s^q. \quad (V. 3.7)$$

Тензор $\frac{\partial}{\partial q^r} \hat{P}$ здесь представлен его контравариантными, ковариантными и смешанными компонентами.

Частое применение имеет теорема Риччи: ковариантная производная компонент метрического тензора равна нулю. Это следует из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial q^t} \hat{g} = \frac{\partial}{\partial q^t} e^s e_s = - \left\{ \begin{matrix} s \\ tr \end{matrix} \right\} e^r e_s + \left\{ \begin{matrix} r \\ ts \end{matrix} \right\} e^s e_r = - \left\{ \begin{matrix} s \\ tr \end{matrix} \right\} e^r e_s + \left\{ \begin{matrix} s \\ tr \end{matrix} \right\} e^r e_s = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial q^t} \hat{g} = r^s r^k \nabla_t g_{sk} = r_s r_k \nabla_t g^{sk} = r^s r_k \nabla_t g_s^k = 0.$$

Итак,

$$\nabla_t g_{sk} = 0, \quad \nabla_t g^{sk} = 0, \quad \nabla_t g_s^k = 0, \quad (\text{V. 3.8})$$

что и требовалось. Этого следовало ожидать, поскольку метрический тензор играет роль единичного тензора.

При ковариантном дифференцировании компоненты метрического тензора играют роль постоянных — их можно выносить за знак и вносить под знак символа ∇_s (но, конечно, не $\frac{\partial}{\partial q^s}$). Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}}{\partial q^t} &= r^s r^k \nabla_t p_{sk} = r^s r^k \nabla_t g_{ms} g_{qk} p^{mq} = g_{ms} r^s g_{qk} r^k \nabla_t p^{mq} = \\ &= r_m r_q \nabla_t p^{mq} = \frac{\partial \hat{P}}{\partial q^t}, \end{aligned}$$

как и должно быть, поскольку производная инварианта (тензора \hat{P}) является инвариантом, не зависящим от способа его представления (через ковариантные $\nabla_t p_{sk}$ или контравариантные $\nabla_t p^{mq}$ его компоненты).

При ковариантном дифференцировании сохраняется правило дифференцирования произведения, например:

$$\nabla_r a_s b_t = (\nabla_r a_s) b_t + a_s \nabla_r b_t. \quad (\text{V. 3.9})$$

Обращается в нуль и ковариантная производная тензора Леви-Чивита; например, рассматривая его ковариантные компоненты, имеем

$$\nabla_r \epsilon_{stq} = 0. \quad (\text{V. 3.10})$$

В развернутой форме это равенство имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q^r} \epsilon_{stq} - \left(\left\{ \begin{matrix} m \\ sr \end{matrix} \right\} \epsilon_{mtq} + \left\{ \begin{matrix} m \\ tr \end{matrix} \right\} \epsilon_{smq} + \left\{ \begin{matrix} m \\ qr \end{matrix} \right\} \epsilon_{stm} \right) = 0,$$

и, поскольку stq — тройка различных индексов, только в одной из троек индексов

$$mtq, \quad smq, \quad stm$$

нет повторяющихся — в первой при $m = s$, во второй при $m = t$, в третьей при $m = q$. Пусть такой тройкой будет первая; тогда, замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial q^r} \epsilon_{stq} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^r} e_{stq} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial q^r} \epsilon_{stq},$$

имеем

$$\nabla_r \epsilon_{stq} = \left(\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial q^r} - \left\{ \begin{matrix} s \\ sr \end{matrix} \right\} \right) \epsilon_{stq},$$

и сказанное следует из легко проверяемого соотношения

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ sr \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial q^r} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial q^r}. \quad (\text{V.3.11})$$

Его вывод основан на определениях (V.2.7), (V.2.6); имеем

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ sr \end{matrix} \right\} = g^{st} [sr, t] = \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{st}}{\partial q^r} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial q^s} - \frac{\partial g_{sr}}{\partial q^t} \right).$$

Слагаемые

$$g^{st} \frac{\partial g_{rt}}{\partial q^s}, \quad - g^{st} \frac{\partial g_{sr}}{\partial q^t},$$

очевидно, сокращаются; поэтому, используя формулу (I.7.9) дифференцирования определителя, найдем

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ sr \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{st} \frac{\partial g_{st}}{\partial q^r} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial g_{st}} \frac{\partial g_{st}}{\partial q^r} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial q^r},$$

что и требуется.

V.4. Дифференциальные операции в криволинейных координатах. Полный дифференциал скаляра $\varphi(q^1, q^2, q^3)$ представляется в двух видах:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial q^s} dq^s = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{r}_s dq^s,$$

откуда следует, что производные φ по q^s являются ковариантными компонентами вектора $\nabla \varphi$ в векторном базисе \mathbf{r}_s и по (IV.2.1)

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi = \mathbf{r}^s \frac{\partial \varphi}{\partial q^s}. \quad (\text{V.4.1})$$

Аналогично вычисляется полный дифференциал вектора. По (II.2.11) имеем

$$d\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^s} dq^s = \frac{d\mathbf{a}}{dr} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{a} = dq^s \mathbf{r}_s \cdot \nabla \mathbf{a},$$

и тензор $\nabla \mathbf{a}$ может быть представлен суммой диад

$$\nabla \mathbf{a} = \mathbf{r}^s \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^s}. \quad (\text{V.4.2})$$

Из (V.4.1) и (V.4.2) следует представление набла-оператора в виде

$$\nabla = r^s \frac{\partial}{\partial q^s}. \quad (\text{V.4.3})$$

Это правило в соединении с правилами ковариантного дифференцирования обеспечивает автоматизм вычисления дифференциальных операций над тензорами любого ранга.

1°. Дивергенция вектора

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = r^s \cdot \frac{\partial}{\partial q^s} \mathbf{a} = r^s \cdot r_k \nabla_s a^k = \nabla_k a^k = \frac{\partial a^k}{\partial q^k} + \left\{ \begin{matrix} k \\ kr \end{matrix} \right\} a^r,$$

и, сославшись на (V.3.11), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} a^r}{\partial q^r}. \quad (\text{V.4.4})$$

2°. Ротор вектора

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = r^s \times r^k \nabla_s a_k = \epsilon^{skl} r_l \left(\frac{\partial a_k}{\partial q^s} - \left\{ \begin{matrix} m \\ sk \end{matrix} \right\} a_m \right).$$

Но

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ sk \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \\ ks \end{matrix} \right\}, \quad \epsilon^{skl} \left\{ \begin{matrix} m \\ sk \end{matrix} \right\} = \epsilon^{kst} \left\{ \begin{matrix} m \\ ks \end{matrix} \right\} = -\epsilon^{skt} \left\{ \begin{matrix} m \\ sk \end{matrix} \right\} = 0,$$

так что

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{skl} r_l \frac{\partial a_k}{\partial q^s}.$$

3°. Градиент вектора

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{a} &= r^s \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^s} = r^s r^k \nabla_s a_k = r^s r^k \left(\frac{\partial a_k}{\partial q^s} - \left\{ \begin{matrix} r \\ sk \end{matrix} \right\} a_r \right) = \\ &= r^s r^k \left(\frac{\partial a^k}{\partial q^s} + \left\{ \begin{matrix} k \\ sr \end{matrix} \right\} a^r \right). \end{aligned} \quad (\text{V.4.5})$$

4°. Тензор деформации

$$\operatorname{def} \mathbf{a} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{a} + (\nabla \mathbf{a})^*] = r^s r^k \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_k}{\partial q^s} + \frac{\partial a_s}{\partial q^k} \right) - \left\{ \begin{matrix} r \\ sk \end{matrix} \right\} a_r \right]. \quad (\text{V.4.6})$$

Величины в квадратных скобках представляют ковариантные компоненты этого тензора.

5°. Дивергенция тензора второго ранга

$$\operatorname{div} \hat{P} = \nabla \cdot \hat{P} = r^s \cdot r_k r_t \nabla_s p^{kt} = r_t \nabla_s p^{st} = r_t \left(\frac{\partial p^{st}}{\partial q^s} + \left\{ \begin{matrix} s \\ sr \end{matrix} \right\} p^{rt} + \left\{ \begin{matrix} t \\ sr \end{matrix} \right\} p^{sr} \right).$$

Сославшись на (V.3.11) и (V.2.2), имеем теперь

$$\operatorname{div} \hat{P} = r_t \left(\frac{\partial p^{st}}{\partial q^s} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q^r} p^{rt} \right) + p^{sr} \frac{\partial r_s}{\partial q^r}.$$

Получаем

$$\nabla \cdot \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^s} (\sqrt{g} p^{st} r_t). \quad (\text{V. 4.7})$$

6°. Лапласиан скаляра

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = r^s \frac{\partial}{\partial q^s} \cdot r^k \frac{\partial \psi}{\partial q^k} = g^{sk} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^s \partial q^k} - \frac{\partial \psi}{\partial q^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ sr \end{matrix} \right\} g^{sr},$$

или

$$\nabla^2 \psi = g^{sk} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial q^s \partial q^k} - \left\{ \begin{matrix} r \\ sk \end{matrix} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial q^r} \right). \quad (\text{V. 4.8})$$

Выражения дифференциальных операций второго порядка над векторами и тензорами весьма громоздки. Как пример приведем лапласиан вектора

$$\begin{aligned} \nabla^2 a = \nabla \cdot \nabla a &= r^t \frac{\partial}{\partial q^t} \cdot r^s r^k \nabla_s a_k = r^t \cdot \frac{\partial}{\partial q^t} r^s r^k \left(\frac{\partial a_k}{\partial q^s} - \left\{ \begin{matrix} r \\ sk \end{matrix} \right\} a_r \right) = \\ &= g^{ts} r^k \left[\frac{\partial^2 a_k}{\partial q^t \partial q^s} - \left\{ \begin{matrix} r \\ kt \end{matrix} \right\} \frac{\partial a_r}{\partial q^s} - \left\{ \begin{matrix} r \\ st \end{matrix} \right\} \frac{\partial a_k}{\partial q^r} - \left\{ \begin{matrix} r \\ sk \end{matrix} \right\} \frac{\partial a_r}{\partial q^t} - \right. \\ &\quad \left. - a_r \left(\frac{\partial}{\partial q^t} \left\{ \begin{matrix} r \\ sk \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} r \\ qk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} q \\ ts \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} r \\ qs \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} q \\ tk \end{matrix} \right\} \right) \right]. \quad (\text{V. 4.9}) \end{aligned}$$

См. также п. V. 7.

V. 5. Переход к ортогональным криволинейным координатам. Метрический тензор в случае ортогонального триэдра базисных векторов является диагональным; его ковариантные компоненты равны

$$g_{sk} = \begin{cases} 0, & s \neq k, \\ H_s^2, & s = k, \end{cases} \quad (\text{V. 5.1})$$

где H_s — коэффициенты Ляме. Имеем, далее,

$$g = |g_{sk}| = H_1^2 H_2^2 H_3^2 \quad (\text{V. 5.2})$$

и, определяя по (IV. 1.2) векторы взаимного базиса, получаем

$$\left. \begin{aligned} r^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} r_2 \times r_3 = \frac{1}{\sqrt{g}} |r_2 \times r_3| \frac{r_1}{H_1} = \frac{r_1}{H_1^2}, \\ r^2 &= \frac{r_2}{H_2^2}, \quad r^3 = \frac{r_3}{H_3^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 5.3})$$

Они сонаправлены векторам исходного базиса. Соответствующие единичные векторы — касательные к координатным линиям $[q^s]$ — обозначаются τ_s :

$$\tau_s = \frac{r_s}{H_s} = H_s r^s. \quad (\text{V. 5.4})$$

Из представлений вектора

$$a_s r^s = a^s r_s = \sum_{s=1}^3 a_{(s)} r_s$$

находим следующие выражения его контра- и ковариантных компонент через «физические» компоненты $a_{(s)}$:

$$a^s = \frac{a_{(s)}}{H_s}, \quad a_s = H_s a_{(s)}. \quad (\text{V. 5.5})$$

Аналогичные выражения для тензора второго ранга записываются в виде

$$p^{st} = \frac{p_{(st)}}{H_s H_t}, \quad p_{st} = H_s H_t p_{(st)}, \quad p^s_t = \frac{H_t}{H_s} p_{(st)}, \quad p^t_s = \frac{H_s}{H_t} p_{(st)}. \quad (\text{V. 5.6})$$

Символы Кристоффеля первого рода вычисляются по (V. 2.6), а второго рода — по (V. 2.7). Учитывая еще, что контравариантные компоненты метрического тензора равны

$$g^{sk} = r^s \cdot r^k = \begin{cases} 0, & s \neq k, \\ \frac{1}{H_s^2}, & s = k \end{cases} \quad (\text{V. 5.7})$$

находим

$$\left. \begin{aligned} s \neq k \neq t: \quad [sk, t] &= 0, \quad \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} = 0, \\ s \neq t: \quad [ss, t] &= -H_s \frac{\partial H_s}{\partial q^t}, \quad \left\{ \begin{matrix} t \\ ss \end{matrix} \right\} = -\frac{H_s}{H_t^2} \frac{\partial H_s}{\partial q^t}, \\ [st, s] &= H_s \frac{\partial H_s}{\partial q^t}, \quad \left\{ \begin{matrix} s \\ st \end{matrix} \right\} = \frac{1}{H_s} \frac{\partial H_s}{\partial q^t} \left(\sum_s \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 5.8})$$

Выражения производных базисных векторов составляются по формулам (V. 2.2); эти выражения могут быть использованы для составления формул дифференцирования единичных векторов, непосредственный вывод которых приведен в п. III. 4.

Внешняя простота и симметрия формул общего тензорного анализа теряется при переходе к ортогональным криволинейным координатам и физическим составляющим тензоров. Этот переход вместе с тем сопряжен с громоздкими записями; поэтому вычисления в ортогональных координатах, с которыми преимущественно приходится иметь дело, предпочтительно проводить, пользуясь изложенными в Приложении III приемами.

V. 6. Тензор Римана — Кристоффеля. Квадрат линейного элемента в евклидовом пространстве E_3 представляется суммой квадратов дифференциалов декартовых координат:

$$ds^2 = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2. \quad (\text{V. 6.1})$$

При введении криволинейных координат с помощью преобразования (V. 1.2) это выражение приобретает вид квадратичной

формы дифференциалов:

$$ds^2 = g_{st} dq^s dq^t, \quad (\text{V. 6.2})$$

коэффициенты которой — ковариантные компоненты метрического тензора — вычисляются по формулам

$$g_{st} = \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_t = \frac{\partial a_k}{\partial q^s} \frac{\partial a_k}{\partial q^t}, \quad (\text{V. 6.3})$$

когда преобразование (V.1.2) задано. Поставим, однако, вопрос иначе; предполагается, что квадратичная форма (V.6.2) задана ее коэффициентами g_{st} и что она определенно-положительна. Тогда говорят, что ею определена метрика в римановом пространстве R_3 . Теперь неизвестным является само преобразование (V.1.2), разыскание его сводится к интегрированию системы шести уравнений (V.6.3) с тремя неизвестными функциями a_1, a_2, a_3 ; искомое преобразование существует лишь при соблюдении условий интегрируемости этой системы. Если эти условия выполнены, то риманово пространство R_3 вырождается в евклидово E_3 , и положение точки в нем может быть определено в единой декартовой системе осей, а квадрат линейного элемента может быть представлен в евклидовой форме (V.6.1).

Определенно-положительная форма (V.6.2) линейным преобразованием переменных может быть приведена к сумме трех квадратов

$$ds^2 = b_{11}(z^k) dz^1{}^2 + b_{22}(z^k) dz^2{}^2 + b_{33}(z^k) dz^3{}^2, \quad (\text{V. 6.4})$$

где z^1, z^2, z^3 — новые переменные; величины $\sqrt{b_{ss}(z^k)} dz^s$ (не суммировать!), вообще говоря, не являются дифференциалами некоторых величин, и, только фиксируя z^h , можно принять $da_s = \sqrt{b_{ss}(z^k)} dz^s$ и этим определить в окрестности рассматриваемой точки R_3 декартову систему осей a_s . Этим доказывается возможность локального внесения в R_3 метрики E_3 , тогда как искомые условия интегрируемости должны обеспечить ее существование во всей области.

Итак, соблюдение этих условий гарантирует существование трех функций $a_s(q^1, q^2, q^3)$ или, что то же самое, возможность задания положения любой точки вектор-радиусом ее

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3) \quad (\text{V. 6.5})$$

и возможность внесения координатного базиса, векторами которого \mathbf{r}_h служат производные \mathbf{r} по координатам q^h . Тогда

$$d\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_{sk} dq^k = \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} \mathbf{r}_t dq^k, \quad \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} t \\ ks \end{matrix} \right\}, \quad (\text{V. 6.6})$$

и условия интегрируемости этих соотношений записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial q^r} \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} r_t - \frac{\partial}{\partial q^k} \left\{ \begin{matrix} t \\ sr \end{matrix} \right\} r_t = 0. \quad (\text{V.6.7})$$

Соблюдение этих условий гарантирует интегрируемость выражения

$$dr = r_s dq^s,$$

так как условия его интегрируемости

$$\frac{\partial r_s}{\partial q^k} = \frac{\partial r_k}{\partial q^s}$$

выполняются при принятых определениях (V.2.6), (V.2.7) символов Кристоффеля и из свойств симметрии этих величин, обусловленных симметрией компонент метрического тензора — коэффициентов квадратичной формы (V.6.2).

Развернутая запись условий интегрируемости (V.6.7) имеет вид

$$r_t \left[\frac{\partial}{\partial q^r} \left\{ \begin{matrix} t \\ sk \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial q^k} \left\{ \begin{matrix} t \\ sr \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m \\ sk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t \\ rm \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} m \\ sr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} t \\ km \end{matrix} \right\} \right] = R_{krs}{}^t r_t. \quad (\text{V.6.8})$$

К выражению такой же структуры приходим, рассматривая разность

$$\nabla_r \nabla_s a^t - \nabla_s \nabla_r a^t.$$

Действительно, $\nabla_s a^t$ — смешанная компонента тензора ∇a . Поэтому

$$\nabla_r \nabla_s a^t = \frac{\partial}{\partial q^r} \nabla_s a^t - \left\{ \begin{matrix} q \\ rs \end{matrix} \right\} \nabla_q a^t + \left\{ \begin{matrix} t \\ rq \end{matrix} \right\} \nabla_s a^q$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \nabla_r \nabla_s a^t - \nabla_s \nabla_r a^t &= \frac{\partial}{\partial q^r} \nabla_s a^t - \frac{\partial}{\partial q^s} \nabla_r a^t + \left\{ \begin{matrix} t \\ rq \end{matrix} \right\} \nabla_s a^q - \left\{ \begin{matrix} t \\ sq \end{matrix} \right\} \nabla_r a^q = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial q^r} \left\{ \begin{matrix} t \\ sq \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial q^s} \left\{ \begin{matrix} t \\ rq \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} t \\ rm \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ sq \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} t \\ sm \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ rq \end{matrix} \right\} \right] a^q \end{aligned}$$

или, по (V.6.8),

$$\nabla_r \nabla_s a^t - \nabla_s \nabla_r a^t = R_{srq}{}^t a^q. \quad (\text{V.6.9})$$

Структура этого выражения показывает, что величины $R_{rsq}{}^t$ представляют компоненты тензора четвертого ранга, трижды ковариантные по индексам srq и контравариантные по индексу t . Это — тензор кривизны Римана — Кристоффеля; его компоненты вычисляются через компоненты метрического тензора. Если последние заданы так, что тензор Римана — Кристоффеля оказывается нулевым, то уравнения (V.6.6) интегрируемы, а пространство с линейным элементом (V.6.2) — евклидово E_3 .

Сославшись на теорему Риччи п. V.3, можно переписать условие (V.6.9) в виде

$$\nabla_r \nabla_s a_t - \nabla_s \nabla_r a_t = g_{mt} R_{srq}{}^m a^q = R_{srqt} a^q. \quad (\text{V.6.10})$$

Здесь введены в рассмотрение четырежды ковариантные компоненты тензора Римана — Кристоффеля; они выражаются через символы Кристоффеля первого рода и поэтому легче вычисляются. Действительно,

$$R_{srqt} = g_{mt} \frac{\partial}{\partial q^r} g^{ml} [sq, l] - g_{mt} \frac{\partial}{\partial q^s} g^{ml} [rq, l] + \\ + g^{lp} ([sq, p][rl, t] - [rq, p][sl, t]).$$

Учитывая, что

$$g_{mt} \frac{\partial g^{ml}}{\partial q^r} = - g^{ml} \frac{\partial g_{mt}}{\partial q^r},$$

а также развернув выражения производных прямых скобок и сделав замены

$$\frac{\partial g_{mt}}{\partial q^r} = [mr, t] + [rt, m], \quad \frac{\partial g_{mt}}{\partial q^s} = [ms, t] + [st, m],$$

придем к следующим выражениям ковариантных компонент тензора Римана — Кристоффеля:

$$R_{srqt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{st}}{\partial q^r \partial q^q} - \frac{\partial^2 g_{sq}}{\partial q^r \partial q^t} + \frac{\partial^2 g_{rq}}{\partial q^s \partial q^t} - \frac{\partial^2 g_{rt}}{\partial q^s \partial q^q} \right) + \\ + g^{ml} ([rq, m][st, l] - [sq, m][rt, l]). \quad (\text{V.6.11})$$

Из них следует:

1) симметричность относительно пар индексов sr , qt :

$$R_{srqt} = R_{qtsr};$$

2) кососимметричность по индексам s и r , q и t :

$$R_{srqt} = -R_{rsqt} = -R_{srtq};$$

3) тождества Риччи

$$R_{srqt} + R_{rqst} + R_{qsrt} = 0.$$

Можно доказать, учитывая эти свойства, что из 81 компоненты тензора имеется только шесть независимых:

$$R_{2323}, R_{2331}, R_{2312}, R_{3131}, R_{3112}, R_{1212}.$$

Они могут быть представлены через симметричный тензор второго ранга — тензор Риччи:

$$A^{mn} = \frac{1}{4} \epsilon^{msr} \epsilon^{nqt} R_{srqt}. \quad (\text{V.6.12})$$

Действительно,

$$\left. \begin{aligned} A^{11} &= \frac{1}{g} R_{2323}, & A^{12} &= \frac{1}{g} R_{2331}, & A^{13} &= \frac{1}{g} R_{2312}, \\ A^{22} &= \frac{1}{g} R_{3131}, & A^{23} &= \frac{1}{g} R_{3112}, \\ A^{33} &= \frac{1}{g} R_{1212} \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.6.13})$$

и в евклидовом пространстве

$$A^{mn} = 0. \quad (\text{V.6.14})$$

В ортогональных криволинейных координатах этим уравнениям соответствуют зависимости Ляме п. III.6.

V.7. Тензор $\text{Ink } \hat{P}$. Определение этого тензора было дано в п. II.4 формулой (II.4.13):

$$\text{Ink } \hat{P} = \text{rot} (\text{rot } \hat{P})^*.$$

Тензор \hat{P} далее предполагается симметричным. Имеем

$$\text{rot } \hat{P} = \nabla \times \hat{P} = \mathbf{r}^l \times \mathbf{r}^s \mathbf{r}^t \nabla_l p_{st} = \epsilon^{lsq} \mathbf{r}_q \mathbf{r}^t \nabla_l p_{st},$$

так что

$$(\text{rot } \hat{P})^* = \mathbf{r}^t \mathbf{r}_q \epsilon^{lsq} \nabla_l p_{st}$$

и, далее,

$$\text{Ink } \hat{P} = \mathbf{r}^k \times \frac{\partial}{\partial q^k} (\mathbf{r}^t \mathbf{r}_q \epsilon^{lsq} \nabla_l p_{st}).$$

Величина в скобках — тензор второго ранга, представленный его контравариантными компонентами. Учитывая (V.3.10), имеем

$$\text{Ink } \hat{P} = \mathbf{r}^k \times \mathbf{r}^t \mathbf{r}_q \nabla_k \epsilon^{lsq} \nabla_l p_{st} = \mathbf{r}_p \mathbf{r}_q \epsilon^{ktp} \epsilon^{lsq} \nabla_k \nabla_l p_{st}, \quad (\text{V.7.1})$$

и остается отметить еще соотношение переставимости операций ковариантного дифференцирования, аналогичное (V.6.10):

$$\nabla_k \nabla_l p_{st} - \nabla_l \nabla_k p_{st} = R_{klmt} p_s^m + R_{lkms} p_t^m = 0. \quad (\text{V.7.2})$$

Оно позволяет проверить симметричность рассматриваемого тензора:

$$\begin{aligned} \hat{M} = \text{Ink } \hat{P} &= \mathbf{r}_p \mathbf{r}_q \epsilon^{ktp} \epsilon^{lsq} \nabla_k \nabla_l p_{st} = \mathbf{r}_p \mathbf{r}_q \epsilon^{lsp} \epsilon^{ktq} \nabla_l \nabla_k p_{ts} = \\ &= \mathbf{r}_q \mathbf{r}_p \epsilon^{lsq} \epsilon^{ktp} \nabla_k \nabla_l p_{st}, \end{aligned}$$

что и требуется. Приходим к выражениям

$$\left. \begin{aligned} M^{11} &= \frac{1}{g} (\nabla_2^2 p_{33} + \nabla_3^2 p_{22} - 2 \nabla_2 \nabla_3 p_{23}), \\ M^{12} &= \frac{1}{g} [-\nabla_1 \nabla_2 p_{33} + \nabla_3 (\nabla_1 p_{23} + \nabla_2 p_{31} - \nabla_3 p_{12})] \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.7.3})$$

и получающимся из них круговой перестановкой индексов. Это естественное обобщение формул (II.4.15) — дифференцирование заменено ковариантным дифференцированием. Развернутые выражения операций $\nabla_l \nabla_k p_{st}$ имеют, конечно, достаточно громоздкий вид.

V.8. Преобразование поверхностного интеграла в объемный. Рассмотрим интеграл

$$\int_O n_s \varphi(q^1, q^2, q^3) dO = \int_O n \cdot r_s \varphi dO,$$

в котором n_s — ковариантная компонента вектора внешней нормали $n = n_s r^s$ к замкнутой поверхности O . Тогда по (II.5.2), (V.4.2), (V.2.2) и (V.3.11) имеем

$$\begin{aligned} \int_O n \cdot r_s \varphi dO &= \int_V \int \nabla \cdot r_s \varphi d\tau = \int_V \int r^k \frac{\partial}{\partial q^k} \cdot r_s \varphi d\tau = \\ &= \int_V \int \frac{\partial \varphi}{\partial q^s} d\tau + \int_V \int r^k \cdot \left\{ \begin{matrix} t \\ ks \end{matrix} \right\} r_t \varphi d\tau = \\ &= \int_V \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q^s} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ks \end{matrix} \right\} \varphi \right) d\tau = \int_V \int \frac{d\tau}{Vg} \frac{\partial}{\partial q^s} (Vg \varphi). \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_O n_s \varphi dO = \int_V \int \frac{\partial}{\partial q^s} (Vg \varphi) \frac{d\tau}{Vg}. \quad (\text{V.8.1})$$

В применении к вектору a имеем

$$\int_O n \cdot a dO = \int_O n_s a^s dO = \int_V \int \frac{\partial}{\partial q^s} (Vg a^s) \frac{d\tau}{Vg} = \int_V \int \operatorname{div} a d\tau, \quad (\text{V.8.2})$$

откуда снова приходим к выражению (V.4.4).

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ СФЕРИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

VI. 1. Разделение переменных в уравнении Лапласа. В случае сферических координат решение уравнения Лапласа (III. 8.5)

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = 0, \quad (\text{VI. 1.1})$$

в котором введена вместо ϑ независимая переменная

$$\mu = \cos \vartheta \quad (-1 \leq \mu \leq 1), \quad (\text{VI. 1.2})$$

разыскивается в форме произведения

$$\psi = f(R) M(\mu) \frac{\cos m\lambda}{\sin m\lambda}. \quad (\text{VI. 1.3})$$

Постоянную разделения назовем $n(n+1)$; она не изменяет своей величины при замене n на $-(n+1)$. Приходим к двум дифференциальным уравнениям для искомых функций $f(R)$, $M(\mu)$:

$$[R^2 f'(R)]' - n(n+1)f(R) = 0, \quad (\text{VI. 1.4})$$

$$[(1 - \mu^2) M'(\mu)]' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] M(\mu) = 0. \quad (\text{VI. 1.5})$$

Далее будет достаточно считать n целым положительным числом. Из двух частных решений уравнения (VI. 1.4)

$$f_1(R) = R^n, \quad f_2(R) = R^{-(n+1)} \quad (\text{VI. 1.6})$$

первое используется при решении внутренней краевой задачи для сферы ($0 \leq R \leq R_0$), второе — внешней ($R_0 \leq R < \infty$); решение краевых задач для поллой сферы ($R_0 \leq R \leq R_1$) требует введения обоих решений.

В сфероидальных координатах (координатах сжатого эллипсоида) по (III.10.10) имеем

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial}{\partial s} (1 + s^2) \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \left(\frac{s^2}{1 + s^2} + \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{VI.1.7})$$

и, полагая

$$\psi = S(s) M(\mu) \frac{\cos}{\sin} m\varphi, \quad (\text{VI.1.8})$$

приходим после разделения переменных s, μ к дифференциальным уравнениям

$$[(1 + s^2) S'(s)]' - \left(\lambda + \frac{m^2 s^2}{1 + s^2} \right) S(s) = 0,$$

$$[(1 - \mu^2) M'(\mu)]' + \left(\lambda - \frac{m^2 \mu^2}{1 - \mu^2} \right) M(\mu) = 0$$

или, вводя новое обозначение $n(n+1) = \lambda + m^2$ для постоянной разделения,

$$[(1 + s^2) S'(s)]' - \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 + s^2} \right] S(s) = 0, \quad (\text{VI.1.9})$$

$$[(1 - \mu^2) M'(\mu)]' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] M(\mu) = 0. \quad (\text{VI.1.10})$$

Уравнение (VI.1.10) приводится к виду (VI.1.9) при замене μ на is . Отметим также тождественность уравнений (VI.1.10) и (VI.1.5).

Переходим к случаю эллиптических координат ρ, μ, ν , определенных в п. III.11. Разыскивая решение уравнения Лапласа (III.11.25) в виде «произведений Ляме»

$$\psi = R(\rho) M(\mu) N(\nu), \quad (\text{VI.1.11})$$

приведем его к виду

$$(\mu^2 - \nu^2) \frac{\Delta(\rho)}{R(\rho)} [\Delta(\rho) R'(\rho)]' - (\nu^2 - \rho^2) \frac{\Delta_1(\mu)}{M(\mu)} [\Delta_1(\mu) M'(\mu)]' +$$

$$+ (\rho^2 - \mu^2) \frac{\Delta(\nu)}{N(\nu)} [\Delta(\nu) N'(\nu)]' = 0.$$

Вместе с тем имеем очевидное тождество

$$(H\rho^2 + h)(\mu^2 - \nu^2) + (H\mu^2 + h)(\nu^2 - \rho^2) + (H\nu^2 + h)(\rho^2 - \mu^2) = 0,$$

в котором H, h — любые постоянные. Учитывая его, можно переписать предшествующее равенство в виде

$$(\mu^2 - \nu^2) \left\{ \frac{\Delta(\rho)}{R(\rho)} [\Delta(\rho) R'(\rho)]' - (H\rho^2 + h) \right\} +$$

$$+ (\nu^2 - \rho^2) \left\{ - \frac{\Delta_1(\mu)}{M(\mu)} [\Delta_1(\mu) M'(\mu)]' - (H\mu^2 + h) \right\} +$$

$$+ (\rho^2 - \mu^2) \left\{ \left[\frac{\Delta(\nu)}{N(\nu)} \Delta(\nu) N'(\nu) \right]' - (H\nu^2 + h) \right\} = 0$$

и, пользуясь произволом выбора H , h , приравнять нулю величины в фигурных скобках. Придем к трем дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\Delta(\rho) [\Delta(\rho) R'(\rho)]' = [n(n+1)\rho^2 + h] R(\rho), \quad (\text{VI. 1.12})$$

$$-\Delta_1(\mu) [\Delta_1(\mu) M'(\mu)]' = [n(n+1)\mu^2 + h] M(\mu), \quad (\text{VI. 1.13})$$

$$\Delta(v) [\Delta(v) N'(v)]' = [n(n+1)v^2 + h] N(v). \quad (\text{VI. 1.14})$$

Здесь введено новое обозначение $n(n+1)$ для постоянной H .

VI.2. Сферические функции Лапласа. Пусть $\varphi_n(x, y, z)$ — однородный полином n -й степени. Всего существует $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ таких линейно независимых полиномов. По определению однородности

$$\varphi_n(kx, ky, kz) = k^n \varphi_n(x, y, z), \quad (\text{VI. 2.1})$$

и следствием этого функционального соотношения является известная теорема Эйлера

$$x \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = R \cdot \nabla \varphi_n = n \varphi_n. \quad (\text{VI. 2.2})$$

Однородные гармонические полиномы, обозначаемые далее $P_n(x, y, z)$, удовлетворяют уравнению Лапласа. Поскольку в выражение полинома $\nabla^2 P_n$ степени $(n-2)$ входит $\frac{1}{2}n(n-1)$ произвольных коэффициентов, требование его тождественного обращения в нуль приводит к такому же числу соотношений, связывающих $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ коэффициентов P_n ; доказывается, что эти соотношения линейно независимы. Поэтому существует

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n-1) = 2n+1$$

линейно независимых гармонических полиномов n -й степени. Например, для $n = 0, 1, 2$ это полиномы

$$1; x, y, z; x^2 - y^2, y^2 - z^2, xy, yz, zx. \quad (\text{VI. 2.3})$$

По (VI.2.1) представление гармонического полинома $P_n(x, y, z)$ в сферических координатах записывается в виде

$$\begin{aligned} P_n(x, y, z) &= P_n(R \sin \vartheta \cos \lambda, R \sin \vartheta \sin \lambda, R \cos \vartheta) = \\ &= R^n P_n(\sin \vartheta \cos \lambda, \sin \vartheta \sin \lambda, \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (\text{VI. 2.4})$$

Коэффициент при R^n , обозначаемый $Y_n(\vartheta, \lambda)$:

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = P_n(\sin \vartheta \cos \lambda, \sin \vartheta \sin \lambda, \cos \vartheta), \quad (\text{VI. 2.5})$$

называется сферической функцией Лапласа. Это значение гармонического полинома n -й степени на сфере единичного радиуса.

Очевидно, что представление сферической функции Лапласа в форме тригонометрического полинома по аргументу λ имеет вид

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = c_0(\vartheta) + \sum_{m=1}^n [c_n^m(\vartheta) \cos m\lambda + c_n'^m(\vartheta) \sin m\lambda]. \quad (\text{VI. 2.6})$$

Но сумма степеней $q_1 + q_2 + q_3$ каждого слагаемого $x^{q_1}y^{q_2}z^{q_3}$ гармонического полинома $P_n(x, y, z)$ равна n . Поэтому слагаемые, входящие в выражение сферической функции Лапласа, будут иметь вид

$$\sin^{q_1} \lambda \cos^{q_2} \lambda \sin^{q_1+q_2} \vartheta \cos^{q_3} \vartheta = \sin^{q_1} \lambda \cos^{q_2} \lambda \sin^m \vartheta \cos^{n-m} \vartheta,$$

$$\sin^{q_2} \lambda \cos^{q_1} \lambda \sin^{q_1+q_2} \vartheta \cos^{q_3} \vartheta = \sin^{q_2} \lambda \cos^{q_1} \lambda \sin^m \vartheta \cos^{n-m} \vartheta,$$

где $m = q_1 + q_2$. Заменяя теперь тригонометрические функции от λ представлениями

$$\cos \lambda = \frac{1}{2}(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}), \quad \sin \lambda = \frac{1}{2i}(e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}),$$

нетрудно сообразить, что показатель степени $\sin \vartheta$ в коэффициентах $c_n^m(\vartheta)$, $c_n'^m(\vartheta)$ при $\frac{\cos}{\sin} m\lambda$ выражения (VI.2.6) имеет ту же четность, что и m ; вместе с тем $\sin^m \vartheta$ входит как множитель в коэффициенты $c_n^m(\vartheta)$ и $c_n'^m(\vartheta)$. Поэтому последние могут быть представлены в виде

$$c_n^m(\vartheta) = a_{nm} P_n^m(\mu), \quad c_n'^m(\vartheta) = b_{nm} P_n^m(\mu), \quad (\text{VI. 2.7})$$

где, как выше, $\mu = \cos \vartheta$; a_{nm} , b_{nm} — постоянные; $P_n^m(\mu)$ — произведение $(1 - \mu^2)^{m/2}$ на полином от μ степени $n - m$.

Таким образом, приходим к следующим представлениям независимых гармонических полиномов $P_n(x, y, z)$:

$$R^n P_n(\mu); \quad R^n P_n^m(\mu) \cos m\lambda, \quad R^n P_n^m(\mu) \sin m\lambda, \quad (\text{VI. 2.8})$$

причем $P_n^0(\mu) = P_n(\mu)$.

Сославшись на (VI.1.3), теперь легко заключить, что дифференциальные уравнения (VI.1.5), значит и (VI.1.10), имеют частные решения

$$M(\mu) = P_n^m(\mu), \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (\text{VI. 2.9})$$

представляемые произведением $(1 - \mu^2)^{m/2}$ на полином степени $(n - m)$ от μ . Вместе с тем общее представление сферической функции Лапласа записывается в виде

$$Y_n(\mu, \vartheta) = a_0 P_n(\mu) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\vartheta). \quad (\text{VI. 2.10})$$

Полиномиальное решение уравнения (VI.1.5) при $m = 0$ хорошо известно. Это — известный полином Лежандра

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n = \\ = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)(2n-1)}{n!} \left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2 \cdot (2n-1)} \mu^{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \mu^{n-4} - \dots \right], \quad (\text{VI.2.11})$$

причем ряд кончается при нечетном n членом, содержащим μ , а при n четном — членом, не зависящим от μ . В частности,

$$\left. \begin{aligned} P_0(\mu) &= 1, & P_1(\mu) &= \mu, & P_2(\mu) &= \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \\ P_3(\mu) &= \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), & P_4(\mu) &= \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3) \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.2.12})$$

Вещественные полиномиальные решения уравнения (VI.1.9) могут быть представлены в виде

$$p_n(s) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{ds^n} (s^2 + 1)^n \quad (\text{VI.2.13})$$

и, в частности,

$$\left. \begin{aligned} p_0(s) &= 1, & p_1(s) &= s, & p_2(s) &= \frac{1}{2}(3s^2 + 1), \\ p_3(s) &= \frac{1}{2}(5s^3 + 3s), & p_4(s) &= \frac{1}{8}(35s^4 + 30s^2 + 3) \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.2.14})$$

Возвращаясь к уравнению (VI.1.5) при $m \neq 0$, можно непосредственной проверкой убедиться, что функция $P_n^m(\mu)$ связана с n -м полиномом Лежандра соотношением

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}, \quad (\text{VI.2.15})$$

то есть что упомянутый ранее полином $(n - m)$ -й степени представляет m -ю производную $P_n(\mu)$ по μ . Решения $P_n^m(\mu)$ называются присоединенными к $P_n(\mu)$. Здесь они определены для $m \leq n$.

Имеем, в частности,

$$\left. \begin{aligned} P_1^1(\mu) &= \sqrt{1 - \mu^2}, & P_2^1(\mu) &= 3\sqrt{1 - \mu^2}\mu, & P_2^2(\mu) &= 3(1 - \mu^2), \\ P_3^1(\mu) &= \sqrt{1 - \mu^2} \frac{3}{2}(5\mu^2 - 1), & P_3^2(\mu) &= 15(1 - \mu^2)\mu, \\ P_3^3(\mu) &= 15(1 - \mu^2)^{3/2} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.2.16})$$

Соответствующие гармонические полиномы представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} R^0 P_0(\mu) &= 1, \quad R P_1(\mu) = z, \quad R P_1^1(\mu) \cos \lambda = x, \quad R P_1^1(\mu) \sin \lambda = y, \\ R^2 P_2(\mu) &= \frac{1}{2} (2z^2 - x^2 - y^2), \quad R^2 P_2^1(\mu) \cos \lambda = 3zx, \\ R^2 P_2^1(\mu) \sin \lambda &= 3yz, \\ R^2 P_2^2(\mu) \cos 2\lambda &= 3(x^2 - y^2), \quad R^2 P_2^2(\mu) \sin 2\lambda = 6xy \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 2.17})$$

Аналогично записываются решения дифференциального уравнения (VI. 1.9) при $m \neq 0$:

$$p_n^m(s) = (1 + s^2)^{m/2} \cdot \frac{d^m (1 + s^2)^n}{ds^m}. \quad (\text{VI. 2.18})$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} p_1^1(s) &= \sqrt{1 + s^2}, \quad p_2^1(s) = 3 \sqrt{1 + s^2} s, \quad p_2^2(s) = 3(1 + s^2), \\ p_3^1(s) &= \frac{3}{2} \sqrt{1 + s^2} (5s^2 + 1), \quad p_3^2(s) = 15(1 + s^2)s, \\ p_3^3(s) &= 15(1 + s^2)^{3/2} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 2.19})$$

VI. 3. Решения $Q_n(\mu)$, $q_n(s)$. Известно, что знание одного частного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка позволяет свести к квадратуре задачу разыскания его второго частного решения. В применении к уравнению Лежандра (VI. 1.5), называя его линейно независимые (с отличным от нуля вронскианом W) решения через M_1, M_2 , имеем

$$W' = (M_1 M_2' - M_2 M_1')' = \frac{2\mu}{1 - \mu^2} (M_1 M_2' - M_2 M_1') = \frac{2\mu}{1 - \mu^2} W$$

и, далее,

$$W = M_1 M_2' - M_2 M_1' = M_1^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)' = \frac{C}{1 - \mu^2}, \quad M_2 = M_1 \left[C \int \frac{d\sigma}{(1 - \sigma^2) M_1^2(\sigma)} + C_1 \right]. \quad (\text{VI. 3.1})$$

Выбирая надлежащим образом постоянные C, C_1 и принимая $M_1 = P_n(\mu)$, из этого соотношения находим второе решение уравнения Лежандра — функцию Лежандра второго рода ($m = 0$)

$$Q_n(\mu) = P_n(\mu) \int_{\infty}^{\mu} \frac{d\sigma}{(1 - \sigma^2) [P_n(\sigma)]^2}. \quad (\text{VI. 3.2})$$

Это решение обращается в нуль при $\mu \rightarrow \infty$; точки $\mu = \pm 1$ являются его особыми логарифмическими точками, так что $P_n(\mu)$

представляет единственное регулярное решение при $\mu = \pm 1$ (в полюсах сферы $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$). Путь интегрирования в выражении (VI.3.2) предполагается идущим от $\mu = \infty$ по вещественной оси, и функция $Q_n(\mu)$ вещественная при $|\mu| > 1$.

При $n = 0, 1, 2$ вычисление дает

$$\left. \begin{aligned} Q_0(\mu) &= \frac{1}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}, & Q_1(\mu) &= \frac{1}{2} P_1(\mu) \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} - 1, \\ Q_2(\mu) &= \frac{1}{2} P_2(\mu) \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} - \frac{3}{2} \mu \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.3.3})$$

и общим представлением служит доказываемая в теории сферических функций формула

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} + R_{n-1}(\mu), \quad (\text{VI.3.4})$$

в которой полином $(n-1)$ -й степени $R_{n-1}(\mu)$ определяется равенством

$$R_{n-1}(\mu) = -2 \left[\frac{2n-1}{1 \cdot 2n} P_{n-1}(\mu) + \frac{2n-5}{3(2n-2)} P_{n-3}(\mu) + \right. \\ \left. + \frac{2n-9}{5(2n-4)} P_{n-5}(\mu) + \dots \right]. \quad (\text{VI.3.5})$$

Аналогично определяется второе решение уравнения Лежандра (VI.1.9) при $m = 0$:

$$q_n(s) = p_n(s) \int_s^{\infty} \frac{d\sigma}{(\sigma^2+1)[p_n(\sigma)]^2} \quad (\text{VI.3.6})$$

вещественное на всей вещественной оси и обращающееся в нуль при $s \rightarrow \infty$. Его выражения для $n = 0, 1, 2$ имеют вид

$$q_0(s) = \text{arccctg } s, \quad q_1(s) = p_1(s) \text{arccctg } s - 1, \quad q_2(s) = p_2(s) \text{arccctg } s - \frac{3}{2}s, \quad (\text{VI.3.7})$$

а общее представление будет

$$\left. \begin{aligned} q_n(s) &= p_n(s) \text{arccctg } s - r_{n-1}(s), \\ r_{n-1}(s) &= 2 \left[\frac{2n-1}{2n} p_{n-1}(s) - \frac{2n-5}{3(2n-2)} p_{n-3}(s) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2n-9}{5(2n-4)} p_{n-5}(s) - \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.3.8})$$

Исходя из представлений

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{3\mu^3} + \frac{1}{5\mu^5} + \dots, \quad \text{arccctg } s = \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} + \frac{1}{5s^5} - \dots,$$

можно доказать, что при $\mu \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty$

$$Q_n(\mu) \approx \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \mu^{-(n+1)}, \quad q_n(s) \approx \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} s^{-(n+1)}. \quad (\text{VI.3.9})$$

Отметим еще выражения вронскианов, непосредственно следующие из представлений (VI.3.2), (VI.3.6):

$$\left. \begin{aligned} P'_n(\mu) Q_n(\mu) - P_n(\mu) Q'_n(\mu) &= \frac{1}{\mu^2 - 1}, \\ p'_n(s) q_n(s) - p_n(s) q'_n(s) &= \frac{1}{s^2 + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.3.10})$$

При $m \neq 0$ решения уравнений (VI.1.5), (VI.1.9) — функции, присоединенные к $Q_n(\mu)$ и $q_n(s)$ — определяются равенствами $Q_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n(\mu)}{d\mu^m}$, $q_n^m(s) = (1 + s^2)^{m/2} \frac{d^m q_n(s)}{ds^m}$, (VI.3.11)

причем m может принимать любые целочисленные значения. В частности, например,

$$Q_0^1(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad Q_0^2(\mu) = \frac{2\mu}{1 - \mu^2}, \quad Q_1^2(\mu) = \frac{2}{1 - \mu^2} \text{ и т. д.,} \quad (\text{VI.3.12})$$

$$q_0^1(s) = -\frac{1}{\sqrt{1 + s^2}}, \quad q_0^2(s) = \frac{2s}{1 + s^2}, \quad q_1^2(s) = -\frac{2}{1 + s^2} \text{ и т. д.,} \quad (\text{VI.3.13})$$

и можно доказать, что в общем случае при $m > n$

$$Q_n^m(\mu) = \frac{L_{n+m-1}(\mu)}{(1 - \mu^2)^{m/2}}, \quad q_n^m(s) = \frac{l_{n+m-1}(s)}{(1 + s^2)^{m/2}}, \quad (\text{VI.3.14})$$

где $L_{n+m-1}(\mu)$, $l_{n+m-1}(s)$ — полиномы степени не выше, чем $n + m - 1$. Этим построена одна система решений уравнений Лежандра для $m > n$. Вторая может быть определена теперь соотношением (VI.3.1); ее назовем $\tilde{P}_n^m(\mu)$ и соответственно $\tilde{p}_n^m(s)$:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}_n^m(\mu) &= Q_n^m(\mu) \left[C \int_{\mu}^{\mu} \frac{(1 - \sigma^2)^{m-1}}{[L_{n+m-1}(\sigma)]^2} d\sigma + C_1 \right], \\ \tilde{p}_n^m(s) &= q_n^m(s) \left[c \int_{s}^s \frac{(1 + \sigma^2)^{m-1}}{[l_{n+m-1}(\sigma)]^2} d\sigma + c_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.3.15})$$

с надлежащим выбором постоянных. Таким образом, получим решения

$$\tilde{P}_0^1(\mu) = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \tilde{P}_0^2(\mu) = \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2}, \quad \tilde{P}_1^2(\mu) = \frac{\mu - \frac{1}{3}\mu^3}{1 - \mu^2} \text{ и т. д.,} \quad (\text{VI.3.16})$$

$$\tilde{p}_0^1(s) = \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}, \quad \tilde{p}_0^2(s) = \frac{1 - s^2}{1 + s^2}, \quad \tilde{p}_1^2(s) = \frac{s + \frac{1}{3}s^3}{1 + s^2} \text{ и т. д.} \quad (\text{VI.3.17})$$

VI.4. Решение внешней и внутренней задач для шара. Предполагается, что заданная на поверхности сферы $R = R_0$ функция удовлетворяет условиям представимости ее рядом по сферическим функциям Лапласа

$$f(\mu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \lambda). \quad (\text{VI. 4.1})$$

Тогда гармоническая внутри ($R < R_0$) сферы и вне ее ($R > R_0$) функция, принимающая на этой сфере значения (VI.4.1) и обращающаяся (в случае внешней задачи) в нуль при $R \rightarrow \infty$, не медленнее, чем R^{-1} , представляется рядами

$$\Phi = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{R_0^n} Y_n(\mu, \lambda) = \Phi_i, & R < R_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_0^{n+1}}{R^{n+1}} Y_n(\mu, \lambda) = \Phi_e, & R > R_0. \end{cases} \quad (\text{VI. 4.2})$$

Эта непрерывная во всем пространстве функция представляет потенциал распределенного по поверхности сферы $R = R_0$ простого слоя, плотность которого $\rho(\mu, \lambda)$ определяется известным равенством

$$\rho(\mu, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \nabla (\Phi_i - \Phi_e) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} \right), \quad (\text{VI. 4.3})$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности. В рассматриваемом случае имеем

$$\rho(\mu, \lambda) = \frac{1}{4\pi R_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n(\mu, \lambda). \quad (\text{VI. 4.4})$$

Слагаемые ряда (VI.4.1) — сферические функции Лапласа $Y_n(\mu, \lambda)$ — определяются по заданной на сфере функции $f(\mu, \lambda)$ формулами

$$Y_n(\mu, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda' \int_{-1}^1 d\mu' f(\mu', \lambda') P_n(\cos \gamma), \quad (\text{VI. 4.5})$$

где

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda - \lambda') = \\ &= \mu \mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \cos(\lambda - \lambda') \end{aligned} \quad (\text{VI. 4.6})$$

и

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\mu) P_n(\mu') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\mu) P_n^k(\mu') \cos k(\lambda - \lambda'). \quad (\text{VI. 4.7})$$

Для задач с осевой симметрией (при f , не зависящем от λ) формула (VI.4.5) упрощается. Получаем по (VI.4.5), (VI.4.1)

$$\left. \begin{aligned} Y_n(\mu) &= \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \int_{-1}^1 f(\mu') P_n(\mu') d\mu', \\ f(\mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \int_{-1}^1 f(\mu') P_n(\mu') d\mu'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 4.8})$$

Это — известное разложение функции $f(\mu)$ в ряд по полиномам Лежандра.

VI. 5. Внешняя и внутренняя задачи Дирихле для сжатого эллипсоида (сфероида). Сравнение форм частных решений уравнений Лапласа (VI.1.3) и (VI.1.8) для сферы и для сфероида показывает, что задание искомой гармонической функции на поверхности эллипсоида $s = s_0$ можно также мыслить представлением в форме ряда (VI.4.1); но в этом случае приходится разбить на отдельные слагаемые каждый член этого ряда:

$$Y_n(\mu, \lambda) = a_{n0} P_n(\mu) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\mu). \quad (\text{VI. 5.1})$$

Вместе с тем

$$P_n^m(\mu) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\varphi$$

представляет значение при $s = s_0$ гармонических внутри сфероида ($s < s_0$) и соответственно вне его ($s > s_0$) функций:

$$\frac{p_n^m(s)}{p_n^m(s_0)} P_n^m(\mu) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\varphi, \quad \frac{q_n^m(s)}{q_n^m(s_0)} P_n^m(\mu) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\varphi, \quad (\text{VI. 5.2})$$

причем второе из этих представлений удовлетворяет требованию обращения в нуль на бесконечности (при $s \rightarrow \infty$).

Приходим к решению

$$\begin{aligned} s < s_0: \quad \Phi(s, \mu, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n0} P_n(\mu) \frac{p_n(s)}{p_n(s_0)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\mu) \frac{p_n^m(s)}{p_n^m(s_0)} \right], \quad (\text{VI. 5.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s > s_0: \quad \Phi(s, \mu, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n0} P_n(\mu) \frac{q_n(s)}{q_n(s_0)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\mu) \frac{q_n^m(s)}{q_n^m(s_0)} \right]. \quad (\text{VI. 5.4}) \end{aligned}$$

По (III. 10.8) отрезок нормали δn к поверхности эллипсоида $s = s_0$ определяется равенством

$$\delta n = H_s \delta s = a \sqrt{\frac{s^2 + \mu^2}{1 + s^2}} \delta s.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p_n^m(s)}{p_n^m(s_0)} - \frac{q_n^m(s)}{q_n^m(s_0)} \right) \right]_{s=s_0} = \\ & = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1+s_0^2}{s_0^2+\mu^2}} \left\{ [p_n^m(s_0) q_n^m(s_0)]^{-1} \{ [p_n^m(s_0)]' q_n^m(s_0) - p_n^m(s_0) [q_n^m(s_0)]' \} \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI. 5.5})$$

так что, сославшись на формулу (VI. 3.10), определяющую вронскиан решений $p_n^m(s)$, $q_n^m(s)$, имеем по (VI. 4.3)

$$\begin{aligned} \rho(\mu, \varphi) = & \frac{1}{4\pi a \sqrt{(s_0^2 + \mu^2)(s_0^2 + 1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_{n0} P_n(\mu)}{p(s_0) q_n(s_0)} + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^n \frac{P_n^m(\mu)}{p_n^m(s_0) q_n^m(s_0)} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI. 5.6})$$

Таково выражение плотности потенциала простого слоя на поверхности сфероида $s = s_0$, представляющего гармоническую функцию, определяемую по (VI. 5.3) внутри сфероида и по (VI. 5.4) вне его.

VI. 6. Представление гармонических полиномов произведения Ляме. В теории функций Ляме доказывается, что произведения Ляме (VI. 1.11) при целом n и при надлежащем выборе h в дифференциальных уравнениях (VI. 1.12) — (VI. 1.14) представляются гармоническими полиномами n -й степени

$$F_n(x, y, z) = R(\rho) M(\mu) N(\nu). \quad (\text{VI. 6.1})$$

Для применений в этой книге достаточно рассмотреть случаи $n = 0, 1, 2$.

1°. $n = 0$. Тогда, конечно,

$$R_0(\rho) = 1, \quad M_0(\mu) = 1, \quad N_0(\nu) = 1 \quad (\text{VI. 6.2})$$

и упомянутые уравнения удовлетворяются при $h = 0$.

2°. $n = 1$. Имеются три гармонических полинома первой степени — это сами декартовы координаты, представимые по (III. 11.12) в виде

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(1)} &= x = \frac{a}{e} \rho \mu \nu, \\ F_1^{(2)} &= y = \frac{a}{e \sqrt{1-e^2}} \sqrt{(\rho^2 - e^2)(\mu^2 - e^2)(e^2 - \nu^2)}, \\ F_1^{(3)} &= z = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{(\rho^2 - 1)(1 - \mu^2)(1 - \nu^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 6.3})$$

и для них надо принять

$$R_1^{(1)}(\rho) = \rho, \quad R_1^{(2)} = \sqrt{\rho^2 - e^2}, \quad R_1^{(3)} = \sqrt{\rho^2 - 1}, \quad (\text{VI. 6.4})$$

а постоянную h принять соответственно равной

$$h_1^{(1)} = -(1 + e^2), \quad h_1^{(2)} = -1, \quad h_1^{(3)} = -e^2.$$

3°. $n = 2$. Три из пяти гармонических полиномов второй степени непосредственно угадываются. Это произведения

$$F_2^{(1)} = yz, \quad F_2^{(2)} = zx, \quad F_2^{(3)} = xy, \quad (\text{VI. 6.5})$$

для которых

$$R_2^{(1)}(\rho) = \sqrt{(\rho^2 - e^2)(\rho^2 - 1)}, \quad R_2^{(2)}(\rho) = \sqrt{\rho^2 - 1} \rho, \quad R_2^{(3)}(\rho) = \rho \sqrt{\rho^2 - e^2}, \quad (\text{VI. 6.6})$$

что сразу же следует из (VI. 6.3). В этом случае

$$h_2^{(1)} = -(1 + e^2), \quad h_2^{(2)} = -(1 + 4e^2), \quad h_2^{(3)} = -(4 + e^2). \quad (\text{VI. 6.7})$$

Для построения еще двух гармонических полиномов второй степени потребуем, чтобы левая часть основного тождества (III. 11.11)

$$\frac{x^2}{\sigma} + \frac{y^2}{\sigma - e^2} + \frac{z^2}{\sigma - 1} - a^2 = -a^2 \frac{(\sigma - \nu^2)(\sigma - \mu^2)(\sigma - \rho^2)}{f(\sigma)}$$

удовлетворяла уравнению Лапласа

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{x^2}{\sigma} + \frac{y^2}{\sigma - e^2} + \frac{z^2}{\sigma - 1} - a^2 \right) &= 2 \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma - e^2} + \frac{1}{\sigma - 1} \right) = \\ &= \frac{2}{f(\sigma)} [3\sigma^2 - 2(1 + e^2)\sigma + e^2]. \end{aligned} \quad (\text{VI. 6.8})$$

Отсюда получаем два значения постоянной σ :

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}(1 + e^2) + \beta, \quad \sigma_2 = \frac{1}{3}(1 + e^2) - \beta, \quad \beta = \frac{1}{3} \sqrt{1 - e^2 + e^4}, \quad (\text{VI. 6.9})$$

которым соответствуют гармонические полиномы

$$\left. \begin{aligned} F_2^{(4)} &= \frac{x^2}{a^2 \sigma_1} + \frac{y^2}{a^2 (\sigma_1 - e^2)} + \frac{z^2}{a^2 (\sigma_1 - 1)} - 1, \\ F_2^{(5)} &= \frac{x^2}{a^2 \sigma_2} + \frac{y^2}{a^2 (\sigma_2 - e^2)} + \frac{z^2}{a^2 (\sigma_2 - 1)} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 6.10})$$

Для них

$$R_2^{(4)}(\rho) = \sigma_1 - \rho^2, \quad R_2^{(5)} = \sigma_2 - \rho^2, \quad (\text{VI. 6.11})$$

а значения постоянной в уравнениях (VI. 1.12) — (VI. 1.14) соответственно будут

$$h_2^{(4)} = -6\sigma_2, \quad h_2^{(5)} = -6\sigma_1. \quad (\text{VI. 6.12})$$

VI. 7. Функция $S_i^{(k)}(\rho)$. Каждому из построенных в предшествующем пункте решений дифференциального уравнения (VI. 1.12)

$$R_i^{(k)}(\rho) \quad (i = 0, 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, 2i + 1)$$

можно сопоставить второе решение этого уравнения, обращающееся в нуль на бесконечности (при $\rho \rightarrow \infty$). Подобно (VI. 3.2) оно представляется в виде

$$S(\rho) = R(\rho) \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{[R(\lambda)]^2 \Delta(\lambda)} = R(\rho) \omega(\rho). \quad (\text{VI. 7.1})$$

Отсюда следует, что вронскиан решений R, S равен

$$R'(\rho) S(\rho) - R(\rho) S'(\rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)}. \quad (\text{VI. 7.2})$$

Приходим к решениям:

$$1^\circ. \quad n = 0 \quad S_0(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} = \omega_0(\rho); \quad (\text{VI. 7.3})$$

$$2^\circ. \quad n = 1 \quad S_1^{(k)}(\rho) = R_1^{(k)}(\rho) \omega_1^{(k)}(\rho) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (\text{VI. 7.4})$$

где $\omega_1^{(k)}(\rho)$ представляются, как и $\omega_0(\rho)$, эллиптическими интегралами

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^{(1)}(\rho) &= \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 \Delta(\lambda)}, \\ \omega_1^{(2)}(\rho) &= \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)}, \\ \omega_1^{(3)}(\rho) &= \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1) \Delta(\lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI. 7.5})$$

$$3^\circ. \quad n = 2 \quad S_2(\rho) = R_2^{(k)} \omega_2^{(k)}(\rho) \quad (k = 1, 2, \dots, 5). \quad (\text{VI. 7.6})$$

Здесь.

$$\omega_2^{(1)}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - e^2)(\lambda^2 - 1)\Delta(\lambda)} = \frac{1}{1 - e^2} [\omega_1^{(3)}(\rho) - \omega_1^{(2)}(\rho)], \quad (\text{VI. 7.7})$$

$$\omega_2^{(2)}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda^2 - 1)\lambda^2 \Delta(\lambda)} = - [\omega_1^{(1)}(\rho) - \omega_1^{(3)}(\rho)], \quad (\text{VI. 7.8})$$

$$\omega_2^{(3)}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 (\lambda^2 - e^2) \Delta(\lambda)} = \frac{1}{e^2} [\omega_1^{(2)}(\rho) - \omega_1^{(1)}(\rho)] \quad (\text{VI. 7.9})$$

и, далее,

$$\omega_2^{(4)}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\sigma_1 - \lambda^2)^2 \Delta(\lambda)}, \quad \omega_2^{(5)}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{(\sigma_2 - \lambda^2)^2 \Delta(\lambda)}. \quad (\text{VI. 7.10})$$

Все эти эллиптические интегралы известными приемами приводятся к нормальным формам Лежандра первого и второго рода; отсутствие интегралов третьего рода не случайно, а является следствием некоторых свойств функций Ляме.

VI. 8. Потенциалы простого слоя на эллипсоиде. Сопоставим два решения уравнения Лапласа — одно, представимое гармоническим полиномом (VI. 6.1):

$$F_n(x, y, z) = R(\rho) M(\mu) N(\nu), \quad (\text{VI. 8.1})$$

и второе, определяемое согласно (VI. 7.1) формулой

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega(\rho_0)} S(\rho) M(\mu) N(\nu) &= \frac{\omega(\rho)}{\omega(\rho_0)} R(\rho) M(\mu) N(\nu) = \\ &= \frac{\omega(\rho)}{\omega(\rho_0)} F_n(x, y, z). \end{aligned} \quad (\text{VI. 8.2})$$

Приходим к рассмотрению функции

$$G(x, y, z) = \begin{cases} F_n(x, y, z), & \rho < \rho_0, \\ \frac{\omega(\rho)}{\omega(\rho_0)} F_n(x, y, z), & \rho > \rho_0, \end{cases} \quad (\text{VI. 8.3})$$

гармонической внутри ($\rho < \rho_0$) и вне ($\rho > \rho_0$) эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2 \rho_0^2} + \frac{y^2}{a^2 (\rho_0^2 - e^2)} + \frac{z^2}{a^2 (\rho_0^2 - 1)} - 1 = 0, \quad (\text{VI. 8.4})$$

обращающейся в нуль на бесконечности ($\rho \rightarrow \infty$), непрерывной во всем пространстве и принимающей на поверхности O эллипсоида $\rho = \rho_0$ значения

$$G(x, y, z)|_{\rho=\rho_0} = F_n(x, y, z)|_{\rho=\rho_0}. \quad (\text{VI. 8.5})$$

Функция $G(x, y, z)$, обладающая всеми характеристическими свойствами потенциала простого слоя, распределенного по этой поверхности, представима в виде

$$G(x, y, z) = \int_0 \int \frac{q(\xi, \eta, \zeta) d\sigma}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}}. \quad (\text{VI. 8.6})$$

Плотность этого потенциала q вычисляется по известному соотношению

$$\left[\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial n} \right]_{\rho \rightarrow \rho_0 - 0} - \left[\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial n} \right]_{\rho \rightarrow \rho_0 + 0} = 4\pi q(x, y, z),$$

где n — внешняя нормаль к эллипсоиду $\rho = \rho_0$ и $\delta n = H_\rho \delta \rho$, причем коэффициент Ляме H_ρ определен по (III. 11.21) или (III. 11.22). Вместе с тем

$$\left. \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial n} \right|_{\rho \rightarrow \rho_0 - 0} = \frac{1}{H_\rho^0} R'(\rho_0) M(\mu) N(\nu) = \frac{R'(\rho_0)}{H_\rho^0 R(\rho_0)} F_n(x, y, z) \Big|_{\rho = \rho_0},$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial n} \right|_{\rho \rightarrow \rho_0 + 0} &= \frac{1}{H_\rho^0 \omega(\rho_0)} S'(\rho_0) M(\mu) N(\nu) = \\ &= \frac{S'(\rho_0)}{H_\rho^0 S(\rho_0)} F_n(x, y, z) \Big|_{\rho = \rho_0}, \end{aligned}$$

так что

$$4\pi q(x, y, z) = \frac{F_n(x, y, z)}{H_\rho^0 S(\rho_0) R(\rho_0)} [R'(\rho_0) S(\rho_0) - R(\rho_0) S'(\rho_0)]$$

и по (VI. 7.2), (VI. 7.1)

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi a} \frac{[F_n(x, y, z)]_{\rho = \rho_0}}{\omega(\rho_0) R^2(\rho_0) \sqrt{(\rho_0^2 - \nu^2)(\rho_0^2 - \mu^2)}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{[F_n(x, y, z)]_{\rho = \rho_0}}{\omega(\rho_0) R^2(\rho_0) \rho_0 D_\rho^0 \Delta(\rho_0)}. \quad (\text{VI. 8.7}) \end{aligned}$$

Перечисленным в пп. VI.6, VI.7 решениям соответствуют потенциалы:

$$1^\circ. \quad n=0 \quad G_0(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \rho < \rho_0, \\ \frac{\omega(\rho)}{\omega(\rho_0)}, & \rho > \rho_0, \end{cases} \quad (\text{VI. 8.8})$$

— это поле электростатического потенциала, создаваемого проводящей поверхностью эллипсоида $\rho = \rho_0$, на которой поддерживается постоянный потенциал; формула (VI. 8.7), в которой надо принять $F = 1$, $R = 1$ и определить $\omega_0(\rho_0)$ эллиптическим интегралом (VI. 7.3), дает распределение заряда на этой поверхности.

2°. $n = 1$. Трем решениям (VI.7.4) соответствуют потенциалы

$$G_1^{(s)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_s, & \rho < \rho_0, \\ x_s \frac{\omega_1^{(s)}(\rho)}{\omega_1^{(s)}(\rho_0)}, & \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (s = 1, 2, 3). \quad (\text{VI. 8.9})$$

3°. При $n = 2$ имеем три потенциала, принимающие на поверхности $\rho = \rho_0$ значения, равные произведениям xy, yz, zx ; например,

$$G_2^{(1)}(x, y, z) = \begin{cases} yz, & \rho < \rho_0, \\ yz \frac{\omega_2^{(1)}(\rho)}{\omega_2^{(1)}(\rho_0)}, & \rho > \rho_0. \end{cases} \quad (\text{VI. 8.10})$$

Еще два потенциала, принимающие на поверхности $\rho = \rho_0$ значения (VI.6.10), строятся с помощью функций $\omega_2^{(4)}(\rho)$, $\omega_2^{(5)}(\rho)$, определяемых по (VI.7.10):

$$G_2^{(4, 5)}(x, y, z) = \begin{cases} F_2^{(4, 5)}(x, y, z), & \rho < \rho_0, \\ \frac{\omega_2^{(4, 5)}(\rho)}{\omega_2^{(4, 5)}(\rho_0)} F_2^{(4, 5)}(x, y, z), & \rho > \rho_0. \end{cases} \quad (\text{VI. 8.11})$$

При $\rho_0 = 1$ выражение (VI.8.3) для четных относительно z функций $F_n(x, y, z)$ определяет потенциал пластинки, ограниченной фокальным эллипсом E_0 [см. (III.11.16)]. Этот потенциал на поверхности пластинки имеет значение

$$G(x, y, 0) = [F_n(x, y, 0)]_{\rho=1} = R(1) M(\mu) N(\nu), \quad (\text{VI. 8.12})$$

а вне ее

$$G(x, y, z) = \frac{\omega(\rho)}{\omega(1)} F_n(x, y, z). \quad (\text{VI. 8.13})$$

Выражение плотности получим путем предельного перехода в (VI.8.7) с удвоением результата, что соответствует наличию слоя на «верхней» и «нижней» ($z > 0, z < 0$) сторонах выродившегося в пластинку эллипсоида:

$$q(x, y) = \frac{1}{2\pi a} \frac{[F_n(x, y, 0)]_{\rho=1}}{\omega(1) R^2(1) \sqrt{(1-\nu^2)(1-\mu^2)}}. \quad (\text{VI. 8.14})$$

Сославшись на (III.11.14), легко преобразовать это выражение к виду

$$q(x, y) = \frac{[F_n(x, y, 0)]_{\rho=1}}{2\pi a \sqrt{1-e^2} \omega(1) R^2(1)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right]^{-1/2}. \quad (\text{VI. 8.15})$$

На границе пластинки — на фокальном эллипсе E_0 — плотность становится бесконечной, но она на E_0 будет нулем, если в состав $[F_n(x, y, 0)]_{\rho=1}$ входит множитель

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)}.$$

Такой потенциал пластинки с непрерывной плотностью может быть построен как линейная комбинация потенциалов $G_0, G_2^{(4)}, G_2^{(5)}$:

$$G_*(x, y, z) = C_0 G_0(x, y, z) + C_1 G_2^{(4)}(x, y, z) + C_2 G_2^{(5)}(x, y, z), \quad (\text{VI.8.16})$$

если в соответствии с (VI.8.15) определить постоянные C_0, C_1, C_2 условием

$$\begin{aligned} \frac{C_0}{\omega_0(1)} + \frac{C_1}{\omega_2^{(4)}(1)(\sigma_1-1)^2} \left(\frac{x^2}{a^2\sigma_1} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_1-e^2)} - 1 \right) + \\ + \frac{C_2}{\omega_2^{(5)}(1)(\sigma_2-1)^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_2-e^2)} - 1 \right) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \end{aligned} \quad (\text{VI.8.17})$$

[см. (VI.6.10), (VI.6.11)]. Тогда выражение плотности, соответствующей потенциалу G_* , будет

$$q(x, y) = \frac{1}{2\pi a \sqrt{1-e^2}} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} \right]^{1/2}. \quad (\text{VI.8.18})$$

Соотношение (VI.8.17) дает три уравнения, определяющие постоянные C_0, C_1, C_2 . Этим определяется потенциал G_* ; опуская промежуточные вычисления, приводим его выражение:

$$G_* = \frac{\pi}{2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{a^2(\lambda^2-e^2)} - \frac{z^2}{a^2(\lambda^2-1)} \right]. \quad (\text{VI.8.19})$$

Это — объемный (ньютонов) потенциал эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2\rho_0^2} + \frac{y^2}{a^2(\rho_0^2-e^2)} + \frac{z^2}{a^2(\rho_0^2-1)} - 1 = 0$$

постоянной плотности на внешнюю точку ($\rho > \rho_0$). Вместе с тем он представляет потенциал слоя на эллиптической пластинке, ограниченной эллипсом E_0 , с плотностью, изменяющейся по закону (VI.8.18). Заметим еще, что ньютонов потенциал эллипсоида на его внутреннюю точку ($\rho < \rho_0$) представляется квадратичной функцией координат x, y, z :

$$G_* = \frac{1}{2} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2\lambda^2} - \frac{y^2}{a^2(\lambda^2-e^2)} - \frac{z^2}{a^2(\lambda^2-1)} \right]. \quad (\text{VI.8.20})$$

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Общие сочинения

В первую очередь следует назвать капитальный курс:

1. Ляв А., Математическая теория упругости, перев. с англ., ОНТИ, Москва 1935.

Основные уравнения теории упругости, плоская задача, задача о кручении и изгибе стержня изложены в труде:

2. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5, «Наука», Москва 1966.

Более доступен по примененным математическим средствам изобилующий инженерными приложениями курс теории упругости С. П. Тимошенко (имеется несколько изданий перевода этой книги на русский язык). Последнее американское издание этой книги вышло в сотрудничестве с Дж. Гудиром:

3. Timoshenko S. P. and Goodier J. N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York 1951.

Изложение на современном уровне с применением средств тензорного анализа и включающее главы по нелинейной теории упругости содержится в труде:

4. Green A. E. and Zerna W., Theoretical Elasticity, Clarendon Press, Oxford, 1954.

Краткое изложение основ теории содержится в книгах:

5. Снеддон И. Н. и Берри Д. С., Классическая теория упругости, перев. с англ., Физматгиз, Москва 1961.
6. Треффтц Е., Математическая теория упругости, перев. с нем., ГТТИ, Москва 1934.

Изложение основных уравнений нелинейной теории упругости и некоторых вопросов линейной теории дается в книге:

7. Новожилов В. В., Теория упругости, Судпромгиз, Ленинград 1958.

Техническим аспектам теории главным образом посвящены книги:

8. Ван Цзи-де, Прикладная теория упругости, перев. с англ., Физматгиз, Москва 1959.
9. Саусвелл Р. В., Введение в теорию упругости для инженеров и физиков, перев. с англ., ИЛ, Москва 1948.

Богатством материала и педагогическим мастерством отличаются книги:

10. Fung Y. C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, New York 1965.
11. Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York 1946.

Учебными руководствами на русском языке являются университетский курс:

12. Лейбензон Л. С., Курс теории упругости, Гостехиздат, Москва 1947.
и предназначенные для технических учебных заведений курсы:
13. К а ц А. М., Теория упругости, Гостехиздат, Москва 1956.
14. Жемочкин Б. Н., Теория упругости, Стройвоенмориздат, Москва 1948.
15. Филоненко-Бородич М. М., Теория упругости, Гостехиздат, Москва 1947.

Оригинальным построением теории и богатством приложений отличается труд:

16. Па п ъ в и ч П. Ф., Теория упругости, Оборонгиз, Москва 1939.

Не утратило и в наше время своего значения классическое сочинение:

17. Clebsch A., *Théorie de l'élasticité des corps solides*, Paris 1883. Перевод с примечаниями Сен-Венана с немецкого курса: Clebsch A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, Leipzig 1862.

Основные этапы истории развития теории упругости освещены в книге:

18. Тимошенко С. П., История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений, перев. с англ., Гостехиздат, Москва 1957.

Очерк развития теории упругости содержится во введении в книге Лява [1].

При написании настоящей книги существенно использованы материалы обзоров:

19. Grioli G., *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium*, Springer, Berlin 1962.
20. Truesdell C., *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*. International Science Review Series, 8, Gordon and Breech, 1966 (перепечатка из *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 1, стр. 125—300, 1952; 2, стр. 595—616, 1953).

Большая часть перечисленных сочинений [1, 2, 3, 11, 19, 20]*) содержит обширные литературные указатели.

К главам I, II

При изложении основных определений механики сплошной среды (тензор напряжений, меры и тензоры деформации) использованы материалы следующих книг:

21. С е д о в Л. И., Введение в механику сплошной среды, Физматгиз, Москва 1962.
22. Eringen A. C., *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, New York 1962,
а также обзоры [19, 20].

К п. 1.3 гл. I. Основоположным трудом по моментной теории упругости является книга:

*) При написании этой книги не могли быть использованы материалы недавно опубликованного курса: Solomon L., *Elasticité linéaire*, Masson, Paris, 1968. В нем приведено большое число библиографических данных, относящихся к последним годам.

23. Cosserat E. et F., *Théorie des corps déformables*, Herrmann, Paris 1909.

Из большого числа работ, посвященных построению общей теории и рассмотрению частных задач, укажем на следующие:

24. Аэро Э. П. и Кувшинский Е. В., Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. *Физика твердого тела*, 2, стр. 1399—1409, 1960.
25. Пальмов В. А., Основные уравнения несимметричной упругости. *Прикл. матем. и мех.*, 28, № 3, стр. 401—407, 1964. Пальмов В. А., Плоская задача несимметричной теории упругости. Там же, 28, № 6, стр. 1117—1120, 1964.
26. Миндлин Р. Д., Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений, перев. с англ. В сб. «Механика», 4 (88), стр. 115—128, 1964. Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф., Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости, перев. с англ. Там же, 4 (88), стр. 80—114, 1964. Mindlin R. D., Stress Functions for a Cosserat Continuum. *International Journ. of Solids Structures*, 1, стр. 73—78, 1965.
27. Koiter W. T., Couple-Stresses in the Theory of Elasticity. *Kon. Nederl. Akad. v. Wetenschappen-Amsterdam, Proc. Ser. B*, 67, N 1, стр. 17—44, 1964 (имеется русский перевод в сб. «Механика», 3 (91), стр. 88—112, 1965).
28. Muki R., Sternberg E., The Influence of Couple—Stresses on Singular Stress Concentration in Elastic Solids. *Zeitsch. f. angew. Math. u. Phys.*, 16, 5, стр. 611—618, 1965.

Несимметричная теория упругости излагается в гл. X книги Гриоли [19].

К п. 1.6 гл. I. Тензоры функций напряжений частного вида рассматривались Максвеллом (*Scientific Papers*, 2, 1870) и Морера (*Rendiconti d. Lincei*, Ser. 5, 1, стр. 137—141, 1892). Соединение этих решений, указанное Бельтрами (там же, стр. 141—145), дает тензор функций напряжений общего вида, введенный в монографии:

29. Кругов Ю. А., Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости, Изд-во АН СССР, 1949,

и в работах:

30. Finzi B., *Integrazione della equazione della Meccanica dei sistemi continui*. *Rendiconti d. Lincei*, Ser. VI, 19, 1934.
31. Блох В. И., Функции напряжений в теории упругости. *Прикл. матем. и мех.*, 14, стр. 415—422, 1950. Теория упругости. Изд-во Харьковского ун-та, 1950.

К пп. 3.4 гл. I. Принятое здесь определение тензора напряжений предложено в статьях:

32. Trefftz E., *Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts*. *Zeitsch. für angew. Math. und Mech.*, 12, стр. 160—165, 1933.
33. Kappus R., *Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen*. *Zeitsch. für angew. Math. und Mech.*, 19, стр. 271—285, 344—361, 1939,

и в книге:

34. Hamel G., *Theoretische Mechanik*, Springer, Berlin 1949.

К пп. 4.1—4.12 гл. I. В этом параграфе излагается часть содержания гл. V книги Гриоли [19] и статьи:

35. Signorini A., *Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui*. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Ser. II, 2, стр. 3—23, 1933.

К пп. 2.1—2.2 гл. II. Вывод уравнений сплошности Сен-Венана как условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений, опре-

деляющих перемещения по заданному линейному тензору деформации, приведен в ХХI лекции классического труда:

36. Кирхгофф Г., *Механика. Лекции по математической физике*, перев. с нем., Изд-во АН СССР, 1960.

Кирхгофф намечает ход процесса интегрирования; см. также [6]; формулы, определяющие перемещения через деформации, даны Чезаро:

37. Cesaro E., *Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche*. Rendiconti d. Accademia R. di Napoli, 12, стр. 311—321, 1906.

К п. 2.4 гл. II. Понятие дисторсии введено в фундаментальном ме-
муаре:

38. Volterra V., *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. Annales de l'Éc. Norm. Sup., 3-me serie, 24, стр. 401—507, 1907 (воспроизведен в «Opere matematiche», т. II).

К §§ 3, 4 гл. II. Изложение этих параграфов основывается на обзоре Трусделла [20]; см. также гл. IX книги:

39. Прагер В., *Введение в механику сплошной среды*, перев. с англ., ИЛ, Москва 1963.

Предложенные Генки логарифмические меры деформации

40. Hencky H., *Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideall elastischen Stoffen*. Zeitsch. für techn. Physik, 9, стр. 214—227, 1928, представляют известные преимущества при обработке экспериментальных результатов. О возможных определениях мер деформации см. также статью:
41. Рейнер М., *Феноменологическая микрореология*, перев. с англ. в Сб. «Реология» под ред. Ф. Эйриха, стр. 22—86, ИЛ, Москва 1962.

К п. 3.5 гл. II. На геометрическую интерпретацию тензора \hat{G}^{-1} , указываемую формулой (3.5.5), обращено внимание в заметке:

42. Truesdell C., *Geometric Interpretation for the Reciprocal Deformation Tensors*. Quart. of Appl. Math., 15, № 4, стр. 434—435, 1958.

К п. 6.2 гл. II. Построение тензора поворота в случае плоского поля перемещения указано Синьорини в работе:

43. Signorini A., *Transformazioni termoelastiche finite*. Ann. di Mat. pura e appl., Ser. IV, 22, стр. 33—143, 1943.

К главе III

Построение линейной теории связи тензоров напряжений и деформации, принятое в этой главе, основано на статьях:

44. Непську Н., *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*. Zeitsch. für angew. Math. und Mech., 4, стр. 323—334, 1924 (имеется русский перевод в сб. «Теория пластичности», ИЛ, Москва 1948).
45. Качанов Л. М., *Упруго-пластическое состояние твердых тел*. Прикл. матем. и мех., 5, № 3, стр. 431—437, 1941.

В п. 2.1 использовано изложение, принятое в гл. VIII книги:

46. Jeffreys H., *Cartesian Tensors*, Cambridge University Press, 1931.

Таблица в п. 2.3 воспроизведена из книги:

47. Гольденблат И. И., *Некоторые вопросы механики деформируемых сред*, Гостехиздат, Москва 1955.

К п. 2.4. Русский перевод статьи Роша и Эйхингера опубликован в сборнике [44].

К пп. 3.4—3.6.

48. Новацкий В., Вопросы термоупругости, перев. с польского, Изд-во АН СССР, Москва 1962.
49. Боли Б., Уэйиер Дж., Теория температурных напряжений, перев. с англ., «Мир», Москва 1964.
50. Коваленко А. Д., Введение в термоупругость, изд-во «Наукова думка», Киев 1965.

К главе IV

К п. 1.4. Первая публикация П. Ф. Папковича в Изв. АН СССР (сер. матем. и естеств. наук) относится к 1932 г. Подробное изложение дано в его курсе [16]. Эта же форма решения была получена Г. Нейбером в статье:

51. Neuber H., Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Zeitsch. für angew. Math. und Mech., 14, N 4, 1934.

Ее содержание повторено и дополнено формулами для компонент тензора напряжений в ортогональных криволинейных координатах в книге:

52. Нейбер Г., Концентрация напряжений, перев. с первого немецкого издания, Гостехиздат, Москва 1947.

Вопрос о допустимости использования в представлении решения уравнений равновесия в перемещениях трех (а не четырех) гармонических функций рассмотрен в работах:

53. Слободянский М. Г., Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции. Прикл. матем. и мех., 18, стр. 55—74, 1954.
54. Юбенкс Р., Стериберг Э., О полноте функций напряжений Буссинеска — Папковича, перев. с англ. в сб. «Механика», 6 (46), стр. 99—109, 1957.

К п. 1.7. См. [28], [31], а также работы:

55. Галеркин Б. Г., К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле (Собрание сочинений Б. Г. Галеркина, т. I, стр. 318—321, Изд-во АН СССР, Москва 1953; впервые опубликовано в Докл. АН СССР, 1930).
56. Mindlin R. D., Note on the Galerkin and Papkovitch Stress Functions. Bull. Amer. Math. Soc., 42, стр. 373, 1936.

К § 2. Принципы минимума потенциальной энергии и дополнительной работы излагаются в большинстве перечисленных курсов теории упругости. Им и их разнообразным приложениям посвящена также книга:

57. Лейбензон Л. С., Вариационные методы решения задач теории упругости, Гостехиздат, Москва 1943, а также в Собрании трудов Л. С. Лейбензона, т. I, Изд-во АН СССР, Москва 1951.

К п. 2.5. На естественную связь принципа минимума дополнительной работы со «связанной задачей» вариационного исчисления обратил внимание Саусвелл (1936); доказательство Саусвелла воспроизведено в [57] и [12].

К п. 2.6. Изложение смешанного принципа стационарности основывается на статье:

58. Reissner E., On Some Variational Theorems in Elasticity. Problems of Continuum Mechanics. Contributions in Honor of N. I. Muskhelishvili (имеется издание на русском языке), стр. 370—381, Philadelphia, 1961.

Превосходное изложение вариационных принципов теории упругости приводится в книге [6].

К п. 2.7. Вариационные принципы при учете температурных слагаемых представлены в монографии:

59. Майзель В. М., Температурная задача теории упругости, Изд-во АН УССР, Киев 1951.

Полный обзор вариационных принципов теории упругости дан в статье:

60. Tonli E., Variational principles in Elastostatics. Meccanica, 2, N 4, стр. 201—208, 1967.

Исторический очерк развития принципа Сен-Венана и приемов его доказательства дан в содержащей исчерпывающие литературные указания статье:

61. Джанелидзе Г. Ю., Принцип Сен-Венана (к столетию принципа). Труды Ленингр. политехн. ин-та. Динамика и прочность машин, № 192, 1958.

См. также [10].

К пп. 3.1—3.4. Изложения теоремы взаимности и ее простейших приложений приводятся в курсах [1, 3, 6, 10] и др. Об учете температурных слагаемых см. [49, 50].

К п. 3.5. Задача о действии сосредоточенной силы в неограниченной упругой среде (построение тензора влияния) впервые рассмотрена В. Томсоном (Кельвином) в мемуаре 1848 г.; см. также

62. Thomson W., Note on the Integration of the Equations of Equilibrium of an Elastic Solid. Mathematical and Physical Papers, 1, Cambridge, 1882.

К пп. 3.6—3.7. Об используемых здесь и далее предложениях теории потенциала см. книгу:

63. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, Москва 1948.

К п. 4.1. Доказательство теоремы единственности Кирхгоффа см. в [36], а также в курсах [1, 2, 6] и др.

О формулировке теоремы единственности в случае сосредоточенных сил см. статью:

64. Стернберг Е. и Юбанкс Р., О понятии сосредоточенных сил и расширении применимости теоремы единственности в линейной теории упругости, перев. с англ. в Сб. «Механика», 5 (39), стр. 56—84, 1956.

В изложении пп. 4.2—4.8 (вывод интегральных уравнений первой и второй краевых задач и доказательства существования решений) использована книга:

65. Купрадзев В. Д., Методы потенциала в теории упругости, Физматгиз, Москва 1963 *).

Очень кратко постановка и решение этих задач приведены в книге:

66. Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, Москва 1962.

См. также обзорный доклад:

67. Купрадзев В. Д., Метод сингулярных интегральных уравнений в пространственной задаче упругости. Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Изд-во АН СССР, Москва 1962.

*) Изложению исследований по существованию и единственности решений краевых задач статики и установившихся колебаний упругого тела посвящен труд: Купрадзев В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В., «Трехмерные задачи математической теории упругости», Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси 1968.

Вопрос о численной реализации решений интегральных уравнений рассмотрен в статьях:

68. Купрадзе В. Д., Об одном методе приближенного решения предельных задач математической физики. Журнал вычислит. математики и математической физики, 4, № 6, стр. 1118, 1964.
69. Купрадзе В. Д., Методы потенциала в теории упругости. Приложения теории функций к механике сплошной среды. Труды Международного симпозиума 1963 г. в Тбилиси, стр. 211—216, изд-во «Наука», Москва 1965.

Доказательства Лихтенштейна и Корна существования решения краевых задач теории упругости изложены в [6].

Изложение пп. 5.1—5.5 основывается целиком на мемуаре [38].

К главе V

По способам решений и рассмотренному материалу содержание этой главы в значительной мере отличается от книги автора:

70. Лурье А. И., Пространственные задачи теории упругости, Гостехиздат, Москва 1955.

К п. 1.4. Работы Буссинека собраны в его классическом сочинении:

71. Boussinesq J., Application des potentiels a l'étude de l'équilibre et du mouvements de solides élastiques, Paris 1885.

К п. 1.5. Эти же результаты приводятся Новацким [48].

К п. 1.6. Содержание этого пункта представляет переработанное изложение раздела «Определение поля упругих напряжений, создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой» в книге:

72. Эшелби Д., Континуальная теория дислокаций, перев. с англ., ИЛ, Москва 1963.

К пп. 2.1—2.4. Решение задачи о действии на упругое полупространство сосредоточенной силы, нормальной к его плоской границе, впервые дано Буссинеком [71]. Более общую задачу о нагружении полупространства системой нормальных и касательных поверхностных сил одновременно с Буссинеком, основываясь на методе интегрирования Бетти, рассмотрел Черрути в мемуаре:

73. Cerruti V., Ricerche intorno all'equilibrio de corpi elastici isotropi. Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, 13, стр. 81, 1881—1882.

См. также [1, 70].

К п. 2.5. На плодотворность применения метода изображений в задачах теории упругости указал Сомильяна:

74. Somigliana C., Sul principio delle immagini di Lord Kelvin e le equazioni dell' Elasticità. Rendiconti d. Lincei, Ser. 5, 11, стр. 145, 1902.

Решение задачи о напряженном состоянии в упругом полупространстве, создаваемом сосредоточенной в его точке силой, дал Миндлин в работе:

75. Mindlin R. D., Force at a point in the interior of a semi infinite solid. Proc. First Midwestern Conf. Solid Mech., Univ. of Illinois, стр. 111, Urbana, 1953.

К п. 2.6. Задача о температурных напряжениях в упругом полупространстве подробно рассмотрена в работе:

76. Sternberg E. and McDowell E. L., On the Steady-State Thermoelastic Problem for the Half-Space. *Quart. of Appl. Math.*, 14, N 4, стр. 381—398, 1957.

Отсутствие напряжений на плоскостях, параллельных границе полупространства, установлено ранее в книге [70]. См. также работу:

77. Sneddon I. N. and Tait R. I., On Lure's Solution of the Equations of Thermoelastic Equilibrium. *Problems of Continuum Mechanics. Contributions in Honor of N. I. Muckhelishvili* (имеется издание на русском языке), стр. 497—513, Philadelphia, 1961.

К пп. 2.10—2.11. Решения краевых задач для упругого полупространства приведены также в работе:

78. Michell I. H., The Transmission of Stress across a Plane of Discontinuity in an Isotropic Elastic Solid, and the Potential Solutions for a Plane Boundary. *The Collected Mathematical Works of I. H. M. and A. G. Michell*, стр. 189—195, Noordhoff, 1964 (впервые опубликовано в 1899 г.).

К пп. 2.12.—2.14. См. [10, 61], а также

79. Mises R. V., On Saint-Venant's Principle. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51, стр. 555, 1945.
80. Sternberg E., On Saint-Venant's Principle. *Quart. of Appl. Math.* 11, N 4, стр. 393—402, 1954 (January).

К § 3. Решение в сферических координатах задачи о равновесии упругой сферы впервые дано в классическом сочинении:

81. Lamé G., *Leçons sur les cordonnées curvilignes et leurs applications*, Paris 1859.

Существенным шагом вперед явилась работа:

82. Thomson W., *Dynamical Problems Regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid*. *Mathematical and Physical Papers*, 3, стр. 351, 1892 (впервые опубликовано в 1863 г.),

в которой решение представлено в декартовых координатах через три гармонических функции, разыскиваемых в форме рядов по однородным гармоническим полиномам. Это решение воспроизведено в классическом трактате:

83. Thomson W. and Tait P. G., *Treatise on Natural Philosophy*, т. 1, часть II, 1883.

Решение Томсона первой краевой задачи для сплошной сферы (п. 3.2) воспроизведено в работах [1, 12, 6]; в работах [1, 6] указан ход вычисления также во второй краевой задаче (п. 3.5). Для более сложного случая полой сферы Томсон дал решение первой краевой задачи и наметил способ решения второй.

Задача о равновесии сферы рассматривалась также в работах:

84. Tedone O., Saggio di una teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo. *Annali di Matematica pura et applicata*, Ser. IIIa, 10, стр. 13, 1904.
85. Somigliana C., Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superfici sferiche. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fisiche e Matem.*, Ser. I, стр. 100, 1887.
86. Cerruti V., Sulla deformazione di un involucro sferico isotropo per date forze agenti sulle due superfici limiti. *Atti della Reale Acad. dei Lincei, Mem. della Classe di Sc. Fisiche, Matematiche e Naturali*, 1891.
87. Лурье А. И., Равновесие упругой полой сферы. *Прикл. матем. и мех.*, 17, № 3, стр. 311, 1953.

Решения краевых задач для сплошной и полой сферы даны в гл. 8 книги [70]. Случай симметрично нагруженной сферы рассмотрен в гл. 6 этой книги, а также в работах:

88. Галеркин Б. Г., Равновесие упругой сферической оболочки. Прикл. матем. и мех., 6, стр. 487, 1942.
89. Лурье А. И., Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки, там же, 7, стр. 393, 1943.
90. Weber C., Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften. Zeitsch. für angew. Math. und Mech., 32, N 6, стр. 186, 1952.
91. Sternberg E., Rosental F., The Elastic Sphere under Concentrated Loads. Journ. of Appl. Mech., 19, N 4, стр. 413, 1952.
92. Fichera G., Sur colcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di uno strato sferico elastica. Atti dell' Accad. Nazionale dei Lincei, Classe di Sc. Fisiche, Ser. 8, 6, стр. 583, 1949.

К пп. 3.4 и 3.8. Задача о напряженном состоянии шара при неустановившемся тепловом режиме рассмотрена в книге [3] по результатам работы:

93. Grünberg G. (Г. А. Гринберг), Über die in einer isotropen Kugel durch ungleichförmige Erwärmung erregten Spannungszustände. Zeitsch. für Physik, 35, стр. 548, 1925.

К пп. 3.9, 3.10. Задачи о напряженном состоянии в окрестности сферической полости рассматривали:

94. Southwell R. V., On the Concentration of Stress in the Neighborhood of a Small Spherical Flow. Phil. Mag., Ser. 7, 1, стр. 71, 1926.
95. Larmor J., The Influence of Flaws and Air-Cavities on the Strength of Materials. Phil. Mag., Ser. 5, 33, стр. 70, 1892.

В связи с геофизическими применениями (теория фигуры Земли и др.) задачам пп. 3.12, 3.13 посвящена большая литература, указанная в книге [1] и в труде:

96. Джеффрис Г., Земля, ее происхождение, теория и строение, перев. с англ., ИЛ, Москва 1960.

К § 4. В работе:

97. Абрамян Б. Л., Александров А. Я., Осесимметричные задачи теории упругости. Труды второго всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Механика твердого тела, изд-во «Наука», 1966, дан подробный обзор многообразных направлений исследований по пространственным задачам теории упругости; перечислены работы 241 автора. Значительное место уделено (не рассмотренному в этой книге) методу решения осесимметричных задач с помощью функций комплексного переменного.

См. содержащий также многочисленные литературные указания обзор:

98. Стернберг Е., Трехмерная концентрация напряжений в теории упругости, перев. с англ. в Сб. «Механика», 6 (52), стр. 73—80, 1958.

Решения рассмотренных в пп. 4.1—4.4 задач о кручении, растяжении и изгибе однополлого гиперболюида вращения впервые даны Г. Нейбером; в его книге [52] приведены многочисленные графики распределения напряжений, формулы и числовые таблицы.

Исходные уравнения задачи о кручении тел вращения, рассмотренной в этой книге только применительно к случаям цилиндра, гиперболюида и области со сферической полостью, впервые (1899), по-видимому, указаны Мичеллом в статье:

99. Michell I. H., The Uniform Torsion and Flexure of Incomplete Torsors, with Applications to Helical Springs. The Collected Mathematical Works (см. [78]).

Этой задаче посвящена монография:

100. Соляник - Красса К. В., Кручение валов переменного сечения, Гостехиздат, Москва 1949, и значительное место уделено ей в книге Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [131].

О задачах равновесия кругового конуса см. [70], а также статью:

101. Нуллер Б. М., К решению задачи теории упругости об усеченном конусе. Механика твердого тела, 5, стр. 102, 1968.

К § 5. Задача в пп. 5.1—5.5 рассмотрена в работе:

102. Лурье А. И., Эластостатическая задача Робена для трехосного эллипсоида. Механика твердого тела, 1, стр. 80—83, 1967.

К пп. 5.6—5.8. Задача о напряженном состоянии в окрестности эллипсоидальной полости рассмотрена в работе.

103. Steigberg E. and Sadowsky M. A., Stress Concentration around a Triaxial Ellipsoidal Cavity. Journ. of Appl. Mech., 16, N 2, стр. 149, 1949.

Решение представлено через эллиптические функции Якоби от криволинейных эллиптических координат. В решении, приведенном в этой книге, выраженном в декартовых координатах и содержащем эллиптические интегралы, исправлена ошибка, допущенная в книге автора [70]. Правильное решение дано в работе:

104. Подильчук Ю. Н., Напряженное состояние в окрестности эллипсоидальной полости при произвольных постоянных усилиях на бесконечности, Докл. АН УССР, № 9; стр. 1150—1154, 1964.

Задачи п. 5.9 подробно рассмотрены Г. Нейбером в работе [52], а задачи пп. 5.10, 5.11 в книгах:

105. Снеддон И., Преобразования Фурье, перев. с англ., ИЛ, Москва 1955.
106. Уфлянд Я. С., Интегральные преобразования в теории упругости, и в статье:
107. Подильчук Ю. Н., Плоская эллиптическая трещина в произвольном однородном поле напряжений. Прикл. мех., IV, № 8, стр. 93—100, 1968 *).

К § 6. Начало рассмотрению контактных задач было положено в классическом мемуаре Г. Герца:

108. Hertz H., Über die Berührung fester elastischer Körper. Gesammelte Werke, т. 1, стр. 155, Leipzig 1895 (впервые опубликован в «Journ. für reine und angew. Math. (Crelle)», 92, стр. 156, 1882).

В последующие шестьдесят лет усилия были направлены на экспериментальную проверку теории и развитие ее применений к инженерным расчетам. К работам этого направления принадлежат:

109. Динник А. Н., Удар и сжатие упругих тел. Избранные труды, т. 1, Изд-во АН УССР, 1952 (впервые опубликовано в 1909 г.).
110. Беляев Н. М., Местные напряжения при сжатии упругих тел. Сб. статей «Инженерные сооружения и строительная механика», изд-во «Путь», Ленинград 1924.

Побудительным толчком к математическому рассмотрению новых контактных задач теории упругости послужила серия работ И. Я. Штаермана (первая работа датирована 1939 г.), объединенных в его монографии:

111. Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, Москва 1949.

*) Решение задачи об эллиптической трещине приведено также в книге: Панасюк В. В., «Предельное равновесие хрупких тел с трещинами», изд-во «Наукова думка», Киев, стр. 194—204, 1968.

Дальнейшее развитие решения контактных задач получили в исследованиях Л. А. Галина, изложенных в книге:

112. Г а л и н Л. А., Контактные задачи теории упругости, Гостехиздат, Москва 1953.

Большее место, чем в настоящей книге, контактными задачам уделено в книге [70]; решения многочисленных задач даны в монографии [106]. Достаточно полный обзор исследований по контактными задачам, пространственным и плоским (перечислены 134 работы), дан в статье:

113. П о п о в Г. Я., Р о с т о в ц е в Н. А., Контактные (смешанные) задачи теории упругости. Труды второго Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Механика твердого тела, изд-во «Наука», 1966.

К пп. 6.2а, 6.5а, см. работу:

114. М о с с а к о в с к и й В. И., К вопросу об оценке перемещений в пространственных контактных задачах. Прикл. матем. и мех., 15, № 5, 1951.

К § 7. Классическими работами, относящимися к задаче о напряженном состоянии в круглом цилиндре (сплошном и полом), являются:

115. F i l o l L., On the Elastic Equilibrium of Circular Cylinders under Certain Practical Systems of Loads. Phil. Trans. of the Royal Soc. London, Ser. A, 198, 1902.
116. S c h i f f P. A. (П. А. Шифф), Sur l'équilibre d'ue cylindre élastique. Journ. de math. pures et appliquées, Ser. 3, т. 9, стр. 407, 1883.

К п. 7.5. Задача о кручении силами, распределенными по торцу, рассмотрена впервые, по-видимому, в [116]. См. также [1].

К п. 7.6. В работе:

117. В а л о в Г. М., Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины. Прикл. матем. и мех., 26, № 4, стр. 650, 1962, решение некоторых краевых задач представлено в рядах, коэффициенты которых определяются бесконечной (вполне регулярной) системой уравнений.

К п. 7.7. Задача о напряженном состоянии в цилиндре, нагруженном нормальным давлением по участку боковой поверхности, рассмотрена в книге [70], а для других способов нагружения в работах:

118. Л и в ш и ц П. З., Напряженное состояние в упругом цилиндре, нагруженном по его боковой поверхности касательными усилиями. Инженерный сборник, 30, стр. 47, 1960; Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 4, стр. 105, 1964. К задаче об изгибе стержня кругового поперечного сечения. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 1, стр. 76, 1963.
119. Н и к и ш и н В. С., Напряженное состояние симметрично нагруженного упругого цилиндра. Труды Вычисл. центра АН СССР, 1965. Температурные напряжения в составном цилиндре при произвольном распределении температуры по высоте. Там же, 1964.
В [119] приведены таблицы функций влияния, облегчающие расчеты напряжений.

Решение в тригонометрических рядах рассматривалось в работе:

120. B e r t o l M. W., The Circular Cylinder with a Band of Uniform Pressure on a Finite Length of the Surface. Journ. of. Appl. Mech., 8, N 3, стр. 97, 1941.

С помощью интеграла Фурье эта задача для полого цилиндра решена в работе:

121. Ш а п и р о Г. С., О сжатии бесконечного полого цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности. Прикл. матем. и мех., 7, № 5, стр. 379, 1943.

- Решение в рядах задачи о полом цилиндра дано в работе:
122. Галеркин Б. Г., Упругое равновесие полого кругового цилиндра и части цилиндра. Собрание сочинений, т. 1, Изд-во АН СССР, 1953, стр. 342 (опубликовано впервые в 1933 г.).

- Случай осесимметричного нагружения изучен также в статьях:
123. Прокопов В. К., Равновесие упругого толстостенного осесимметричного цилиндра. Прикл. матем. и мех., 12, № 2, стр. 135, 1949. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. Труды Ленингр. политехн. ин-та, № 2, стр. 286, 1950.

К п. 7.10. Свойство обобщенной ортогональности однородных решений было указано П. А. Шиффом [116]. Эта работа была незаслуженно забыта; указанием на нее автор обязан Б. М. Нуллеру. В изложении п. 7.10 использована рукопись Б. М. Нуллера, а основной результат П. А. Шиффа представлен в принятых в § 7 обозначениях. См. также [123].

Независимо от П. А. Шиффа свойство ортогональности однородных решений в применении к задаче изгиба прямоугольной плиты было установлено П. Ф. Папковичем в его книге:

124. Папкович П. Ф., Строительная механика корабля, т. II, стр. 634, Судпромгиз, Ленинград 1941.

Рассмотрению возможности одновременного представления двух функций рядами по однородным решениям (в применении к задаче П. Ф. Папковича) посвящена работа:

125. Гринберг Г. А., О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной плиты и о некоторых его обобщениях. Прикл. матем. и мех., 17, № 2, стр. 211, 1953.

Исследования аналогичных вопросов применительно к цилиндру автору неизвестны.

Приближенные приемы выполнения краевых условий на торцах цилиндра предложены В. Л. Бидерманом в книге:

126. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И., Расчеты на прочность в машиностроении, т. II, гл. V, Машгиз, Москва 1958,

и в работе:

127. Horvay G., Mirabal I. A., The End Problem of Cylinders, Journ. of Appl. Mech. Trans. ASME, Paper N 58-A-24, стр. 1—10, 1958*).

К главе VI

Термин «задача Сен-Венана» введен Клебшем [17]. Классические труды Сен-Венана о кручении и изгибе призм переведены на русский язык:

128. Сен-Венан Б., Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. Под редакцией и со вступительной статьей Г. Ю. Джанелидзе. Серия «Классики естествознания», Физматгиз, Москва 1961.

*) Оценка быстроты затухания напряжений в цилиндре, нагруженном по торцу статически эквивалентной нулю системой сил, дается в статье: Knowles J. K. and Horgan C. O., On the Exponential Decay of Stresses in Circular Elastic Cylinders Subject to Axisymmetric Self-Equilibrating End Loads. Intern. Journ. of Solid Structures, 5, стр. 33—50, 1969.

Большое место задаче Сен-Венана уделено в курсах [1, 3, 12, 16]. Применение метода теории функций комплексного переменного подробно разработано в [2] для стержней, содержащих полости, заполненные материалом с различными упругими постоянными (составные стержни).

К пп. 2.5—2.6. Задача об определении координат центра жесткости подробно рассмотрена в статье:

129. Джанелидзе Г. Ю., Определение координат центра жесткости по различным функциям напряжений при кручении. Труды Ленингр. политехн. ин-та (ЛПИ). Динамика и прочность машин, № 226, стр. 93—102, 1963,

содержащей подробный перечень литературы. См. также [7]. Формулы для многосвязной области даны в работе:

130. Прокопов В. К., О центре жесткости многосвязного профиля. Научно-информационный бюллетень ЛПИ, № 7, стр. 91, 1960.

К § 3. Исчерпывающие литературные указания и оригинальные решения многочисленных задач о кручении стержней даны в монографии:

131. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Кручение упругих тел, Физматгиз, Москва 1963.

Применения функций комплексного переменного к задаче кручения развиты подробно в книге:

132. Weber C., Günter W., Torsionstheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1958.

К пп. 3.5—3.7. Мембранная аналогия предложена в работе:

133. Prandtl L., Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt, Jahresbericht Deutsch. Math.-Ver., 13, стр. 31, 1904.

О применении аналогии к экспериментальному решению задачи кручения (способ мыльной пленки) см. литературу в [131].

Большое число изопериметрических задач, относящихся к проблеме кручения, рассмотрено в монографии:

134. Поля Г., Сеге Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, Физматгиз, Москва 1962.

Неравенство (3.7.7) получено в работе:

135. Николаи Е. Л., К задаче об упругой линии двоякой кривизны. Труды по механике (Библиотека русской науки), Гостехиздат, 1955 (впервые опубликовано в 1916 г.).

К пп. 3.13—3.17. О вариационных способах решения задачи кручения см. [57]. Первая публикация о вариационном способе Л. В. Канторовича представлена статьей:

136. Канторович Л. В., Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. Изв. АН СССР, Отд. физ.-матем. наук, № 5, стр. 647—652, 1933.

Кручению удлиненных и тонкостенных профилей уделено значительное место в гл. VII монографии [131]. Задача о кручении многосвязных тонкостенных конструкций полно рассмотрена в [16].

К § 4. Задача об изгибе силой подробно рассмотрена в курсах теории упругости [1, 2, 3, 12] и в монографии [57]. Литература, к ней относящаяся, не столь обширна, как к задаче о кручении.

В упоминаемой в п. 4.1 работе:

137. Tricomi F., Sulla Problema della trave soggetto a una sforza di taglio. Atti della Accad. Naz. dei Lincei, Ser. VI, 18, стр. 484—488, 1934 предложен также прием графо-аналитического определения не среднего, а истинного значения касательного напряжения.

При изложении пп. 4.5, 4.6, 4.8 использованы материалы работ [57, 129]. Упомянутые в тексте результаты Дункана и Гриффитца содержатся в статьях:

138. Griffith A., Taylor G., The Problem of Flexure and its Solution. Reports and Memoranda, N 399, 1917.
139. Duncan W., Torsion and Flexure of Cylinders and Tubes, Reports and Memoranda, N 1444, 1932.

Вычисления п. 4.7 взяты из статьи:

140. Лурье А. И., Приближенное решение некоторых задач о кручении и изгибе стержня. Труды Ленингр. индустр. ин-та, № 3, стр. 121—125, 1939.

К § 5. Теория впервые предложена Мичеллом в статье:

141. Michell I. H., The Theory of Uniformly Loaded Beams. Quart. Journ. of Math., 32, стр. 28—42, 1900. Вновь напечатано в книге [78].

С неоправданной сложностью задача Мичелла изложена в [1]. Принятое в пп. 5.1—5.6 изложение основано на статье:

142. Лурье А. И., Задача Мичелла. «Строительная механика». Юбилейный сборник статей к 80-летию И. М. Рабиновича, Стройиздат, Москва 1966.

О центре изгиба в задаче Мичелла см. статью:

143. Хасис А. Л., Задача Мичелла и линия центров изгиба, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, стр. 58—65, 1960.

Вычисление, выполненное в п. 5.7 (изгиб тяжелого стержня) проведено также в [1]. В п. 5.8 дается обобщение задачи, рассмотренной в п. 4.1, на случай равномерно нагруженной балки. См. также [19].

К п. 5.9. Постановка и ход решения задачи о балке, нагруженной на ее боковой поверхности по полиномиальному закону, даны в статьях:

144. Almansi E., Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente. Rendiconti della Reale Accad. dei Lincei. Ser. 6, 10, стр. 333—338, 400—408, 1901.

В отчетливой форме решение задачи Альманзи представлено в работе:

145. Джанелидзе Г. Ю., Задача Альманзи. Труды Ленингр. политехн. ин-та. Динамика и прочность машин, № 210, стр. 25—38, 1960.

К главе VII

На плодотворность применения комплексного переменного в плоской задаче теории упругости указал впервые Г. В. Колосов в монографии:

146. Колосов Г. В., Об одном приложении теории функций комплексного переменного в плоской задаче математической теории упругости, Юрьев, 1909.

Постановка, доказательство существования и практические приемы решения краевых задач даны Н. И. Мусхелишвили в труде [2] (первое издание вышло в 1933 г.) и в предшествующих ему публикациях; из них основополагающими являются:

147. Мусхелишвили Н. И., Sur l'intégration de l'équation biharmonique, Изв. Росс. Академии наук, стр. 663—686, 1919. Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématiques, Tiflis, édition de l'Université, 1922.

Применение комплексного переменного к плоской задаче посвящены также монографии:

148. Babuška I., Rektorys K., Vyčichlo F., Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme, Akademie-Verlag, Berlin 1960.
149. Milne-Thomson L. M., Plane Elastic-Systems. Ergebnisse der angewandten Mathematik, N 6, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen 1960.
150. Белоносов С. М., Основные плоские статические задачи теории упругости, АН СССР, СО, Новосибирск 1962.

Большое число задач для областей частного вида рассмотрено в двухтомной монографии:

151. Teodorescu P. P., Probleme plane in teoria elasticitatii, т. 1, 995 стр., 1960; т. II, 669 стр., 1965 (на румынском языке).

В настоящей книге применение комплексного переменного к плоской задаче ограничено примерами решения наиболее простых краевых задач (первой и второй). Смешанные краевые задачи, решение которых требует применения средств теории линейного сопряжения и сингулярных интегральных уравнений, полно представлены в последних изданиях книги [2], а также в [149, 150]; в книге [148] основное место уделено применению интегральных уравнений.

Здесь нет возможности и нужды останавливаться на труднообозримом множестве работ по применению теории функций комплексного переменного и интегральных уравнений к плоской задаче; исчерпывающая библиография дана в [2] и в обзорах:

152. Векуа И. Н., Мусхелишвили Н. И., Методы теории аналитических функций в теории упругости. Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Изд-во АН СССР, 1962.
- 152а. Шерман Д. И., Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости. Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, 1962.

Решение ряда плоских задач, не основывающееся на методах теории функций, рассмотрено в книгах [3, 16] и в статье:

153. Timpe A., Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion. Zeitsch. für Math. u. Physik, 52, стр. 348—383, 1905.

К § 2 гл. VII. Библиографические указания, относящиеся к работам Менаже (A. Mespager, 1901), Рибьера (C. Ribiere, 1898), Файлона (L. Filon, 1903), Х. Головина, см. в книге [3]. Предложенное в пп. 2.3—2.10 решение задач о полосе и брус с круговой осью является перенесением приемов, развитых в гл. III, IV книги [70] в применении к упругому слою и толстой плите. Интегральное преобразование Фурье в задаче об упругой полосе (п. 2.8) было применено в работах:

154. v. Kármán Th., Über die Grundlagen der Balkentheorie. Abhandlungen aus dem aerodynamischen Institut Aachen, стр. 3—10, 1927.
Seewald F., Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit rechteckigem Querschnitt. Там же, стр. 11—33.

Результаты Зеевальда, представленные графиками поправок, вносимых в элементарную теорию изгиба балки, подробно воспроизведены в книге [3].

Однородные решения задачи о равновесии упругой полосы впервые введены в работе:

155. Fadde I., Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe. Ingenieur-Archiv, 11, № 4, стр. 125—149, 1940.

Таблица корней в п. 2.12 воспроизведена из этой работы. К исследованиям [124, 125], связанным с применением однородных решений для учета искажений напряженного состояния, вносимых влиянием торцов, следует добавить:

156. Гринберг Г. А., Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С., Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области при задании на контуре значений функции и ее нормальной производной. Прикл. матем. и мех., 17, № 1, стр. 73—86, 1953.

Обзор исследований по однородным решениям содержится в докладе:

157. Джанелидзе Г. Ю., Прокоров В. К., Метод однородных решений в математической теории упругости. Труды IV Всесоюзного математического съезда, изд-во «Наука», 1964.

Начало применению приближенных решений в плоской задаче положено С. П. Тимошенко в работе:

158. Timoshenko S. P., The Approximate Solution of Two-Dimensional Problems in Elasticity, Phil. Mag., 47, стр. 1095—1104, 1924 (воспроизведено в «Collected Papers» of St. P. Timoshenko, McGraw-Hill, 1953).

Далее эти приемы в соединении с использованием однородных решений развивались в работах:

159. Horvay G., The End Problem of Rectangular Strip. Journ. of Appl. Mech. Trans. ASME, N 52-A-2, стр. 87—94, 1953.
160. Horvay G., Born J. S., The Use of Self-Equilibrating Functions in Solution of Beam-Problems. Proc. of the 2nd V. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Ann-Arbor, Mich., 1954.

К § 3. Решение задачи о сосредоточенной силе в упругой плоскости (п. 3.1) дано Мичеллом в статье:

161. Mitchell I. H., Elementary Distributions of Plane Stress. Proc. London Math. Soc., 32, стр. 35—61, 1900 (воспроизведено в [78]).

В ней рассмотрены также другие плоские задачи о действии сосредоточенных особенностей.

К пп. 3.5—3.8. Теория плоских контактных задач рассмотрена в книгах [2, 111]; см. также обзор [113]. Простейший случай плоского штампа (п. 3.7) впервые, по-видимому, рассмотрел М. А. Садовский в работе:

162. Sadowsky M. A., Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie. Zeitsch. für angew. Math. u. Mech., 8, стр. 515—518, 1928.

К § 4. Задача (п. 4.1) о сосредоточенной силе в вершине клина решена впервые в [161]. Интегральное преобразование Меллина к задаче о клине при произвольном нагружении его сторон применил впервые В. М. Абрамов в работе:

163. Абрамов В. М., Распределение напряжений в плоском безграничном клине при произвольной нагрузке. Труды конференции по оптическому методу изучения напряжений, ОНТИ, 1937.

Случай нагружения грани сосредоточенной силой рассмотрен в статье:

164. Лурье А. И., Брачковский Б. З., Решение плоской задачи теории упругости для клина. Труды Ленингр. политехн. ин-та, № 3, стр. 158—165, 1941.

Разъяснению парадокса Кароцерса (п. 4.3) уделено место в книге [150]. Этому же вопросу посвящена обстоятельная статья:

165. Sternberg E., Koiter W., The Wedge under Concentrated Couple: A Paradox in the Two-Dimensional Theory of Elasticity. Journ. of Appl. Mech., 25, N 4, стр. 581—585, 1958 (имеется русский перевод в сб. «Механика», № 3, стр. 98—110, 1959).

Другое истолкование дано в работе:

166. Neuber H., Lösung des Carothers-Problems mittels Prinzipien der Kraftübertragung (Keil mit Moment an der Spitze). Zeitsch. für angew. Math. u. Mech., 43, N 4—5, стр. 211—228, 1963.

Значение сформулированного в этой работе принципа «передачи напряжений через поверхность переноса силы» не ограничивается возможностью объяснения парадокса Карозерса.

С большой обстоятельностью задача о клине рассмотрена в книге [106]; из нее взята таблица в п. 4.4; более подробно, чем в п. 4.4, случай нагружения клина по части поверхности рассмотрен в [105].

К § 5. Конечно, основным источником при написании этого параграфа послужила книга [2]; использованы также материалы книги [149].

Общее представление функции напряжений в двусвязной области (пп. 5.5—5.6) дано Мичеллом в работе:

167. Michell I. H., On the Direct Determination of Stress in an Elastic Solid with Application to the Theory of Plates. Proc. Lond. Math. Soc., 31, стр. 100—124, 1899 (воспроизведено в [78]).

К § 6. Задача пп. 6.1—6.2 о диске, нагруженном сосредоточенными силами, подробно рассмотрена в [2]; частные примеры нагружения силами на окружности, уравновешенными сосредоточенными силой и моментом в центре диска, рассмотрены в [167]. Приведены графические представления распределения напряжений в диске.

Классическая задача Кирша (1898) о растяжении плоскости, ослабленной круговым отверстием (п. 6.12), послужила началом многочисленных исследований местных напряжений в окрестности полостей в плоском напряженном поле; они подробно представлены в книге:

168. Савин Г. Н., Распределение напряжений около отверстий, изд-во «Наукова думка», Киев, 1968 (первое издание вышло в 1951 г.). Книга содержит исчерпывающие библиографические указания.

Большое число частных задач рассмотрено в работе:

169. Найман М. И., Напряжения в балке с криволинейным отверстием, Труды ЦАГИ, № 313, 1937.

Изложенный в пп. 6.13—6.14 способ решения краевой плоской задачи дан в книге [149].

К § 7. Решение задачи в пп. 7.2—7.3 о круговом кольце представляется более простым, чем в [2]. Решение в замкнутом виде через эллиптические функции предложено в книге:

170. Колосов Г. В., Применение комплексной переменной к теории упругости, ОНТИ, 1935.

Решение по способу аналитического продолжения, предложенное в работе в [149], некорректно. В п. 7.7 ошибка устранена.

К § 8. При рассмотрении плоских задач для областей, в которые круг преобразуется с помощью полинома, мы ограничились указанием хода решения. Более подробно задача рассмотрена в [2]. Многочисленные примеры, доведенные до расчетных формул, приведены в работах [168, 169]. Пример пп. 8.4, 8.6 приведены в [149]. Результаты расчетов для задачи о неконцентрическом кольце приведены в [168]. Эта задача была рассмотрена в работе:

171. Чаплыгин С. А., Аржанников Н. С., К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрическими цилиндрами и сжатой постоянным давлением, Труды ЦАГИ, № 123, 1933 (воспроизведена в Собрании сочинений С. А. Чаплыгина, т. III, стр. 323—338, 1935).

Применению биполярных координат к плоской задаче для области между неконцентрическими окружностями посвящена работа:

172. Jeffery G. B., Plane Stress and Plane Strain in Bipolar Coordinates. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, стр. 265—293, 1921.

К главе VIII

К общим сочинениям, кроме указанных выше книг [4, 7, 19—22], следует отнести также книги:

173. Грин А., Адкинс Дж., Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды, перев. с англ., «Мир», 1965.
174. Murnaghan F. D., Finite Deformation of an Elastic Solid, 1951.
175. Varga O. H., Stress-Strain Behavior of Elastic Materials. Selected Problems of Large Deformations, Interscience Publishers, 1966.
176. Truesdell C., Noll W., Nonlinear Field Theory of Mechanics, Handbuch der Physik, т. III, 3, 1965.

В этом капитальном труде ставится цель построить единую, основанную на минимуме исходных предпосылок (принципы инвариантности, детерминизма, локального действия), теорию поведения сплошной среды. Выделен класс «простых материалов», для них тензор напряжений зависит от истории изменения градиента вектора перемещения (но не от градиентов более высокого порядка). К числу таких материалов относятся упругое и гиперупругое тела. Дан исчерпывающий обзор решений частных задач, большое место уделено установлению приемлемых форм задания законов состояния и критериям выбора зависимости удельной потенциальной энергии деформации гиперупругого тела от инвариантов деформации. Книга снабжена исчерпывающей библиографией по нелинейной теории упругости, доведенной до 1965 г.

177. Brillouin L., Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité, Paris 1938.

К п. 2.4. Закон состояния в форме, эквивалентной (2.4.6), сформулирован в статье:

178. Finger J., Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in anisotropen und isotropen Substanzen. Sitzungsberichte d. Akad. Wiss. Wien, Ser. IIa, 103, стр. 1073—1100, 1894.

К п. 2.9.

179. Grioli G., On the Thermodynamic Potential for Continuum with Reversible Transformations — Some Possible Types, Meccanica, Journ. of the Italian Ass. of Theor. and Appl. Mechanics, 1, N 1—2, стр. 15—20, 1966.

Повернутый тензор напряжений и его представление через тензор деформации Коши рассматриваются в книге [174].

К п. 3.4. Представление энергетического тензора напряжений с помощью модулей k , μ и фазы подобия ω дано в работе:

180. Новожилов В. В., О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде. Прикл. матем. и мех., 15, № 2, стр. 183—194, 1952.

К пп. 4.1—4.2. Квадратичный закон состояния сформулирован в мемуарах Синьорини:

181. Signorini A., Trasformazioni termoelastiche finite. Ann. Mat. pur. appl., Ser. IV, 22, стр. 33—143, 1943; Ser. IV, 30, стр. 1—72, 1948.

К п. 4.1. Замечания 1, 2.

182. Зволинский Н. В. и Риз П. М., О некоторых задачах нелинейной теории упругости. Прикл. матем. и мех., 2, № 4, стр. 417—426, 1939.
183. Seth B. R., Finite Strain in Elastic Problems, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 234, стр. 231—264, 1935.

К пп. 4.6—4.9 см. [173, 174, 175], а также

184. Mooney M., A Theory of Large Elastic Deformation. Journ. Appl. Phys. 11, стр. 582—592, 1940.
185. Rivlin R. S., Saunders D. W., Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VII. Experiments on the Deformation of Rubber. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 243, стр. 251—288, 1951.

- 186 Bridgmann P. W., The Compression of 39 Substances to 100,000 kg/cm^2 . Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 76, стр. 55—70, 1948.

Таблица в п. 4.6 взята из книги:

187. Зарембо А. К., Красильников Б. А., Введение в нелинейную акустику, изд-во «Наука», 1966, и из указанных на стр. 667 работ.

К п. 4.10. Нейбер предложил закон состояния (4.10.10), (4.10.13) в работе:

188. Neuber H., Statische Stabilität nichtlinear elastischer Kontinua mit Anwendung auf Schalen. Zeitsch. für angew. Math. u. Mech., 46, N 3—4, стр. 211—220, 1966.

К § 5, пп. 5.3—5.4. Принцип стационарности дополнительной работы рассмотрен в статье:

189. Левинсон, Теорема о дополнительной энергии в нелинейной теории упругости, «Journal of Applied Mechanics», Trans. ASME, N 4, 1965 (дается также на русском языке под названием «Прикладная механика»).

К гл. VIII см. также

190. Толоконников Л. А., Уравнения нелинейной теории упругости в перемещениях. Прикл. матем. и мех., 21, № 6, 1957. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости. Прикл. матем. и мех., 20, № 3, 1956.

К главе IX

К §§ 1—3 см. [20, 4, 176] и основоположные в нелинейной теории упругости работы Ривлина:

191. Rivlin R. S., Large Elastic Deformation of Isotropic Materials, Further Developments of the General Theory. Part IV, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A., 241, стр. 379—397, 1948; Rivlin R. S. Large Elastic Deformation of Isotropic Materials, Part V. Problem of Flexure. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 195, стр. 463—473, 1949; Rivlin R. S., A Note on the Torsion of an Incompressible Highly-Elastic Cylinder. Proc. Cambridge Phil. Soc., 45, стр. 485—487, 1949; Rivlin R. S., Large Elastic Deformation of Isotropic Materials, Part VI, Further Results in the Theory of Torsion, Shear and Flexure. Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 242, стр. 173—195, 1949.

Содержание пп. 2.2—2.4 основывается на работе:

192. Klingbeil W. W., Schield R. T., Large-Deformation Analyses of Bonded Elastic Mounts. Zeitsch. für angew. Math. u. Phys., 17, N 2, стр. 281—305, 1966.

К § 4, пп. 4.1—4.5. Предложенный вывод уравнений равновесия первоначально нагруженного упругого тела отличен от приводимого в [4]. См. также [32, 33] и работы:

193. Biezeno C. B., Непский Н., On the General Theory of Elastic Stability, K. Akad. Wet. Amsterdam Proc., 31, стр. 569—592, 1929; 32, стр. 444—456, 1930.
194. Pearson C. E., General Theory of Elastic Stability. Quart. of Appl. Math., 14, стр. 133—144, 1956.
195. Лурье А. И., Бифуркация равновесия идеально-упругого тела. Прикл. матем. и мех., 30, № 4, стр. 718—731, 1966.

К п. 4.6. Задача о кручении растянутого стержня рассматривалась в [182] и в работе:

196. Green A. E., Shield R. T., Finite Extension and Torsion of Cylinders, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 244, стр. 47—84, 1951.

Задача о равновесии первоначально сжатого стержня рассмотрена в [195].

К § 5. Об эффектах второго порядка см. [19], а также

197. Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T., General Theory of Small Elastic Deformations, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 211, стр. 128—154, 1952.
198. Rivlin R. S., The Solution of Problems in Second Order Elasticity Theory. Journ. of Rat. Mech. and Analysis, 2, стр. 53—81, 1953.

К п. 5.3а.

199. Toupin R. A. and Rivlin R. S., Dimensional Changes in Crystals Caused by Dislocation. Journ. of Mathematical Physics, 1, № 1, стр. 8—15, 1960.

К § 6. Теория конечной плоской деформации развита в работах:

200. Adkins J. E., Green A. E., Shield R. T., Finite Plane Strain. Phil. Trans., Ser. A, 246, стр. 181—213, 1953.
201. Adkins J. E., Green A. E., Nicholas G. C., Two-dimensional Theory of Elasticity for Finite Deformations. Phil. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A, 247, стр. 279—306, 1954.
202. Толоконников Л. А., Плоская деформация несжимаемого материала. Докл. АН СССР, 119, № 6, 1957.

Плоская задача для клина рассмотрена в статье:

203. Klingbeil W. W., Shield R. T., On a Class of Solutions in Phys. Finite Elasticity. Zeitsch. für Math. u. Phys., 17, N 4, стр. 489—511, 1966.

Большое число работ посвящено решениям методом последовательных приближений с использованием комплексного переменного (метод Н. И. Мусхелишвили). Упомянем следующие:

204. Carlson D. E., Shield R. T., Second and Higher Order Effects in a Class of Problems in Plane Finite Elasticity. Arch. for Rat. Mech. and Analysis, 19, N 3, стр. 189—214, 1965.

205. Койфман Ю. И., Решение плоской задачи нелинейной теории упругости для бесконечной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. высш. учебн. заведений, Строительство и архитектура, № 1, стр. 44—51, Новосибирск 1961.

Койфман Ю. И., Развязания деяких задач нелінійної плоскої теорії пружності. Изв. Львовского гос. ун-та, Отд. мех. и матем., № 9, 1962.

Койфман Ю. И., Напряженно-деформированное состояние труб и кольцевых дисков из высокоэластичных нелинейно-упругих материалов. Динамика и прочность машин, № 3, стр. 75—81, Изд-во Харьковского ун-та, 1966.

Савин Г. Н., Койфман Ю. И., Нелинейные эффекты в задачах о концентрации напряжений около отверстий с подкрепленным краем. Прикл. мех., 1, № 9, стр. 1—13, 1965 *).

Койфман Ю. И., Ланглейбен А. Ш., Большие упругие деформации двухслойного цилиндра. Прикл. мех., 2, № 9, стр. 71—72, 1966.

206. Громов В. Г., О влиянии физической нелинейности на концентрацию напряжений возле кругового отверстия при больших деформациях. Прикл. мех., 1, № 10, 1965.

Громов В. Г., Концентрация напряжений около круговой цилиндрической полости в бесконечно протяженном нелинейно-упругом теле. Научн. сообщ. Ростовского ун-та, серия точных и естеств. наук, 67, 1964.

Громов В. Г., Толоконников Л. А., К вычислению приближений в задаче о конечных плоских деформациях несжимаемого материала. Изв. АН СССР, ОТН, 2, 1953.

*) Плоская задача нелинейной теории упругости рассмотрена в гл. IX книги [168]. Приведена подробная библиография.

К § 7. Уравнение состояния, эквивалентное (7.1.1) приведено в работе:

207. Sensenig C. B., Instability of Thick Elastic Solid. Commun. Pure and Appl. Math., 17, N 4, стр. 451—491, 1964.

Постановка краевых задач, относящихся к случаю плоской деформации, дана в работе:

208. John F., Plane Strain Problems for a Perfectly Elastic Material of Harmonic Type. Commun. Pure and Appl. Math., 13, N 2, стр. 239—296, 1960.

К пп. 7.9—7.10.

209. Southwell R. V., On the General Theory of Elastic Stability, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 213, стр. 187—244, 1913.

210. Бицено К. Б., Граммель Р., Техническая динамика, т. 1, перев. с нем., Гостехиздат, Москва 1950.

Задачи пп. 7.11—7.13 и несколько аналогичных (полый цилиндр под внешним давлением, круглая плита, нагруженная по краю) рассмотрены в [207]. В иной постановке задача для сферической оболочки рассмотрена в работе:

211. Феодосьев В. И., О формах равновесия резиновой сферической оболочки при внутреннем давлении. Прикл. матем. и мех., 32, № 2, стр. 339—344, 1968.

К § 7 см. также

212. Лурье А. И., Теория упругости для полулинейного материала. Прикл. матем. и мех., 32, № 6, 1968.

Приложения

I—V. Более подробные сведения по тензорному анализу можно найти в книгах:

213. Кильчевский Н. А., Элементы тензорного анализа и его приложения к механике, Гостехиздат, Москва 1954.
 214. Мак-Коннел А. Дж., Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике, перев. с англ., Физматгиз, Москва 1963.
 215. Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, перев. с англ., изд-во «Наука», 1965.

При написании Приложения VI использована книга [63], а также

216. Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсoidalных функций, перев. с англ., ИЛ, Москва 1952.
 217. Аппель П., Фигуры равновесия вращающейся жидкой массы, перев. с франц., ОНТИ, 1936.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абрамов В. М. 924
 Абрамян Б. Л. 426, 917, 918, 921
 Адкинс Дж. (Adkins J.) 104, 926, 928
 Александров А. Я. 917
 Альманзи Э. (Almansi E.) 81, 461, 922
 Аппель П. (Appell P.) 929
 Аржанников Н. С. 925
 Аржанных И. С. 131
 Арутюнян Н. Х. 426, 918, 921
 Аэро Э. П. 911

 Бабушка И. (Babuška I.) 923
 Бак О. (Buck O.) 667
 Башелейшвили М. О. 914
 Белоносов С. М. 923
 Беляев Н. М. 918
 Бельтрами Э. (Beltrami E.) 911
 Берри Д. С. (Berri D. S.) 909
 Бертон М. У. (Berton M. W.) 919
 Бетти Э. (Betti E.) 167, 915
 Бидерман В. Л. 920
 Бицено К. В. (Biezeno C. B.) 927, 929
 Блох В. И. 27, 911
 Боли Б. (Boley B.) 913
 Борн (Born J. S.) 924
 Брачковский Б. З. 924
 Бриджмен П. У. (Bridgman P. W.) 105, 668, 927
 Бриллюэн Л. (Brillouin L.) 668, 926
 Бурчуладзе Т. В. 914
 Буссинек Ж. (Boussinesq J.) 135, 163, 224, 368, 915

 Валов Г. М. 919
 Ван Цзи-де (Shi-Ten Wang) 909
 Варга О. Г. (Varga O. H.) 926
 Вебер К. (Weber C.) 404, 917, 921
 Вейнгартен Г. (Weingarten G.) 67
 Векуа И. Н. 923
 Вольтерра В. (Volterra V.) 67, 198, 204, 912
 Ворович И. И. 12
 Вычихло Ф. (Vyčichlo F.) 923

 Галеркин Б. Г. 135, 913, 917, 920
 Галин Л. А. 919
 Гамель Г. (Hamel G.) 39, 81, 911
 Гахов Ф. Д. 523, 527, 565
 Гегелия Т. Г. 914
 Генки Г. (Hencky H.) 912, 927
 Герц Г. (Hertz H.) 306, 568, 918
 Гобсон Э. В. (Hobson E. W.) 929
 Головин Х. 502, 923
 Гольденблат И. И. 912
 Граммель Р. (Grammel R.) 929
 Грин А. Э. (Green A. E.) 104, 909, 926—928
 Гринберг Г. А. 363, 917, 920, 924
 Гриоли Г. (Grioli G.) 910, 911, 912, 926
 Гриффитс А. (Griffith A.) 444, 922
 Громов В. Г. 771, 928
 Гудье Дж. Н. (Goodier J. N.) 435, 909
 Гурса Э. (Goursat E.) 479
 Гюнтер В. (Günter W.) 921

 Джанелидзе Г. Ю. 441, 914, 920, 921, 922, 924
 Джеффри Г. Б. (Jeffery G. B.) 925
 Джеффрис Г. (Jeffreys H.) 912, 917
 Джон Ф. (John F.) 645, 929
 Динник А. Н. 918
 Диткин В. А. 536
 Дункан У. (Dunkan W.) 440, 922

 Еремеев Н. Е. 667

 Жемочкин Б. Н. 910
 Журавский А. М. 453

 Зак М. А. 88
 Занабони О. (Zanaboni O.) 164
 Зарембо А. К. 667, 927
 Зволинский Н. В. 659, 926
 Зеевалд Ф. (Seewald F.) 497, 501, 923
 Зубов Л. М. 12, 452, 685

 Инглис (Inglis C. E.) 538, 539

- Канторович Л. В. 416, 921
 Каппус Р. (Kappus R.) 39, 911
 Карлсон (Carlson D. E.) 928
 Карман Т. (von Kármán Th.) 497, 923
 Карозерс С. Д. (Carothers S. D.) 538, 539
 Кац А. М. 910
 Качанов Л. М. 912
 Келли (Kelly I. L.) 667
 Кельвин (Thomson W.) 368, 691, 914, 916
 Кильчевский Н. А. 929
 Кирхгофф Г. (Kirchhoff G.) 87, 644, 912
 Кирш Г. (Kirsch G.) 589
 Клапейрон В. (Clapeyron B. P. E.) 916
 Клебш А. (Clebsch A.) 910, 920
 Клингбейль В. (Klingbeil W. W.) 695, 700, 927, 928
 Коваленко А. Д. 913
 Койтер В. Т. (Koiter W. T.) 911, 924
 Койфман Ю. И. 928
 Колоннетти Г. (Colonnetti G.) 201
 Колосов Г. В. 477, 922, 925
 Корн А. (Korn A.) 915
 Коссера Ф. (Cosserrat F.) 18, 19, 911
 Коссера Э. (Cosserrat E.) 18, 19, 911
 Коши О. (Cauchy A. L.) 21, 71, 127
 Красильников Б. А. 667, 927
 Крекрафт Д. И. (Creckraft D. I.) 667
 Кри (Cfree C.) 284
 Крутков Ю. А. 27, 133, 135, 911
 Кувшинский Е. В. 911
 Кулон Ж. (Coulon J.) 399
 Купрадэ В. Д. 914, 915

 Лаиглейбен А. Ш. 928
 Лармор Дж. (Larmor J.) 917
 Лауричелла (Lauricella G.) 212
 Лебедев Н. Н. 924
 Левинсон Н. (Levinson N.) 927
 Лейбензон Л. С. 420, 424, 440, 444, 910, 913
 Лехницкий С. Г. 104
 Лёш Ф. (Lösche F.) 317, 345
 Лившиц П. З. 919
 Лихарев К. К. 920
 Лихтенштейн Л. (Lichtenstein L.) 915
 Локателли П. (Locatelli P.) 164
 Лурье А. И. 817, 915—918, 922, 924, 927, 928
 Ляв А. (Love A. E. H.) 67, 139, 909, 910
 Ляме (Lamé G.) 112, 368, 916

 Майзель В. М. 914
 Мак-Доуэлл Э. Л. (McDowell E. L.) 915
 Мак-Кончел А. Дж. (McConnell A. J.) 929
 Максвелл Дж. (Maxwell J. C.) 911
 Макушин В. М. 920
 Малинин Н. Н. 920
 Менаже (Mesnager A.) 492, 923
 Мизес Р. (Mises R.) 163, 244, 916
 Милн-Томсон Л. М. (Milne-Thomson L. M.) 923
 Миндлин Р. Д. (Mindlin R. D.) 911, 913, 915
 Мирабаи (Mirabai I. A.) 920
 Михлин С. Г. 154, 914
 Мичелл Дж. (Mutchell J. H.) 445, 553, 916, 917, 922, 924, 925
 Мор О. (Mohr O.) 32
 Морера (Morera G.) 26, 911
 Моссаковский В. И. 919
 Муни М. (Mooney M. A.) 670, 750, 926
 Мурнаган Ф. Д. (Murnaghan F. D.) 666, 668, 669, 926
 Мухелишвили Н. И. 412, 472, 480, 571, 909, 913, 916, 922, 928

 Навье К. (Navier C. L. M.) 127
 Найман М. И. 925
 Нейбер Г. (Neuber H.) 11, 128, 276, 673, 913, 917, 918, 924, 927
 Никишин В. С. 919
 Николай Е. Л. 400, 401, 921
 Николас Г. К. (Nicholas G. C.) 928
 Новацкий В. (Nowacki W.) 913, 915
 Новожилов В. В. 382, 837, 909, 926
 Ноул В. (Knols W.) 926
 Нуллер Б. М. 918, 920

 Пальмов В. А. 12, 911
 Панасюк В. В. 918
 Папкович П. Ф. 128, 362, 910, 913, 920
 Пиола (Piola G.) 644
 Пирсон (Pearson C. E.) 927
 Подильчук Ю. Н. 918
 Пойнтинг Дж. (Pointing J. H.) 95, 691
 Полиа Г. (Polya G.) 400, 921
 Пономарев С. Д. 920
 Попов Г. Я. 919
 Прагер В. (Prager W.) 912
 Прандтль Л. (Prandtl L.) 395, 921
 Прокопов В. К. 920, 921, 924
 Прудников А. П. 536

- Рабинович И. М. 922
 Рейнер М. (Reiner M.) 912
 Рейсснер Э. (Reissner E.) 159, 913
 Ректорис К. (Rektorys K.) 923
 Рибьер (Ribiere C.) 494, 923
 Ривлин (Rivlin R. S.) 672, 746, 691, 926—928
 Риз П. М. 659, 926
 Ритц В. (Pitz W.) 153
 Родриг (Rodrigues O.) 817
 Розенталь Ф. (Rosental F.) 917
 Ростовцев Н. А. 919
 Рош (Rosch) 111, 912

 Савин Г. Н. 771, 925, 928
 Садовский М. А. 528, 918, 924
 Саусвелл Р. В. (Southwell R. V.) 787, 788, 909, 913, 917, 929
 Сеге Г. (Szëgo G.) 921
 Седов Л. И. 910
 Секоян С. С. 667
 Сен-Венан В. (Saint-Venant B.) 91, 163, 369, 371, 378, 380, 390, 398, 399, 401—403, 412, 910, 920
 Сенсениг К. Б. (Sensenig C. B.) 929
 Сетх В. Р. (Seth B. R.) 659, 929
 Сигер А. (Seeger A.) 667
 Сильвестр Дж. Дж. (Sylvester J. J.) 646
 Синьорини А. (Signorini A.) 629, 657, 665, 911, 912, 926
 Слободянский М. Г. 131, 913
 Снеддон Я. Н. (Sneddon I. N.) 534, 909, 916, 918
 Сокольников И. С. (Sokolnikoff I. S.) 909
 Соломон Л. (Solomon L.) 910
 Соляник-Красса К. В. 918
 Сомильяна К. (Somigliana C.) 915, 916
 Сондерс Д. У. (Saunders D. W.) 672, 926
 Сретенский Л. Н. 914
 Стернберг Э. (Sternberg E.) 163, 246, 913—918, 924
 Схоутен Дж. А. (Schouten J. A.) 929

 Тедоне О. (Tedone O.) 127, 916
 Теодореску П. П. (Teodorescu P. P.) 923
 Тимошенко С. П. 433, 435, 501, 505, 909, 924
 Тимпе А. (Timpe A.) 923
 Тирстен Г. Ф. (Tiersten G. F.) 911
 Толоконников Л. А. 767, 927, 928

 Томсон В. (Thomson W.), см. Кельвин
 Тонти Э. (Tonti E.) 914
 Трелоар Л. (Treloar L. R. G.) 672
 Трикоми Ф. (Tricomi F.) 431, 921
 Треффтц Э. (Trefftz E.) 39, 247, 909, 911
 Тупин Р. А. (Toupin R. A.) 746, 928
 Трусделл (Truesdell C.) 647, 687, 910, 912, 926
 Тэйлор Дж. (Taylor J.) 922
 Тэт П. (Tait P. G.) 916
 Тэт Р. (Tait R. I.) 916

 Уфлянд Я. С. 918, 924
 Уэйнер Дж. (Weiner J.) 913

 Фадле И. (Fadle I.) 923
 Файлон (Filon L. N. G.) 350, 494, 919, 923
 Феодосьев В. И. 920, 929
 Фикера Г. (Fichera G.) 917
 Филоненко-Бородич М. М. 910
 Фингер (Finger J.) 638, 926
 Финци Б. (Finzi B.) 27, 911
 Фламан (Flamant) 516
 Фын (Fung Y. C.) 909

 Хасис А. Л. 922
 Хорви Г. (Horvay G.) 920, 924
 Хоргэн (Horgan C. O.) 920
 Хьюджес Д. С. (Hughes D. S.) 667

 Чаплыгин С. А. 925
 Чезаро Э. (Cesaro E.) 63, 912
 Черрути В. (Cerruti V.) 224, 368, 915, 916

 Шапиро Г. С. 919
 Шерман Д. И. 923
 Шилд Р. Т. (Shield R. T.) 695, 700, 927, 928
 Шифф П. А. 361, 362, 919, 920
 Штаерман И. Я. 918

 Эмде Ф. (Emde F.) 317, 345
 Эйрих Ф. (Eirich F.) 912
 Эйхингер А. (Eichinger A.) 111, 912
 Эри (Airy G. B.) 465
 Эринген А. (Eringen A. C.) 910
 Эшелби Дж. (Eshelby J.) 219, 222, 915

 Юбенкс Р. (Eubanks R. A.) 913, 914
 Янке Э. (Janke E.) 317, 345

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аналогия мембранная 395

Базис взаимный 825, 870

— основной 870

Балка, элементарная теория 491

Брус круговой, нагруженный на поверхности 506

— — — по торцам 502

Брус с круговой осью 482—513

Бифуркация равновесия сжатого стержня 791, 794

— — сферы 795

Вектор 799

— градиент 839

— — дивергенции 843

— дисторсии поворотный 198

— — поступательный 198

— лапласиан 843

— напряжения 20

— напряженности электростатического поля 36

— Папковича — Нейбера 287

— перемещения 14, 57

— площадки ориентированной 17

— поверхностных сил, главный 473

— поворота 60

— ротор ротора 844

—, сопутствующий тензору 803

— теплового потока 121

Векторное произведение векторов 799

— — — двойное 802

Векторы единичные 800

— сферические Лапласа 248

Вихрь вектора 840

Включение 219

Градиент 839

— вектора 840, 856

— скаляра по тензору 832

— скалярного произведения 841

— тензора 842

Давление следящее 729

Двоякование в кристалле 219

Девиатор 35, 650, 828

— тензора напряжений 33

Депланация 380

Деформации главные 77

Деформация вектора 841

— круглого цилиндра осесимметричная 772

— плоская 462

— полого цилиндра осесимметричная 98

— — шара 714

— полупространства материала плоская 775

— радиально-симметричная 769

— — — полой сферы 97

— — — сферы 773

— тела вращения 141

Диада 809

Дивергенция вектора 840, 856, 884

— векторного произведения 841

— диады 842

— произведения тензора на вектор 679

— тензора 842, 857, 884

Диполь силовой 209

Дислокация 67, 745

Дисторсия в двусвязной области 552, 595

— Вольтерра 67, 745

— в полом цилиндре вращательная 337

— — — — поступательная 337

Дифференциал полный вектора 883

— — скаляра 883

Дифференцирование ковариантное (абсолютное) 880

Диск вращающийся 575

—, заключенный в обойму 584

— круглый, нагруженный сосредоточенными силами 566

— —, общий случай нагружения 569

—, сжатый двумя силами 568

Жесткость геометрическая при кручении 381, 395

- Зависимости (соотношения) Коши 20, 29, 37
- Бельтрами 131, 133
 - Бельтрами — Мичелла 369
 - Ляме 860
 - Сен-Венана 60
- Задача Альманзи 461
- Буссинека 224
 - Буссинека — Черрути 227
 - Герца 306, 329
 - Головина 505
 - Дирихле внешняя 186
 - — для полупространства 237
 - — для сфероида 901
 - изгиба авиационного профиля 444
 - — балки 483
 - —, вариационная формулировка 437
 - — гиперболоида 276
 - Кирша 589
 - краевая вторая внешняя 196
 - — — внутренняя 192
 - — — для кольца 596
 - — — сферы 254
 - — первая внешняя 196, 619
 - — — внутренняя 191
 - — — для полупространства 240
 - — — для круга 578
 - — — — сферы 248
 - — теории дисторсий 206
 - — контактная, плоская 522
 - — кручения гиперболоида 279
 - — Ляме 599, 701
 - — для полого цилиндра 335
 - — — шара 714
 - Мичелла 445
 - Неймана 373, 392
 - — о балке 482
 - об изгибе стержня силами 430
 - — о кручении 388—429
 - — о плоской деформации плиты 482
 - — о штампе 306
 - — плоская нелинейной теории упругости 753
 - — теории упругости 462, 470
 - — растяжения балки 483
 - — Римана, краевая 523
 - — Робена 187, 195
 - — — эластостатическая 187
 - — — — для шара 250
 - — — — эллипсоида 284
 - Сен-Венана 366, 920
 - — плоская 484
 - Файлона 350
 - Фламана 516
 - —, обобщение 518
- Задачи аксиально-симметрические 139
- контактные 306
 - — краевые для бесконечной области с отверстием 548
 - — — двусвязной области 552
 - — — односвязной конечной области 545
 - — — линейной теории упругости 125
 - — — плоской теории упругости 544
 - — нелинейной теории упругости 687
 - — смешанные для полупространства 241
- Закон Гука обобщенный 102, 112
- — — для плоской задачи 462
- Закон состояния 101
- — — в форме Фингера 637, 687
 - — — изотропного идеально-упругого тела 633
 - — — квадратичный идеально-упругого тела 659
 - — — Синьорини 657
 - — — квазилинейный 659
 - — — линейной теории 102, 124
 - — — Мурнагана 666
 - — — Нейбера 673
 - — — Синьорини, упрощенный 662
 - — — среды 628
 - — — термодинамики, первый 630
- Значение главное интеграла по поверхности 177
- — функционала стационарное 677
- Значения главные девиатора 830
- — — тензора 819, 824
- Изгибание полосы в цилиндрическую панель 779
- Изгиб гиперболоида вращения парой 281
- — — силой 280
- Изгиб стержня 430
- — — авиационного, профиля 443
 - — — прямоугольного сечения 434
 - — — эллиптического сечения 432
 - — — тяжелого стержня 457
 - — — цилиндрический плиты 95, 692
- Изменение объема относительное 42
- Инвариант первый тензора 812
- Инварианты главные 27
- — девиатора 829
 - — мер деформации главные 632
 - — тензора 821
 - — — главные 821, 876, 632
 - — — напряжений 44
 - — — тензоров конечной деформации 85
- Индекс немой 800
- — свободный 800

- Интегралы типа Коши 564
 — — —, главное значение 565
 Интенсивность деформации сдвига 78, 651
 — диполя 209
 — касательных напряжений 32, 651
 — центра расширения 208
 История развития теории упругости 910
- Квадрат линейного элемента 851
 — тензора 812
 Квазивекторы 811
 Клини упругий 531—544
 Кольцо круговое 595—606
 — неконцентрическое 625
 Компоненты вектора ковариантные 871
 — — контравариантные 871
 — — физические 871
 — тензора 803
 — — метрического, ковариантные 851
 Координаты криволинейные 136, 850.
 — ортогональные 474
 — лагранжевы 15
 — материалы 15, 37
 — ортогональные 138
 — полярные 475
 — сферические 851, 861
 — цилиндрические 850, 860
 — эллиптические 865
 — — вырожденные 863
 — Эйлеровы 15
 Коэффициент линейного расширения 56
 — Пуассона 51, 112, 120
 — —, экспериментальное определение 388
 — температурного расширения 601
 — температуропроводности 122
 — теплопроводности 121
 Коэффициенты Ляме 111, 852
 Критерий Мизеса 52
 Круги Мора 30
 Кручение гиперболоида вращения 279
 — круглого цилиндра 94, 708
 — полого цилиндра 343
 — сжатого стержня 734
 — стержня прямоугольного сечения 401
 — — круглого, с выточкой 404
 — —, приближенное решение 416
 — — трапецидального сечения 419
 — — треугольного сечения 403, 407
 — — эксцентрического кольцевого сечения 409
- Кручение стержня эллиптического кольцевого сечения 407
 — — — сечения 397
 — — — удлиненного профиля сечения 420
 — — тела вращения 141
 — — трубы тонкостенной 424
 — — — с перемычкой 428
- Лапласиан скаляра 843, 856, 885
 Линии координатные 850
- Материал «гармонического типа» (полулинейный) 645
 — Муни 689, 706
 — несжимаемый 670
 — при сверхвысоких давлениях 667
 Матрица квадратная 802
 Мера конечной деформации вторая 80
 — — — первая 68
 — деформации вторая 58
 — — Коши 72
 — — логарифмическая 765
 — — первая 57, 72
 Меры деформации 82
 — — Альянзи 632
 — — Коши 632
 Метод оптический 517
 — подвижного триэдра 855
 — полуобратный Сен-Венана 368
 — Ритца 153, 719
 Методы прямые вариационного исчисления 153
 Модуль вектора 801
 — объемного сжатия 105
 — — — адиабатический 108
 — — — изотермический 108
 — сдвига 105
 — Юнга 51, 112
 Модули упругости, обобщенные 634, 652
 — —, связь между ними 114
 Момент дипольный 209
 — изгибающий 48, 273, 367
 — крутящий 48, 273, 367
 — поверхностных сил, главный 474
 — сосредоточенный 208
 — — в вершине клина 537
 Моменты компонент тензора напряжений 45
 — напряжений второго и более высокого порядка 52
 — — первого порядка 47
 — функции 45

Набла-оператор Гамильтона 839
 Нагрузка «мертвая» 676
 — на полупространство распределенная нормальная 225
 Нагружение балки полиномиальное 492
 — — косинусоидальное 509
 — — синусоидальное 494
 — — сосредоточенной силой 497
 — полуплоскости силой, направленной вдоль границы 520
 — — силами, нормальными к границе 518
 Направления главные тензора 28, 819
 Напряжение касательное 20
 — нормальное 20
 Напряжения главные 28, 640
 — — касательные 32
 — — номинальные 275
 — температурные в упругом полупространстве 232
 — тепловые 555
 — — в сфере 259
 — — в шаре 251
 — в эллипсоидальной полости 292
 Неравенства Трусделла 647
 Неравенство Николаи 401
 Несовместимость (Ink) 63

 Области многосвязные (в задаче о кручении) 427
 Область бесконечная с отверстием 544
 — двусвязная 623
 — — кольцеобразная 544
 — односвязная конечная 544, 615
 Объем двусвязный 197
 Овал эпитрохоидный 618
 Опыты Бриджмена 105, 668
 Ортогональность обобщенная 361
 Оси деформации главные 77
 — тензора главные 876
 Отверстие в бесконечной плоскости 586

 Параметры нагружения 629
 — — бифуркационные 725
 Парадокс Карозерса 538, 924
 Параллелепипед элементарный 21
 Перемещение точки 14
 Перемещения виртуальные 42
 — термоупругие 217
 Плоскость упругая 513—531
 Плотность 13
 Площадка октаэдрическая 32
 — ориентированная 17
 Поверхности координатные 850

Поворот среды конечный 78
 Поле напряжений 18
 — перемещений плоское 90
 Полость в упругой среде сфероидальная 299
 — — — эллипсоидальная 292
 Полупространство упругое 223
 Постоянная барьера 198
 — диэлектрическая 36
 Полуплоскость упругая 513—531
 Потенциал термодинамический Гиббса 118, 163, 630
 — — —, вариация 630
 Потенциалы Буссиннека 216, 217
 — простого слоя на эллипсоне 905
 — теории упругости 176
 Предел текучести 110
 Представление бигармонической функции 475
 Преобразование аффинное 89, 806
 — базиса 875
 — конформное 607
 — Круктова 133
 — подобия начального состояния 87
 — Стокса 847
 Применение конформного преобразования 606—627
 Принцип виртуальных перемещений 40, 674
 — Гамильтона 153
 — минимума дополнительной работы 148, 156
 — — потенциальной энергии 148, 151
 — Сен-Венана 163
 — —, формулировка Мизеса 244
 — стационарности дополнительной работы 681
 — — смешанный 148, 159
 — упругой эквивалентности 163
 Принципы вариационные при учете температурных слагаемых 161, 914
 — — статик 143
 — энергетические 148
 Произведение диадное векторов 809
 — диады на вектор справа 809
 — скалярное векторов 799
 — тензора на вектор слева 806
 — — — справа 809
 — — — скаляр 806
 Произведения Ляме 893
 Производная ковариантная (абсолютная) 881
 Производные главных инвариантов тензора по тензору 832
 Пространство трехмерное Евклида 799

Профили удлиненные 420
 Профиль авиационный 422, 443
 Процесс деформирования адиабатический 108, 631
 — — изотермический 107, 631

Работа дополнительная 157
 — деформации дополнительная 679
 — — — удельная 680, 682
 — элементарная внешних сил 40, 102
 — — — — удельная 41
 — — — — удельная изменения объема 44
 — — — — формы 44

Равновесие упругого цилиндра 331—365

— упругой сферы 247—272

Рассмотрение «квазистатическое» 123

Распределение температуры стационарное 559

Растяжение гиперболоида вращения 276

— кольца сосредоточенными силами 601

— одноосное 664, 669, 689, 732, 778

— пластики с круговым отверстием (задача Кирша) 589

— плоскости с круговым отверстием 589

— стержня 449

— упругой полосы 695

Расширение объемное 86

Реология 628

Решение Буссинета — Галеркина 135

— Карозерса — Инглиса 538

— Лява 139

— Папковича — Нейбера 128, 177

— — — для тел вращения 144

— приближенное задачи о кручении стержня 416

— Треффтца 247

Решения однородные задачи о цилиндре 353

— — — о полосе (брусе) 511

— Рибьера и Файлона 494

— задачи о равновесии цилиндра в бесселевых функциях 346

— — — — полиномиальные 339

Ротор вектора 840, 857, 884

— векторного произведения 842

— тензора 842

Свертывание индексов 811

Сдвиг 59

— простой 92, 665, 690, 779

— чистый 33

Сдвиги главные 77

Сжатие всестороннее 688

— слоя 700

— упругой полосы 695

Сила инерции переносного движения 16

— объемная 16

— осевая 367

— перерезывающая 48, 273

— растягивающая 48, 273

— сосредоточенная 497, 513, 529, 531

— центробежная 16

Силы близкого действия 19

— внешние 15

— внутренние 15

— массовые 15

— — — потенциальные 16

— поверхностные внешние 16

— поперечные 367

Символ Кронекера 800

Символы Кристоффеля второго рода 88, 879

— — — первого рода (прямые скобки Кристоффеля) 852

— Леви-Чивита 21, 801, 813

Система напряжений Максвелла электростатическая 36

— сил в малом объеме 209

— сил сверхстатическая 244

Системы сил статически эквивалентные 163

Скаляр 799

— инвариантный 831

Скорости волн сдвига и сжатия 117

След тензора 812

Слой упругий 692—701

Соотношения Коши 21

Соприкасание поверхностей 324

Состояние напряженное плоское 467, 759

— — —, обобщенное 469

— среды конечное 13

— — — натуральное 13, 635

— — — начальное 13, 635

Способ Галеркина 154

— Канторовича 418

— сечений 17

Среда Генки 104, 110

— Гука 104

— несжимаемая 634

— упрочняющаяся 110

Стационарность дополнительной работы 680

— потенциальной энергии системы 675

Стержень призматический 366

Сходимость по энергии 155

- Тело Генки 673
 — идеально-упругое 628
 — Нейбера 673
 — упругое 629
 Температура абсолютная 106
 — средняя 559
 Тензор влияния 168, 175
 — — в упругом полупространстве 230
 — второго ранга 802
 — второй меры деформации 80
 — деформации конечной, второй (тензор деформации Альманзи — Гамелля) 81
 — —, первый (тензор деформации Коши — Грина) 75
 — — линейный 59, 101
 — «деформация вектора» 841, 857, 884
 — единичный 810
 — изотропный 814
 — инерции 804
 — $\text{Ink } Q$ 845, 890
 — Кельвина — Сомильяна (тензор влияния) 175
 — —, его аналог 514
 — кососимметричный 807
 — кривизны Римана — Кристоффеля 888
 — метрический 872, 878
 — напряжений 18, 39, 101, 220, 637, 642, 687, 722
 — — диадное представление 37
 — — Пиолы — Кирхгофа 644
 — —, разбиение на шаровой тензор и девиатор 32, 650
 — — энергетический 43, 633
 — —, измененный 672
 — обратный 814
 — одинаковых касательных напряжений 35
 — первой меры деформации 57, 72
 — поворота 84, 642, 815
 — податливости стержня 805
 — производная вектора по вектору радиуса 840
 Тензор Риччи 889
 — силовой 208
 — симметричный 807
 — — положительный 823
 — транспонированный 806
 — функции напряжений 26, 756
 — шаровой 32, 820
 Тензоры высших рангов 811
 — Леви-Чивита 754, 813, 873
 — подобные 836
 Теорема взаимности 167, 200
 Теорема при учете температурных слагаемых 172
 — Гаусса обобщенная 176
 — Кейли — Гамильтона 813, 822, 829
 — Кирхгофа об единственности решения 182
 — Максвелла 168
 — о циркуляции касательных напряжений 393
 — Риччи 882
 — Стокса 848
 — существования решения 191
 Теоремы Стернберга 246
 Теория сплошной среды линейная 102
 — упругости моментная (несимметричная) 19
 Теплоемкость при постоянном давлении 56
 Термодинамики закон второй 107
 — — первый 106
 Тождества Риччи 889
 Точка истока 168
 — наблюдения 168
 — центральная 204
 Трансформанта Меллина 534
 Труба под давлением (задача Ляме) 599, 701
 Угол кручения 391
 — подобия 652
 — — девиаторов 656, 836
 — сдвига 74
 Удлинения относительные 59, 73
 — — главные 640
 Умножение векторное тензора на вектор 810
 — тензора на вектор справа 803
 — — — слева 806
 Уравнение дифференциальное для объемного расширения 127
 — — цилиндрических функций 346
 — — для функции напряжений Эри 466
 — состояния Фингера 638, 772
 — теплопроводности 121
 — — Фурье 122
 — состояния в форме Генки 656
 — — для тензора Пиолы 645
 Уравнения интегральные второй краевой задачи 187
 — — первой краевой задачи 185
 — линейной теории упругости 124
 — — — в криволинейных координатах 136
 — — — в ортогональных координатах 138

- Уравнения Навье — Стокса 752
 — нейтрального равновесия Саусвел-
 ла 787
 — равновесия в объеме 22
 — стержня интегральные 367
 — равновесия теории упругости (урав-
 нения статики) 23
 — — — в перемещениях 126
 — — — — в форме Тедоне
 127, 240
 — — —, решение Папковича —
 Нейбера 128, 129
 — — —, решение Аржаных — Сло-
 бодянского 131
 — — на поверхности 25
 — способа Галеркина 156
 — кругового цилиндра 331
 — состояния 763
 — статики плоской задачи 463
 Условие текучести Мизеса 111
 Условия ортонормированности еди-
 ничных векторов 800
 — совместности (сплошности) дефор-
 маций 61
- Формула Гаусса — Остроградского
 45, 846
 — Грина 382
 — Гурса 479
 — Клапейрона 116
 — Лауричеллы 209
 — Муни 672
 — Родрига 817
 — Чезаро 63
 Формулы Вейнгартена 67
 — дериационные 855
 — Колосова 477
 — Колосова — Мухелишвили 480,
 549
 — связи главных инвариантов 83
 Функции Мухелишвили 480, 547
 — напряжений в задаче Сен-Венана
 372
 — — Максвелла 26
 — — Морера 26
 — Папковича — Нейбера 227
 — тензоров 830
 Функция влияния 500
- Функция деформации 385, 392
 — кручения комплексная 392
 — — Лява 140, 184
 — напряжений при кручении 389
 — — Тимошенко 433
 — — — Эри 27, 454, 465
 — — — форма Мичелла 554
 — положения 176
 — тензорная под тензором 831
- Центр вращения 211
 — жесткости 384, 439
 — изгиба 384
 — расширения 210
 Цилиндр «вывернутый наизнанку»
 702, 707
 Циркуляция вектора 847
- Шар вращающийся 266
 — гравитирующий 266
 Штамп жесткий 306, 522
 — — плоский 309
 — — эллиптический в плане 315
 — — неплюсский 313, 319
 — — — эллиптический в плане 321
 — параболического очертания 528
 — плоский 528
- Щель в упругой среде круговая 300
 — — — эллиптическая 303
- Эллипсоид вращающийся 281
 Эффект Пойнтинга 691, 713
 Эффекты второго порядка 736, 741,
 928
 Энергия внутренняя 630
 — — удельная 106
 — деформации потенциальная 106,
 628, 631
 — — — удельная 109, 114, 631, 646
 — — — — в формуле Муни 670, 672
 — — — — линейно-упругого тела
 114
 — дисторсин потенциальная 202
 — свободная 630
 — системы потенциальная 149, 677
 — — свободная 108
 — энтропия 107, 630

Анатолий Исаакович Лурье

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М., 1970 г., 940 стр. с илл.

Редактор *В. А. Пальмов*

Техн. редактор *А. П. Колесникова*

Корректор *Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 24/II 1970 г. Подписано
к печати 7/IX 1970 г. Бумага 60×90/16.
Физ. печ. л. 58,75. Условн. печ. л. 58,75.
Уч.-изд. л. 62. Тираж 11000 экз. Т-12572.
Цена книги 4 р. 11 к. Заказ 528.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы,
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени
Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.

